This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 1,237,212

Digitized by Google

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest

Digitized by Google

AS
182
.G552

Digitized by Google

Digitized by Google

Nachrichten

1266644

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1902.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1902.

Digitized by Google

Digitized by Google

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1902.

M. Abraham, Dynamik des Elektrons . . . . . S. 20
Walther Borsche, Ueber Xanthenderivate aus *p*-Nitrophenol . . . . . „ 141
Emil Bose, Ueber die Natur der Elektricitätsleitung in elektrolytischen Glühkörpern . . . . . „ 1
V. Cuomo, Messungen der Elektricitätszerstreuung in der freien Atmosphäre auf Capri . . . . . „ 324
H. Ebert, Bericht über die in München im Jahre 1901/1902 ausgeführten luftelektrischen Arbeiten . . . . . „ 219
J. Elster, Dr. V. Cuomos Messungen der Elektricitätszerstreuung in der freien Atmosphäre auf Capri . . „ 193
Fr. Exner, Bericht über die Thätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie . . . . . „ 231
Lothar Heffter, Zur Theorie der reellen Curvenintegrale „ 115
David Hilbert, Ueber die Grundlagen der Geometrie . „ 233
C. Jacobj, Beitrag zur physiologischen Wirkung der organischen Ammonium-Jodide und Polyjodide . . . . „ 102
C. Jacobj, Ueber die pharmakologische Wirkung der cyclischen Isoxime . . . . . „ 313
W. Kaufmann, Ueber die elektromagnetische Masse des Elektrons . . . . . „ 291
O. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichung $A(s,t) - \mathrm{A}(s,t) = \mu \int_0^1 A(s,r)\,\mathrm{A}(r,t)\,dr$ . . . . . „ 165
Alfred Loewy, Ueber reducible lineare homogene Differentialgleichungen . . . . . „ 42
J. O. Müller, Ueber die Minimaleigenschaft der Kugel . „ 176

Digitized by Google

W. Nernst und A. Lessing, Ueber die Wanderung galvanischer Polarisation durch Platin- und Palladiumplatten . . . . . S. 146
Ernst Richard Neumann, Neue Integraleigenschaften successiver Potentiale . . . . . „ 242
Friedo Schmidt, Die Körpermuskulatur von Branchiobdella parasita . . . . . „ 284
A. Schoenflies, Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis Situs . . . . . „ 185
R. Straubel, Versuche über den elektrokalorischen Effekt beim Turmalin . . . . . „ 161
Hermann Vöchting, Zur experimentellen Anatomie . „ 278
W. Voigt, Beiträge zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Krystalle . . . . . „ 48
W. Voigt, Ueber die absolute Verzögerung der Lichtschwingungen durch Reflexion . . . . . „ 259
W. Voigt, Weiteres zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Krystalle . . . . . „ 269
W. Voigt, Neue Beobachtungen über magnetooptische Erscheinungen in Absorptionsstreifen . . . . . „ 305
O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen (X) . . . . . „ 92
O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen (XI) . . . . . „ 297
E. Wiechert, Polarlicht-Beobachtungen in Göttingen . „ 182

Digitized by Google

Ueber die Natur der Elektricitätsleitung in elektrolytischen Glühkörpern.

Von

Emil Bose.

Mit einer Tafel.

Vorgelegt von Herrn Nernst in der Sitzung am 11. Januar 1902.

Es ist eine bekannte Thatsache, daß reine Substanzen stets nur ein sehr kleines elektrolytisches Leitvermögen besitzen; wir haben es daher in weitaus den meisten Fällen elektrolytischer Leitung mit Lösungen zu thun. Dies gilt nicht nur für den flüssigen Aggregatzustand, dem die meisten Objekte der Elektrolyse angehören, sondern auch für die bisher nur in verhältnismäßig geringer Zahl untersuchten festen Elektrolyte[1]). Unter diesen letzteren stehen zur Zeit im Vordergrunde des Interesses die schwerschmelzbaren Metalloxyde, deren Verwendung in dem von Herrn Prof. Nernst erfundenen elektrolytischen Glühlicht eine genauere wissenschaftliche Untersuchung über den Mechanismus ihrer Leitung wünschenswert erscheinen ließ. Auch in den Nernst'schen Glühkörpern haben wir es nicht mit reinen Oxyden, sondern mit festen Lösungen eines oder mehrerer Oxyde in einem anderen Oxyd zu thun. Der analogen Ueberlegung wie bei flüssigen Elektrolyten entsprechend, sollte man nun annehmen, daß ein solcher Glühkörper nur dann seine Zusammensetzung bewahren würde, wenn man denselben mit Wechselstrom speist. Durch Gleichstrom würde man eine ziemlich schnelle Zerstörung des Stiftes zu erwarten haben, denn da das Gewicht des Oxydes bei einem normal mit 0,9 Ampère beanspruchten Stifte nur ca. 0,1 g beträgt, welche Menge rund 300 Coulomb zur Zerlegung erfordert, so würde nach

1) Nernst und Reynolds Göttinger Nachr. Math.-phys. Kl. 1900. Heft 3. Fritsche, Wied. Ann. 60. 300 (1897).

Digitized by Google

etwa 5 Minuten die gesamte Substanz des Stiftes elektrolytische Zerlegung erfahren haben. Dieser Ueberlegung gegenüber muß die Thatsache frappiren, daß ein solcher Glühkörper hunderte von Stunden mit Gleichstrom zu brennen vermag, wobei eine Elektricitätsmenge den Stift passirt, die mehrere tausendmal größer ist als die zur elektrolytischen Zerlegung seiner Masse erforderliche. Daraus folgt, daß, wenn die Leitung im Stift eine reine elektrolytische ist, ein Proceß stattfinden muß, welcher den jeweiligen Effekt der Elektrolyse vernichtet. Die Natur dieses regenerirenden Processes kommt in der von Prof. Nernst gegebenen Theorie dieser Leitung [1]) durch das Wort „Reststrom" zum Ausdruck. Danach hätten wir im Innern eines solchen Stiftes beim Stromdurchgang einen Vorgang anzunehmen, wie ihn Helmholtz [2]) für die Convektionsströme in einer elektrolytischen Troge beschreibt, indem das an der einen Elektrode freigewordene Gas zur andern Elektrode diffundirt und dort als Depolarisator dient.

Unter Annahme eines solchen Reststromes könnten wir uns die Vorgänge in einem Nernst'schen Glühkörper folgendermaßen vorstellen. Wir haben in den Oxyden wahrscheinlich Leiter, bei denen die Wanderungsgeschwindigkeit u des Kations sehr viel kleiner ist als die des Anions. Es wird also die Stromleitung zumeist durch die Wanderung von Sauerstoffjonen bestritten, während die Metalljonen im stationären Zustande keine Verschiebung erleiden. Der am positiven Pol (Anode) freigewordene Sauerstoff diffundirt im Innern des Stiftes zur Kathode zurück, um daselbst das dort abgeschiedene Metall wieder zu oxydiren. Der den Stift gleichzeitig umgebende, auch seine Poren durchdringende Luftsauerstoff befördert den Vorgang und erhöht den Effekt desselben, sodaß die Lebensdauer des Stiftes in Luft wesentlich wächst im Vergleich zum Vakuum. Wir können uns das Funktioniren des Stiftes nun einmal etwa so vorstellen, daß wir den Sauerstoff an der Anode als Gas frei werden und ebensoviel an der Kathode verbrauchen lassen. Dann fände der Kreislauf des Sauerstoffs in einem das Gefäß umgebenden Luftraum derart statt, daß innerhalb des Stiftes, d. h. im Elektrolyten der Sauerstoff von der Kathode zur Anode wandert, außerhalb des Stoffes, d. h. im umgebenden Luftraum und in den Poren desselben speciell in dem innern Röhrchen der dickeren Stifte, dagegen von der Anode zur Kathode strömt. Wir würden dann den Vorgang

1) Ztsch. f. Elektroch. 6, 41 1899.
2) Pogg. Ann. 150, 489 (1877).

Digitized by Google

als eine Elektrolyse mit vorzüglichem Depolarisator, dem atmosphärischen Sauerstoff, aufzufassen haben. Der Umstand, daß der kathodische Depolarisator an der Anode regenerirt wird, dürfte dann die Bezeichnung „äußerer" Reststrom rechtfertigen im Gegensatz zum folgenden. Andererseits könnten wir nämlich annehmen, daß das Material der Glühkörper bei der hohen Temperatur ein gutes Lösungsmittel für Sauerstoff abgiebt und die Rückdiffusion des Sauerstoffs zur Kathode also in der festen Lösung stattfindet. In diesem Falle hätten wir einen reinen „innern" Reststromvorgang ganz analog dem Helmholtz'schen Beispiel. Wahrscheinlich finden beide Vorgänge gleichzeitig statt.

Durch die folgenden Versuche, welche ursprünglich zu gänzlich anderen Zwecken, nämlich zur Entscheidung der Frage, ob ein elektrolytischer Leiter Kathodenstrahlen auszusenden vermag, unternommen wurden, findet nun in der That die Nernst'sche Annahme einer elektrolytischen und zwar speciell einer Reststromleitung in den Elektrolytglühkörpern eine völlige Bestätigung.

Montirt man einen Glühkörper so in einem Glasgefäß, daß man ihn zum Anzünden herausnehmen und nach dem Wiedereinsetzen das Gefäß mit Hülfe einer Quecksilberluftpumpe auspumpen kann, während der Stift brennt, so bemerkt man zunächst folgendes. Je weiter man evakuirt, desto besser beginnt der Stift zu leiten, die Spannung nimmt ab, der Strom nimmt zu [1]). Daß dieser Leitfähigkeitszuwachs keineswegs durch erhöhte Temperatur des Stiftes bedingt sein konnte, ließ sich besonders deutlich beobachten, wenn man außer dem eigenen Widerstand des Stiftes noch viel Vorschaltwiderstand im Stromkreis hatte, sodaß die Stromstärke nicht erheblich steigen konnte. Dann nahm fast lediglich die Spannung des Stiftes rapid ab, mit ihr der Energieverbrauch und der Stift brannte schließlich nur ganz dunkelrot, während er bei Atmosphärendruck in hellster Weinglut geleuchtet hatte. Ließ man wieder Luft einströmen, so hatte man fast momentan die alte Helligkeit wieder, der Stift verhielt sich in Bezug auf Strom und Spannung ganz wie vorher.

Da die Widerstandsänderung eine so enorm große war, [die Leitfähigkeit kann auf mehr als das Zehnfache wachsen] so wurde die Erscheinung genauer untersucht. Es ergab sich zunächst, daß nach längerem Brennen im Vakuum der Stift sein Aussehen völlig verändert hat. Um das konstatiren zu können, muß man den Stift im Vakuum ausgehen lassen und dann erst Luft eintreten

1) Vgl. Experimentelle Belege, Tabelle I u. II.

Digitized by Google

lassen. Der Stift, der vorher rein weiß aussah, zeigt dann eine dunkelgraue, nach langem Auspumpen sogar eine tiefschwarze Farbe mit deutlichem Metallglanz, der bei gewöhnlicher Temperatur an der Luft auch erhalten bleibt. Erhitzt man aber den Stift eine kurze Zeit zum Glühen, so nimmt er die alte rein weiße Farbe allmählich vollständig wieder an und zeigt beim Brennen unter den ursprünglichen Bedingungen auch sofort wieder die niedrige Leitfähigkeit. Die Aenderung des Aussehens ist also direkt mit der Widerstandsänderung verknüpft und durch Glühen an Luft rückgängig zu machen.

Läßt man den Stift nicht erst in Vakuum erlöschen, sondern läßt man zuerst Luft ein, so bekommt man den geschwärzten Stift garnicht zu sehen, da die Aenderung durch das Weiterglühen in Luft sehr schnell rückgängig gemacht wird.

Die Gesamtheit dieser Erscheinungen deutet darauf hin, daß im Vakumm eine mehr oder weniger weitgehende Reduktion des Stiftes stattgefunden hat, und daß das freigewordene Metall beim Glühen an Luft wieder verbrennt.

Dem entspricht auch eine Erscheinung, welche alsbald beobachtet wurde und zunächst großes theoretisches Interesse zu verdienen schien. Es zeigte sich nämlich, daß, während ohne Brennen des Stiftes mit der Quecksilberluftpumpe sich leicht ein Vakuum erreichen ließ, bei welchem nur noch die grüne Fluoreszenz des Glases in dem Kathodenrohr sichtbar war, beim Glühen des Nernststiftes das Vakuum sich nicht bis zum Verschwinden des blauen Lichtes treiben ließ. Zwar ließ sich brillante Fluoreszenz erreichen, nicht aber bei sonst völlig dunkelem Rohre. Auch beliebig langes Pumpen brachte keine Verbesserung des Vakuums mehr hervor. Zunächst schien das Resultat dafür zu sprechen, daß bei der hohen Temperatur die Dissociationsspannung der Oxyde erreicht wäre, was zu interessanten Folgerungen Anlaß geboten haben würde. Es ergab sich aber bald, daß diese Vermutung durchaus nicht richtig war und daß die Gasproduktion des Stiftes lediglich Produkt der Elektrolyse ist. Dies erhellt aus folgenden Thatsachen. Brennt man den Glühkörper statt mit Gleichstrom mit Wechselstrom, so findet keinerlei erhebliche Aenderung der Leitfähigkeit statt. [Vergleiche: Experimentelle Belege, Tabelle III][1]).

1) Die Resultate zeigen bei niederen Belastungen meist nur Leitfähigkeitszunahmen, die noch völlig innerhalb der möglichen Versuchsfehler liegen. Erst bei der höchsten Belastung treten im besten Vakuum merkliche Leitfähigkeitsverbesserungen auf, die wohl zeigen, daß die Wechselzahl des Stromes nicht groß genug ist, um die Polarisation der Elektroden zu verhindern. Während

Digitized by Google

Das Aussehen des Stiftes blieb bei beliebig langem Brennen im besten Vakuum ungeändert, es fand also keine erhebliche Reduktion zu Metall statt und das Vakuum ließ sich beim Brennen des Stiftes mit Wechselstrom genau so hoch treiben als dies nur irgend ohne Glühen des Stiftes möglich war, der Stift gab also beim Brennen mit Wechselstrom keine merklichen Mengen Gas ab. Demnach ist die Annahme, daß die Dissociationsspannung des Stiftes erreicht werde, sogleich fallen zu lassen, dafür läßt sich aber aus dieser Thatsache ein strikter Beweis für die elektrolytische Leitung im Oxyd entnehmen. Sauerstoff läßt sich aus dem Stift nur frei machen mit Gleichstrom, wo er an der Anode in Freiheit gesetzt und wenigstens zum Teil dem Gasraum zugeführt wird. Zwischen den Annahmen eines „inneren" oder „äußeren" Reststromes läßt sich damit aber nicht entscheiden, denn die Beeinflussung der Leitfähigkeit durch das Vakuum findet sowohl im einen, wie im andern Falle eine plausible Erklärung. Nehmen wir einen rein „äußeren" Reststrom an, d. h. lediglich kathodische Depolarisation durch den umgebenden Luftsauerstoff, so ist es erklärlich, daß bei dem niedrigen Druck resp. Partialdruck des Sauerstoffs die Zufuhr desselben an der Kathode zu langsam erfolgt und zur sofortigen Verbrennung des Metalls nicht mehr ausreicht. Nehmen wir einen rein „inneren" Reststrom an, so ist das Oxyd in der Nähe der Anode dem Vakuum gegenüber stark mit Sauerstoff übersättigt und es geht bei der Diffusion bis zur Kathode viel davon verloren. In Wahrheit wird wohl weder das eine noch das andere Extrem streng erfüllt sein, sondern beide Vorgänge werden thatsächlich nebeneinander stattfinden. Der Vorgang der Leitfähigkeitsänderung im Vakuum gestaltet sich dann wahrscheinlich folgendermaßen. Das an der Kathode abgeschiedene Metall vermag nicht vollständig verbrannt zu werden, sondern bildet, da es unter sehr hoher Stromdichte zur Abscheidung gelangt, feine Dendriten, die in der Masse des Stiftes linear der Anode entgegenwachsen. Je unvollständiger nun die Oxydation stattfindet, desto weiter erstreckt sich das Metall von der Kathode aus [1]). Das abgeschiedene

---

der Zeit anodischer Polarisation entweicht dann an den Elektroden doch etwas Sauerstoff ins Vakuum, sodaß an beiden Elektroden kleine Metallmengen übrig bleiben, welche die bessere Leitfähigkeit bedingen. Jedenfalls sind diese Aenderungen gar nicht zu vergleichen mit den bei Gleichstrom auftretenden und auf die durch Polarisation eintretende scheinbare Verkürzung des Stiftes zurück zu führen.

1) Es ist nicht notwendig anzunehmen, daß nur das Metall des „gelösten" Oxydes abgeschieden wird, sondern es kann wie bei der Elektrolyse einer Alkalilösung

Digitized by Google

Metall vermag sich, allerdings erst bei fortgesetztem Wegpumpen des Sauerstoffs, der Anode, d. h. den stromzuführenden Platindrahtlagen, bis auf Bruchteile eines Millimeters zu nähern. In nächster Nähe der Anode genügt allerdings wohl stets die in Freiheit gesetzte Sauerstoffmenge zur völligen Verbrennung des Metalls, sodaß ein direkter metallischer Nebenschluß zu dem Oxyd niemals mit Sicherheit konstatirt werden konnte. Dagegen haben wir bei dem im Vakuum brennenden Stift ein System, das von der Kathode aus neben elektrolytischer Leitung auf eine mehr oder weniger große Strecke einen metallischen Nebenschluß besitzt, während an der Anode ein allerdings oft nur sehr kurzes Stück mit rein elektrolytischer Leitung existirt. Der metallische Nebenschluß ist am beträchtlichsten an der Kathode, von wo ausgehend die dunkle Färbung nach der Anode zu ganz kontinuirlich abnimmt.

Bei fortgesetzten Entfernen des Sauerstoffs wird der Stift der ganzen Länge nach metallglänzend und tiefschwarz. Ich habe es jedoch nicht erreichen können, daß ein solches zum Teil metallisch leitendes Stück, mit zwei Drähten berührt, gut geleitet hätte, vielleicht, weil an der Oberfläche Oxydation des Metalles stattfindet und man das Metall nur durch eine dünne Schicht Oxyd hindurch sieht, vielleicht aber auch, weil die Lebensdauer der Stifte im Vakuum unter fortwährendem Wegpumpen des Sauerstoffs in der Regel nicht lang genug ist, um bis zu wirklich guter Leitfähigkeit zu gelangen. Durch die Leitfähigkeitsänderung infolge Metallausscheidung erklärt sich auch der polare Unterschied, den man in freier Luft bei Elektrolytglühkörpern, die mit Gleichstrom gebrannt werden, gewahrt. Betrachtet man nämlich einen solchen Glühkörper durch ein dunkelblaues Glas, so bemerkt man, daß sein kathodisches Ende dunkler als der übrige Stift erscheint. Es rührt dies einfach davon her, daß selbst in Luft stets ein kleiner Teil des Metalles in Freiheit sich befindet und die Leitfähigkeit verbessert, sodaß auf einen gleichen Bruchteil der gesamten Stiftlänge an der Kathode weniger Energie verbraucht wird. In der That beobachtet man auch, daß das kathodische Ende etwas geschwärzt ist. Diese Schwärzung ist es, welche mit abnehmendem Luftdruck immer größer wird. Da dieselbe bei Wechselstrombetrieb des Stiftes nicht auftritt, ist sie als deutlich polare Erscheinung mit Recht schon stets als ein Beweis für die elektrolytische Leitung im Stift angesehen worden, wenngleich erst die

---

statt des Alkalimetalls der Wasserstoff, hier das Metall des „Lösungsmittels" zur Abscheidung gelangen, welches dann das edlere wäre.

Digitized by Google

vorliegenden Versuche eine Erklärung für die Erscheinung selbst und ihren direkten Zusammenhang mit der Elektrolyse ergeben.

Hierbei dürften noch zwei Punkte Erwähnung verdienen, welche mit der kathodischen Schwärzung des Stiftes in direktem Zusammenhang stehen. Erstens ist es eine den Construkteuren von Nernstlampen wohlbekannte Thatsache, daß die Lebensdauer eines Glühkörpers durch Polwechsel sehr herabgesetzt werden kann. Diese Erscheinung hängt mit der teilweisen Reduktion der Stifte in engster Weise zusammen und kommt daher im Vakuum sehr viel stärker zum Ausdruck. Es zeigt sich nämlich, daß ein im Vakuum erloschener Stift, besonders wenn er ziemlich weitgehend reducirt ist, beim Wiederanzünden oder auch schon beim bloßen Erhitzen in der Gebläse-Flamme zerspringt und zwar häufig unter heftigem Dekrepitiren, etwa wie Kochsalz in der Flamme. Dies spricht für das Vorhandensein innerer Spannungen, welche in der Masse des Stiftes wohl dadurch zustandekommen, daß das reducirte Metall bei der Oxydation Volumzunahme erfährt. Diese Aenderungen treten nun beim Umpolen eines Stiftes sehr schnell auf und sie mögen daher wohl die Lebensdauer des Stiftes herabsetzen.

Ferner ist es eine einfache Folge der durch die Reduktion verbesserten Leitfähigkeit, daß der Stift in den besser leitenden Teilen dunkler brennt und niedrigere Temperatur hat. Da aber mit steigender Temperatur die Nutzleistung schnell steigt, d. h. der Wattverbrauch pro Kerze sinkt, so folgt, daß die dunkleren Partien des Stiftes den Nutzeffekt des übrigen Stiftes etwas herabdrücken, d. h. daß ein mit Wechselstrom brennender Stift ceteris paribus einen etwas besseren Lichtnutzeffekt zeigen wird [1]). Die verbesserte Leitfähigkeit und damit sinkende Temperatur des kathodischen Endes ist aber nicht der einzige Grund für den herabgesetzten Nutzeffekt, sondern es wird auch die Qualität der Lichtemission geändert, indem das ausgeschiedene Metall den reducirten Teil des Stiftes zu einem schwarzen Körper macht, während der sonst gute Lichtnutzeffekt des Glühkörpers jedenfalls zu einen erheblichen Teile auf dem selektiven Emissionsvermögen der seltenen Erden beruht. Daß der Lichtnutzeffekt des zum Teil reducirten, also schwarzen Stiftes im Vakuum sehr viel schlechter ist als der des ursprünglichen Stiftes, geht aus den Beobachtungen der Tabellen I u. II zur Evidenz hervor.

1) Nunmehr ist auch wegen der am einen Ende verbesserten Leitfähigkeit bei Gleichstrom verständlich, warum ein und derselbe Stift bei gleicher Stromstärke mit Wechselstrom eine etwas höhere Spannung hat als mit Gleichstrom.

Digitized by Google

Besonders charakteristisch und zur Diskussion der beobachteten Erscheinungen geeignet sind diejenigen Versuche, bei welchen während des Brennens im Vakuum der Uebergang von Gleichstrom zu Wechselstrom durch einfaches Umschalten bewerkstelligt werden konnte. Hier zeigte sich folgendes. Der mit Gleichstrom geheizte Glühkörper zeigte die besprochenen Erscheinungen besserer Leitfähigkeit, beim Uebergang zu Wechselstrom stellte sich jedoch schnell die normale Charakteristik des Stiftes wieder her, indem bei der hohen Temperatur das Metall wieder verbrannt wurde. Je weniger Sauerstoff jedoch vorhanden war, desto langsamer vollzog sich, wie zu erwarten, dieser Vorgang, und bei ziemlich weitgehender Reduction wurden überhaupt nicht mehr die normalen Werte von Spannung und Strom erreicht, da die im Vakuum vorhandene Sauerstoffmenge dann zur Verbrennung des Metalls nicht mehr ausreichte. Entsprechend dem energischen Verbrauch von Sauerstoff beim Uebergange von Gleichstrom zu Wechselstrom wurde das Vakuum dabei ganz erheblich verbessert, zumal wenn durch längeres Auspumpen bei Gleichstrombetrieb das Röhrensystem gehörig mit Sauerstoff ausgewaschen, der Stickstoff der Luft also weitgehend entfernt war. Dann war die Aufbesserung des Vakuums derart, daß sie bis zum besten Kathodenstrahlvakuum und zum völligen Verschwinden des übrigen Leuchtens im Entladungsrohr führte. Bei Rückkehr zum Gleichstrom trat sofort wieder die Verschlechterung des Vakuums ein. Diese Erscheinung ließ sich beliebig oft wiederholen. Allerdings muß erwähnt werden, daß die Lebensdauer des Stiftes im Vakuum durch die Reduktion schon sehr herabgesetzt wird und durch häufigen Wechsel von Gleich- und Wechselstrombetrieb wohl noch sehr viel mehr heruntergedrückt wird. Die beim Wechsel von Gleichstrom und alternirendem Strom beobachteten Erscheinungen werden durch Tab. IV und Taf. I der experimentellen Belege veranschaulicht.

Wenngleich es nicht möglich war, eine zahlenmäßige Angabe über die Dissociationsspannung der glühenden Oxyde zu gewinnen, so kann doch aus der Verbesserung des Vakuums, die beim Wechselstromglühen eines erheblichen reducirten Stiftes beobachtet wurde, gefolgert werden, daß selbst bei den höchsten erreichten Temperaturen die Sauerstoffspannung der Oxyde kleiner ist als dem Gasdruck des besten Kathodenstrahlvakuums entspricht. Nimmt man die schnelle Abnahme der Dissociationsspannung mit der Temperatur hinzu, so muß man bei gewöhnlichen Temperaturen zu ganz unvorstellbar kleinen Drucken gelangen.

Da sich schon durch systematisches Auspumpen der Sauerstoff

Digitized by Google

dem Stifte entziehen läßt, so stand zu erwarten, daß eine Reduktion durch Wasserstoffgas ebenfalls zu erzielen sein würde. Dies erschien mir besonders auch deshalb wahrscheinlich, weil Versuche, die von Alex. J. Wurts im Auftrage der Westinghouse-Gesellschaft angestellt wurden [1]), für einen Glühkörper in Sauerstoff eine ähnliche Charakteristik ergeben hatten, wie für einen Glühkörper im Vakuum. Es zeigte sich aber, daß in der Wasserstoffatmosphäre durchaus keine erhebliche Reduktion stattfindet, sondern daß der erhöhte Energieverbrauch einfach auf die vorzügliche Wärmeleitung der Wasserstoffatmosphäre zurückzuführen ist. Diese genügt auch völlig zur Erklärung für die von Wurts beobachtete Charakteristik der Glühkörper im Wasserstoff. Die in der Wasserstoffatmosphäre erhaltenen Resultate werden durch Tab. V der experimentellen Belege demonstrirt. Der dort angeführte Versuch zeigt deutlich, wie die Spuren Sauerstoff, welche als Verunreinigung des Wasserstoffgases mit in die Nähe des Stiftes gelangen, genügen, um die vorher im Vakuum erzielte Reduktion und die damit verbesserte Leitfähigkeit des Stiftes wieder zu verschlechtern. Es bleibt also nicht einmal die durchs Auspumpen erhaltene Widerstandsänderung erhalten. Wenn man nun auch durch Anwendung sehr reinen, d. h. in diesem Falle von Sauerstoff befreiten Wasserstoffs vielleicht erreichen könnte, daß die Leitfähigkeit des Stiftes erhalten bliebe, so ist doch aus den Resultaten genügend zu ersehen, daß jedenfalls ein Weitergehen der Reduktion vermöge der Wasserstoffatmosphäre nicht zu erwarten ist. Nach dem Gesetz der chemischen Massenwirkung gilt für die Wasserbildung aus Wasserstoff und Sauerstoff entsprechend der chemischen Umsetzung:

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

die Gleichgewichtsgleichung:

$$p_H^2 \cdot p_O = K \cdot p_{H_2O}^2 .$$

Daraus folgt, daß die Wasserbildung begünstigt wird durch große Werte von p_H und p_O sowie durch kleine Werte von p_{H_2O}. Trotzdem nun p_{H_2O} durch die im Rohrsystem vorhandene conc. Schwefelsäure sehr klein gehalten wird, so ist doch die Dissociationsspannung p_O des Oxydes so außerordentlich klein, und die Dissociationskonstante des Wasserdampfes bei den hohen Temperaturen schon so groß, daß selbst in einer Wasserstoffatmosphäre stets:

$$p_H^2 \cdot p_O < K p_{H_2O}^2 \text{ ist.}$$

1) Transactions of the Amer. Instit. of Elektrical Engineuers. Bund XVIII, 28. August 1901.

Digitized by Google

In bester Uebereinstimmung mit den durch Herabsetzung des Sauerstoffpartialdrucks beobachteten Erscheinungen steht die Thatsache, daß beim Brennen des Glühkörpers in komprimirtem Sauerstoff die polaren Erscheinungen stark verringert werden. Es findet an der Kathode eine sehr viel kleinere Dendritenbildung statt als in Luft. Bei gleicher Stromstärke ist daher der Widerstand und entsprechend der Spannungsverbrauch des Stiftes höher [vgl. Tabelle VI]. Diese Beobachtung bestätigt den von Wurts l. c. gefundenen Unterschied in der Glühkörpercharakteristik zwischen Luft und reinem Sauerstoff von Atmosphärendruck.

Ich komme jetzt zur Beschreibung einer Erscheinung, welche ich beim Untersuchen der Stifte im Vakuum zu beobachten Gelegenheit hatte. Dieselbe bestand im Auftreten eines dem Raum um den Glühkörper erfüllenden blauen Lichtes, das oft, namentlich bei ziemlich hoher Belastung des Stiftes, sehr intensiv war und dann auf das täuschendste den blauen, sonnenlichtdurchstrahlten Himmel imitirte. Die Erscheinung war bisweilen derart auffallend und schön, daß sie das Erstaunen und Entzücken aller Derjenigen erregte, welche dieselbe zu sehen Gelegenheit hatten. Ueber die Ursachen der Erscheinung kam ich erst durch die Versuche mit abwechselndem Gleichstrom- und Wechselstrombetrieb ins Klare. Zunächst hatte ich an ein Zerstäuben der Oxyde gedacht, kam aber von dieser Ansicht bald zurück, nachdem sich gezeigt hatte, daß ein mit Wechselstrom brennender Glühkörper überhaupt kein „Himmelsblau" zu geben vermag, und daß es ein mit Gleichstrom brennender Stift um so intensiver und schöner zeigt, je weitgehender er reducirt ist, d. h. je geringer sein Widerstand im Vergleich zu dessen Ursprünglichen Werte ist. Danach ist es also wahrscheinlich zerstäubendes Metall, welches im Vakuum verbrennt und dabei die Erscheinung hervorruft. Hiermit steht im Einklang, daß beim plötzlichen Uebergang von Gleichstrom zu Wechselstrombetrieb das „Himmelsblau" verschwindet, nachdem es zuvor, offenbar durch die eintretende Verbesserung des Vakuums begünstigt, einige Augenblicke besonders intensiv aufgetreten war.

Aus dem Umstande, daß das „Himmelsblau" schließlich verschwindet, ehe noch alles Metall verbraucht ist, d. h. wenn der Stift auch mit Wechselstrom unter erheblich verringertem Widerstande brennt, läßt sich schließen, daß das Vorhandensein von Sauerstoff erforderlich ist, daß also das künstliche Himmelsblau nicht von Metallstäubchen, sondern von verbrannten Metallstäubchen herrührt. Dementsprechend tritt die Erscheinung auch sofort nach dem Umschalten auf Wechselstrombetrieb, also in dem Augen-

Digitized by Google

blick, wenn die Verbrennung des Metalls am raschesten erfolgt, besonders schön und auffallend auf. Die Erklärung der Erscheinung ist jedenfalls die gleiche, wie sie für das Blau des Himmels von Lord Rayleigh gegeben ist, nämlich das Vorhandensein kleiner Teilchen von der Größenordnung der Lichtwellenlängen, an welchen die kürzeren Wellen bezüglich der Reflexion erheblich bevorzugt sind. Daß das „Himmelblau" in dem vorliegenden Falle so besonders schön auftritt, hängt ohne Zweifel damit zusammen, daß in dem engen Raum von ca. 300—400 ccm um den Stift die Dichte der Staubteilchen ziemlich groß und auch die Strahlungsdichte sehr erheblich ist.

Den Ausgang hatten die Versuche ursprünglich von einer ganz anderen Fragestellung ausgenommen. Es hatte nämlich die Frage entschieden werden sollen, ob ein elektrolytischer Leiter, wie der Glühkörper, im Stande ist, Kathodenstrahlen auszusenden. Natürlich gelangte diese Frage keineswegs zur Entscheidung, denn wohl ließen sich von dem im Vakuum glühenden Stift sehr schöne Kathodenstrahlen erhalten, aber wie wir jetzt wissen, ist ein mit Gleichstrom im Vakuum brennender Elektrolytkörper kein reiner Elektrolyt mehr, sondern besitzt einen beträchtlichen metallischen Nebenschluß. Das Auftreten der Kathodenstrahlen bildet dann aber durchaus nichts auffallendes. Selbst wenn man den Glühkörper mit Wechselstrom brennen und gleichzeitig zur Entladungskathode machen würde, so könnte auch dann noch das Auftreten von Kathodenstrahlen nicht als einwandfreier Beweis für die Möglichkeit gelten, daß solche von Elektrolyten auszugehen vermögen, sondern es ist zu berücksichtigen, daß auch bei Wechselstrombetrieb an den Polen des Glühkörpers wohl teilweise Reduktion auftritt, die sich wohl nur bei sehr hoher Frequenz des Wechselstromes völlig vermeiden ließe.

Im Anschluß an diese Kathodenstrahlbeobachtungen glaube ich schließlich noch einige Versuche nicht unerwähnt lassen zu wollen, welche Gasströme zwischen einem Elektrolytglühkörper einerseits und einer Metallelektrode andererseits betreffen, sowie Ströme, die zwischen zwei Metallelektroden in der Nähe eines Stiftes im durchstrahlten Vakuum beobachtet wurden. Es zeigte sich, daß ganz analoge Verhältnisse hier vorliegen, wie sie von J. Stark[1]) an Glühlampen beobachtet sind. Bei Entfernungen von mehr als 10 cm konnten zwischen den Glühkörper und einer

1) J. Stark, Wied. Ann. 68, 919—948, 1899.

Digitized by Google

anderen Elektrode Ströme von ca. 10^{-4} Ampère beobachtet werden. Zwischen zwei Metallelektroden, deren jede auch noch mehrere Centimeter vom Stift entfernt war, lieferte die Spannung von einem Clarke-Element trotz ca. 5 cm Elektrodenabstand schon Ströme von ca. 10^{-6} Ampère. Eingehendere Versuche hätten hier zu weit vom eigentlichen Gegenstande abgeführt, doch soll noch erwähnt werden, daß das Auftreten des künstlichen „Himmelsblaus" die Gasströme von einem Stift aus sehr verstärkte. Die Vermutung, daß eine elektrostatische Ladung der zerstäubten Teilchen die Zunahme des Stromes bedinge, erwies sich bei der Durchrechnung als unmöglich; der Effekt wird daher wohl einmal auf die Bevorzugung der kurzwelligen Strahlen bei der Reflexion an den Staubteilchen zurückzuführen sein, vermöge deren die Leitfähigkeit des Gasraumes vergrößert wurde, anderenteils aber wohl auf eine durch die Lichtabsorption der Staubteilchen erhöhte Durchschnittstemperatur und so indirekt vergrößerte Leitfähigkeit des durchstrahlten Raumes.

Digitized by Google

Tabelle I. Glühkörper mit Gleichstrom gebrannt im Vakuum.

Luftdruck, bez. anderweitige Charakterisirung des Vakuums	Stromstärke in Ampère	Spannung in Volt	Energieverbrauch Watt	Widerstand in Ohm	Kerzenstärke	Watt pro Kerze	Leitfähigkeitsverbesserung	Bemerkungen
	i.	e.	$e.i.$	$\frac{e.}{i.} = w$	n	$\frac{e.i.}{n}$	$\frac{w'}{w}$	
1 Atm.	0,37	143,5	53	388	5,5	9,6	1,00	w' Widerstaud bei 1 Atm.
	0,49	154,5	76	315 w'	18	4,2	1,00	
	0,60	163	98	272	37	2,65	1,00	
13 mm	0,50	145	72,5	290	6	12,—	1,34	
	0,65	153	99	235	18	5,5	1,34	
	0,83	157	130	189	38	3,4	1,44	
1 mm	0,57	131,5	75	230	6	12,5	1,69	
	0,72	138	99,5	192	18	5,5	1,64	
	0,87	140	122	161	38	3,2	1,69	
etwas besseres Vakuum	0,76	119	68	157	6	11,4	2,47	
	0,91	120	109	132	18	6,0	2,39	
	1,04	119	123	114	35	3,5	2,38	
Beginn der Fluorescenz	0,81	103	87	127	6	14,5	3,06	
	0,99	102	101	103	18	5,6	3,06	
	1,13	102	115	90,5	38	3,0	3,01	
gute Fluorescenz	0,94	90	85	96	6	14,2	4,05	Glühkörper zeigt schönes Himmelsblau.
	1,14	92	105	81	19	5,5	3,9	
	1,25	91	114	73	37	3,1	3,7	
sehr gute Fluor.	1,03	84	87	82	6	14,5	4,7	
	1,25	85,5	107	68	18	5,9	4,6	
	1,42	85	121	60	37	3,3	4,5	
Trotz fortgesetzten Pumpens keine erhebliche Verbesserung des Vakuums.	1,10	76	84	69	6	14,—	5,6	
	1,29	78	101	61	18	5,6	5,2	
	1,43	79	113	55	36	3,1	4,9	
	1,18	69,5	82	59	6	13,7	6,6	
	1,46	73,5	95	50	19	5,0	6,3	
	1,70	76	129	45	38	3,4	6,0	Trotz Gleichbleiben des Vakuums steigt die Leitfähigkeit noch auf mehr als das Doppelte.
	1,28$_5$	66,5	86	52	6	14,4	7,5	
	1,51	68,5	104	45	19	5,5	7,0	
	1,89	74	140	39	37	3,8	7,0	
	1,33	62,5	86	47	6	14,4	8,3	
	1,60	65	104	41	17	6,1	7,7	
	2,02	71	143	35	36	4,0	7,8	
	1,52	59	90	39	5,5	16,4	10,0	
	1,86	61	113	33	18	6,3	9,6	
	2,25	66,5	152	29	35	4,3	9,4	
	1,78	56	83	38	6	13,9	10,2	
	1,89	60	113	32	16	7,1	9,9	
	2,45	63	154	26	38	4,1	10,4	

Digitized by Google

Tabelle II. Glühkörper mit Gleichstrom brennend im Vakuum.

Luftdruck, bez. andere Charakterisirung des Vakuums	Stromstärke in Ampère	Spannung in Volt	Energieverbrauch in Watt	Widerstand in Ohm	Kerzenstärke	Watt pro Kerze	Leitfähigkeitsverbesserung	Bemerkungen
	i	e	$e.i.$	$\frac{e.}{i.} = w$	n	$\frac{e.i.}{n}$	$\frac{w'}{w}$	
1 Atm.	0,35	133	46,5	w' 379	6,2	7,5	1,00	
	0,48	145,5	70,—	303	20,5	3,4	1,00	
	0,60	156	93,5	260	40,5	2,3	1,00	
15 mm	$0,42_5$	133	56,5	313	6,2	9,1	1,21	
	0,61	146	89	239	17,5	5,1	1,27	
	$0,78_5$	151	118	192	37,5	3,15	1,36	
ca. 1 mm	0,47	118	55,5	251	6,2	8,9	1,51	
	0,70	129	90,5	184	19,5	4,6	1,65	
	0,93	132	123	142	40,5	3,05	1,83	
etwas besseres Vakuum	0,72	101	72,5	140	6,2	11,6	2,72	
	0,97	100	97	103	18,5	5,2	2,94	
	1,19	102	121,5	85,5	42,—	2,9	3,04	
noch besser	0,90	66	59,5	73,5	6,2	9,6	5,16	
	$1,19_5$	73	87,5	61,—	18,5	4,7	4,96	
	1,36	70,5	96,—	52,—	36,5	2,6	5,0	
Beginn der großen Fluorescenz des Glases	1.14	61	69,5	53,5	5,7	12,2	7,1	
	1,31	66	86,5	50	18,—	4,8	6,1	Stift giebt kein Himmelsblau.
	1,60	70	112	44	33	3,4	5,9	
gute Fluoresc.	1.31	57,5	75,5	44,—	5,3	14,2	8,6	
	$1,53_5$	61,5	96,5	40,—	15,5	6,2	7,6	
	1,72	65	112	37,5	32,—	3,5	6,9	
bessere „	1,44	56	80,5	38,9	5,3	15,2	9,7	
	1,70	59	100,5	34,8	18,0	5,6	8,7	
	2,18	63,5	139	29,1	35,—	4,0	8,9	
sehr gute „	1,50	58	87	38,7	5,3	16,5	9,8	
	1,72	57,5	99	33,5	17,—	5,8	9,1	
	2,27	60	136	26,5	35,—	3,9	9,8	
Das Vakuum wird nicht mehr merklich besser.	1,53	52	79,5	34,0	5,1	15,5	11,2	
	1,88	56	100	29,8	16,5	6,1	10,1	
	2,35	59	139	25,1	32,—	4,3	10,4	
	1,59	53	84	33,4	5,3	16,—	11,4	
	1,91	56	107	29,4	17,—	6,3	10,3	
	2,22	58	129	26,2	34,—	3,8	10,0	
	1,52	48	73	31,6	5,3	13,8	12,—	
	1,90	53	101	27,9	17,—	5,9	10,9	
	2,31	55	127	23,9	33,5	3,8	10,9	

Digitized by Google

Tabelle III. Glühkörper mit Wechselstrom brennend im Vakuum.

Luftdruck oder anderweitige Charakterisirung des Vakuums	Stromstärke in Ampère	Spannung in Volt	Energieverbrauch in Watt	Widerstand in Ohm	Kerzenstärke	Watt pro Kerze	Leitfähigkeitsverbesserung	Bemerkungen
	i	e	$e.i.$	$\frac{e}{i}=w$	n	$\frac{e.i.}{n}$	$\frac{w'}{w}$	
1 Atm.	0,36	140	50,5	387	7	7,2	1,00	
	0,53	162	86	305	17,5	4,9	1,00	
	0,74	173	128	234	39	3,3	1,00	
ca. 10 mm	0,40	155	62	387	8,5	7,3	1,00	
	0,59	170	101	288	26,5	4,9	1,06	
	0,81	173	140	214	42	3,3	1,09	
etwa 1 mm	0,41	157	64	383	8,5	7,5	1,01	
	0,59	168,5	99	286	20,5	4,8	1,07	
	0,79	170	135	215	43	3,15	1,09	
Beginn der Fluorescenz	0,42	157	66	374	8,5	7,7	1,04	
	0,57	166	95	291	20,5	4,6	1,05	
	0,73	167	122	228	44	2,8		
etwas bessere Fluorescenz	0,40	153	61	382	9	6,8	1,02	
	0,55	164	91	299	20	4,5	1,02	
	0,76	166	126	218	44	2,9	1,03	
gute Fluoresc.	0,40	154	62	385	8,5	7,3	1,01	Der Glühkörper giebt keine Spur von Himmelsblau.
	0,61	166	101	272	20,5	4,9	1,12	
	0,86	163	140	190	45	3,1	1,23	
sehr gute „	0,41	155	64	378	8,5	7,5	1,03	
	0,58	165	97	283	18	5,4	1,08	
	0,77	165	127	214	38	3,3	1,09	
„ „ „	0,40	155	62	386	8,5	7,3	1,00	
	0,60	165	99	276	19,5	5,1	1,11	
	0,89	160	142	180	37	3,4	1,30	
vorzügliche „	0,41	155	64	378	8,5	7,5	1,03	
	0,60	165	99	275	19,5	5,1	1,11	
	0,89	160	142	180	41	5,5	1,30	
„ „	0,42	157	66	374	8	8,2	1,04	
	0,57	164	94	288	18	5,2	1,06	
	0,86	161	138	187	37	3,7	1,25	
„ „	0,40	154	62	384	7,5	8,3	1,01	
	0,59	164	97	278	19,5	5,0	1,10	
	0,90	158	142	176	40	3,6	1,33	
„ „	0,40	151	61	377	8,5	7,2	1,03	
	0,59	164	96	277	19,5	4,9	1,10	
	0,90	158	142	176	40	3,6	1,33	

Digitized by Google

Tabelle IV. Elektrolytglühkörper, mit konstanter Lichtstärke 18—19 Kerzen im Vakuum abwechselnd mit Gleichstrom und Wechselstrom gespeist.

Zeitangabe		Stromstärke in Ampère	Spannung in Volt	Energieverbrauch in Watt	Widerstand in Ohm	Vakuum	Bemerkungen.
		i	e	$e.i$	$\frac{e}{i}=w$		
		0,46	161	64,4	402	1 Atmosph. n. läng. Wechselstrombr. im letzten Vakuum	Gleichstrom an freier Luft.
		0,57	170,5	98	301		
3h 35	Nm.	0,52	170	88,4	327		Gleichstrom.
36		0,66	158	104	239		
37		0,71	152	108	214		
„	30s	0,79	150	119	190		
39		0,85	149	127	175	ca. 1 mm Hg.	
41		0,90	148,5	149	165		
44	15						Wechselstrom.
45		0,53	173	91,7	326		
53	30	0,52$_5$	175	92	333		
55	0						Gleichstrom.
„	30	0,70	145,5	102	208	Beginn der Fluorescenz.	
57		0,83	144	119	174		
59	30	0,85	141,5	121	167		
4h 0	0						Wechselstrom.
1		0,55	171	94	311		
7	30	0,52	170	88,5	327	gute Fluorescenz	
8	30	0,52	170	88,5	327		
9	0						Gleichstrom.
9	30	0,89	139	124	156	Vakuum wird bei Gleichstrom schlechter, Fluorescenz fast fort.	
10	30	0,95	132	125	139		
11	40	1,07	121	129	113		
12							Wechselstrom.
„	45	0,60	170	102	283	Vakuum schon wieder gut.	
17	30	0,57	171	97	300		
18	0						Gleichstrom.
19	0	0,91	131	119	144	Vakuum verschlechtert, jetzt gepumpt.	Himmelsblau tritt schwach auf.
21	20	1,10	111	122	101		
24	55	1,21	107	128	88		
25	0						Wechselstrom, Himmelsbl. verschwind. schnell.
25	30	0,60	169	102	282	sehr gute Fluorescenz.	
27	30	0,58	171	99	295		
28	0						Gleichstrom.
29	30	0,95	129	123	136	Vakuum stark verschlechtert, Auspumpen bis zu guter Fluorescenz.	
36	30	1,02	122,5	125	120		
41	15	1,10	116	128	105		
44	0						Wechselstrom.
46	0	0,68	157	107	231	Vakuum brillant, Vergleichsrohr zeigt nur noch Glasfluor.	
48	0	0,58	167	95	288		

Digitized by Google

Tabelle IV. (Fortsetzung).

Zeitangabe	Stromstärke in Ampère	Spannung in Volt	Energieverbrauch in Watt	Widerstand in Ohm	Vakuum	Bemerkungen
	i	e	$e.i$	$\frac{e}{i}=w$		
48 20						Gleichstrom,
49 40	1,02	120	122	117	Vakuum sofort schlechter, durch	Stromstärke geht i. wenig Sekunden
56 0	1,28	99,5	127	78	Pumpen verbessert.	auf 1 Ampère. Himmelsblau tritt auf.
5h 1 0s						Wechselstrom.
2 30	0,77	150	116	195	Brillantes Vakuum.	Himmelsblau nimmt rasch ab, n. 10 Sek. verschw.
am nächsten Morgen						
10h 7	0,41	166	68	405	in freier Luft	Gleichstrom.
10h 49 30	1,24	104	129	84	und bis zu guter Fluor. ausgepumpt.	Der Stift ist beim Brennen a. d. Luft wieder schön weiß geworden. Jetzt i. Vak. gebr.
50 0						Wechselstrom,
„ 35	0,82	137	112	167		Vakuum wird dadurch sehr verb.
52 30	0,72	149	107	207	Brillante Fluoresc.	
55 45	0,70	154,5	108	220		
59 30	0,64	166,5	107	261		
11 0 0						Gleichstr., Vak.
6 20	1,37	84	115	61,4	fortwährend ausgep. bis zum Umschalten.	wird schnell erhebl. schlechter. Himmelsblau deutlich
11 17 0′						Wechselstrom,
18 5	0,92	134	123	146	Brillantes Vakuum.	Himmelsbl. kurze
22 0	0,77	154,5	119	202		Zeit sehr verstärkt n. $^1/_2$ Min.
28 0	0,70	166,5	117	238		völl. verschwund.
31 30	0,71	167	118	236		
32 0						Gleichstrom.
40	1,24	100	124	81	Vakuum stark verschlechtert.	Himmelsblau sehr schön.
43 30	1,51	76	115	50,5		Wechselstram.
46 50						Himmelsbl. zun.
48 20	1,09	130	141	119	Vakuum vorzüglich.	einige Augenbl. äuß. prächtig n.
55	0,88	151,5	133	172		etwa 2 Min. ganz
12 0	0,87	157	137	181		verschwunden.
4 55	0,84	159	134	189		
5						
10	1,55	109	70	45,2	Vakuum sofort verschlechtert, gepumpt.	Gleichstrom, Himmelsblau fast sofort wieder auftretend.

Bald darauf zersprang der Stift, dessen Strom beim Pumpen nicht genügend überwacht werden konnte.

Digitized by Google

Tabelle V. Glühkörper in Wasserstoff und Vakuum.

Zeitangabe	Stromstärke in Ampère	Spannung in Volt	Energieverbrauch in Watt	Widerstand in Ohm	Gasdruck	Bemerkungen
	i	e	$e.i$	$\frac{e}{i}=w$		
$3^h 10'$	0,64	177	113	276	Schnell ausgepumpt bis zum Beginn der Fluorescenz.	
	0,68	191	130	281	1 cm Wasserstoff.	Erhöhter Energieverbrauch wegen d. guten Wärmeleitfähigkeit des Wasserstoffs.
	0,60	177	106	295	beginnende Fluor.	
	0,60	174	104,5	290		
	0,73	191	139	262	1 cm Wasserstoff	Wechselstrom.
	0,74	191	141	258	5 „ „	
	0,79	190	150	244	10 „ „	
					wieder evakuirt	
	0,64	177	113	276		
	0,625	176	110	282	mäßiges Vakuum	von $4^h 16^m$ ab Gleichstrom bis zum Ende des Versuchs.
$4^h 15^m 30^s$	0,62	175_5	109	283		
17	0,84	143	120	171	immer gepumpt	
18 20	0,895	139	124	165	Beginn d. Fluoresc.	Wiederstand fällt sofort.
20					Wasserst. zugelassen	Wiederstand größer als im Vakuum.
21	0,73	178	130	244	1 cm Wasserstoff	
23 30	0,80	182	146	227	10 „ „	
31 30	0,69	185	128	268	10 „ „	
35 10	0,71	179	127	252	1 „ „	
52 30	0,80	183	146	229	10 „ „	
					wieder ausgepumpt.	Widerstand wieder klein.
$5^h 12$	0,94	126	119	134		
21	0,99	121	120	122		
26	1,06	117	124	110		
					wieder Wasserstoff eingelassen	Widerstand wieder groß
29 30	0,77	174_5	134	227	wieder ausgepumpt	Widerstand wieder klein
$5^h 43$	1,12	131	146	117	Beginn der Fluoresc.	
	1,25	119	148	95,5		
54	1,32	113	149	86	gute Fluorescenz.	
	1,36	108	147	79,5		

Digitized by Google

Tabelle VI.

Stromstärke in Ampère	Die Spannungen des Stiftes			
	in Luft von 1 Atmosphäre	in Sauerstoff von 6 Atmosphären	wieder in Luft	wieder in Sauerstoff von 6 Atmosphären
0,200	95,5	103	95,5	103
0,300	100,5	108	100,0	108
0,350	101,5	107,5	101,5	107,5
0,400	100,0	107,5	100,5	106,5

Digitized by Google

Dynamik des Electrons.

Von

M. Abraham.

Vorgelegt von Herrn W. Voigt in der Sitzung vom 11. Januar 1902.

§ 1. Einleitung.

Die sogenannte „Electronentheorie“ ist allen anderen Theorieen der Electrodynamik insofern überlegen, als sie nicht nur die Lichtstrahlung in bewegten Körpern [1]), sondern auch die Kathodenstrahlung [2]) umfaßt. Diese Theorie sieht bekanntlich für den Aether die Maxwell-Hertz'schen Grundgleichungen als giltig an; die Mitwirkung der Materie bei den Strahlungsvorgängen wird der Bewegung der Electronen zugeschrieben. Für die Bewegung des Electrons wiederum ist insbesondere, wenn nicht ausschließlich, sein electromagnetisches Feld bestimmend. So werden die Differentialgleichungen des electromagnetischen Feldes maaßgebend für die Dynamik des Electrons, und somit auch für die Mechanik der aus Electronen zusammengesetzten Materie. Auf die hier sich bietende Möglichkeit, die Mechanik electromagnetisch zu begründen, hat Herr W. Wien hingewiesen [3]). Er hebt hervor, daß die träge Masse, die in der gewöhnlichen Mechanik als constant angesehen wird, bei steigender Geschwindigkeit zu einer variabeln Größe wird. Solche Geschwindigkeiten materieller Teilchen, die nicht weit

---

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895.

2) E. Wiechert, Gött. Nachr. 1898 p. 87.

3) W. Wien, Arch. Néerl. (2). 5. p. 96—104. 1900. Vgl. auch H. A. Lorentz, Phys. Zeitschr. 2. p. 78. 1900.

Digitized by Google

hinter der Lichtgeschwindigkeit zurückbleiben, kommen nur bei den freien negativen Electronen vor, deren Bewegung die Kathoden- und Becquerel-Strahlung ausmacht. Die höchst interessanten experimentellen Untersuchungen des Herrn W. Kaufmann über die magnetische und electrische Ablenkbarkeit der Becqueralstrahlen[1]) haben nun in der That eine Abhängigkeit der Trägheit der Electronen von der Geschwindigkeit ergeben. Ist es möglich, diese Abhängigkeit quantitativ aus den Differentialgleichungen des electromagnetischen Feldes abzuleiten? Ist die Trägheit des Electrons vollständig durch die dynamische Wirkung seines electromagnetischen Feldes zu erklären, ohne eine von der electrischen Ladung unabhängige Masse zur Hilfe zu nehmen? Nur wenn diese Fragen bejahend beantwortet werden, ist die Möglichkeit einer rein electromagnetischen Begründung der Mechanik anzuerkennen. Herr W. Kaufmann erörtert jene Fragen am Schlusse seiner Mitteilung. Es scheinen indessen die Vorarbeiten von der theoretischen Seite, auf welche die Discussion sich stützt, keineswegs ausreichend zu sein. Die Arbeiten der Herren W. B. Morton[2]) und G. F. C. Searle[3]) beschäftigen sich mit der Ermittelung des Feldes und der Feldenergie gleichförmig bewegter, electrisch geladener Leiter von ellipsoïdischer Form. Die Dynamik des Electrons verlangt eine wesentliche Ergänzung dieser Untersuchungen. Die Kenntnis der Feldenergie gestattet nur, die „longitudinale Masse“ zu berechnen, d. h. diejenige Trägheit, welche sich einer Beschleunigung in der Bewegungsrichtung widersetzt. Die „transversale Masse“, die bei Beschleunigung senkrecht zur Bahnrichtung in Betracht kommt, bleibt hierbei unbestimmt, da eine solche Beschleunigung die Energie nicht ändert. Wir werden auch die transversale Masse berechnen; es geschieht dieses, indem, neben der electromagnetischen Energie, der Vector der „electromagnetischen Bewegungsgröße“ eingeführt wird. Dadurch wird es gleichzeitig ermöglicht, die Berechnung der Energie und der longitudinalen Masse erheblich zu vereinfachen. Endlich wird zwischen den Werten, welche alle diese Größen im Falle der Flächenladung und im Falle gleichförmiger Volumladung dreiaxiger Ellipsoïde besitzen, eine einfache Beziehung als giltig erkannt. Für das als kugelförmig

1) W. Kaufmann, Göttinger Nachrichten 1901, Heft 2.

2) W. B. Morton, Phil. Mag. 41 p. 488.

3) G. F. C. Searle, Phil. Trans. 187 A (1896) p. 675—713. Phil. Mag. 44 (1897) p. 329—341.

Digitized by Google

betrachtete Electron werden die betreffenden Formeln abgeleitet und mit den experimentellen Resultaten verglichen.

§ 2. Problemstellung.

Bewegt sich ein Electron, von der Ladung e (electrostatisch gemessen) im electromagnetischen Felde, so wirkt, nach der Grundhypothese der Electronentheorie, auf dasselbe die Kraft

$$1) \qquad \mathfrak{K} = e\left\{\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{q}}{c}, \mathfrak{H}\right]\right\}.$$

Der Vector, mit dem die Ladung e hier zu multiplicieren ist, entsteht durch geometrische Addition zweier Vectoren; der erste ist die electrische Feldstärke ($\mathfrak{E}$), der zweite ist das äußere (vectorielle) Product[1]) des durch die Lichtgeschwindigkeit dividirten Geschwindigkeitsvectors ($\mathfrak{q}$) und der magnetischen Kraft ($\mathfrak{H}$).

Welche Beschleunigung erteilt die Kraft $\mathfrak{K}$ dem Electron? Das ist die Frage, die uns weiterhin beschäftigen soll. Nehmen wir zunächst noch materielle (wahre) Masse (M) des Electrons als vorhanden an, d. h. eine Trägheit, die ihm als materiellem Teilchen, ohne Berücksichtigung der electrischen Ladung zukommt. Dann gilt, nach D'Alembert's Princip

$$2) \qquad -M\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{K} = 0.$$

Die Kraft $\mathfrak{K}$ ist durch Gleichung (1) bestimmt; allein es genügt nicht, bei der Berechnung derselben die Feldstärken des äußeren, etwa von Electromagneten oder electrostatischen Ladungen erzeugten Feldes in Ansatz zu bringen. Vielmehr ist zu beachten, daß das Electron selbst das Feld modificiert, daß mithin die Feldstärken ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$) von der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Electrons abhängige Glieder enthalten; strenge genommen, gehen sogar die höheren Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit ein. Geht man darauf aus, diese Glieder zu berechnen, so erwächst zunächst die Aufgabe, das Feld eines ungleichförmig bewegten Electrons zu ermitteln; das Electron wäre hierbei nicht als Punctladung, sondern als räumlich ausgedehnt anzunehmen, denn eine Punctladung würde einen unendlichen Energievorrat darstellen. Alsdann wäre der Gl. (1) entsprechend, die auf das

1) In Betreff der hier gebrauchten Begriffe und Symbole der Vectoranalysis vergleiche man: M. Abraham, Encycl. d. mathem. Wissensch. Bd. IV. Art. 14.

Digitized by Google

Volumelement (dv) des Electron wirkende Kraft

$$\varrho\, dv \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{q}}{c}, \mathfrak{H} \right] \right\}$$

zu berechnen; die Integration über das ganze Volumen würde die resultierende Kraft ergeben, die das Electron auf sich selbst ausübt, und die sich einer Geschwindigkeitsänderung entgegenstellt. Auf diesem Wege würde man zu einer vollkommen strengen Dynamik des Electrons gelangen. Allein dieser Weg erscheint bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie als ungangbar; schon die Berechnung des Feldes eines ungleichförmig bewegten Electrons ist äußerst compliciert.

Die im Folgenden zu entwickelnde Dynamik des Electrons beschränkt sich von vorne herein auf solche Bewegungen, bei denen die Geschwindigkeitsänderungen langsam erfolgen; sie setzt nur die Kenntnis des Feldes eines gleichförmig bewegten Electrons voraus. Unsere Theorie ist zu vergleichen mit derjenigen Theorie der Wechselströme, welche den Strom als quasistationär betrachtet, d. h. den aus der magnetischen Energie des Gleichstromes definierten Wert der Selbstinduction auch für zeitlich variable Stromstärken als maaßgebend ansieht. Wie diese Voraussetzung bei hochfrequenten, Hertz'schen Schwingungen unzulässig wird, so wird auch die im folgenden darzulegende Theorie bei sehr rapiden Geschwindigkeitsänderungen der Correctur bedürfen. Das wird insbesondere dann der Fall sein, wenn die Geschwindigkeit des Electrons der Lichtgeschwindigkeit sehr nahe kommt. In der That, je geringer die Differenz zwischen Lichtgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit des Electrons ist, eine um so längere Zeit wird die Herstellung des stationären Feldes in Anspruch nehmen, da das Electron den von ihm in der Bewegungsrichtung ausgesandten Störungen nacheilt, und ihnen nur einen geringen Vorsprung läßt. Auf die interessanten Probleme, welche der Dynamik des Electrons bei Erreichung und Ueberschreitung der Lichtgeschwindigkeit erwachsen[1]), soll indessen hier nicht eingegangen werden; wir setzen Geschwindigkeiten voraus, die unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen.

Das Feld soll weiterhin als quasistationär angenommen werden, d. h. es soll bestimmt sein durch Angabe der momentanen Geschwindigkeit des Electrons; es wird übrigens abhängen von der Form des Electrons, und von der Art, wie die

1) vgl. Th. Des Coudres, Arch. Néerl. (2) 5. p. 652—664. 1900.

Digitized by Google

Ladung über sein Volumen, bezw. seine Oberfläche, verteilt ist. Die Kraft $\mathfrak{K}$ bestimmen wir durch das äußere, etwa von Electromagneten oder ruhenden electrischen Ladungen erzeugte Feld. Die soeben erwähnte, vom Electron auf sich selbst ausgeübte Kraft führen wir in die Bewegungsgleichung ein, indem wir diese schreiben

$$3) \qquad (M+m)\frac{dq}{dt} = \mathfrak{K}.$$

Neben der „materiellen" Masse (M) nehmen wir „electromagnetische" Masse[1]) (m) als vorhanden an, die wir eben durch Gl. (3) definieren. Es wird sich herausstellen, daß die electromagnetische Masse von dem Betrage und der Richtung der Geschwindigkeit abhängt. Die Ermittelung dieser Abhängigkeit ist das Ziel der weiteren Entwickelungen.

§ 3. Electromagnetische Energie und electromagnetische Bewegungsgröße.

Will man auf Grund der Kenntnis des Feldes, welches gleichförmiger Electronenbewegung entspricht, die electromagnetische Masse berechnen, so muß man darauf ausgehen, aus den Feldgleichungen Integrale der Bewegungsgleichungen abzuleiten, d. h. solche Relationen, die nur die Geschwindigkeit, aber nicht die Beschleunigung enthalten. In der Dynamik der gewöhnlichen, von electrischen Ladungen freien, materiellen Systeme gelten, als wichtigste Integralprincipe, das Energieprincip und der Schwerpunctsatz. Das Energieprincip besagt, daß die mechanische Energie eines Systems, der Schwerpunctsatz, daß der Vector der Bewegungsgröße nur durch Einwirkung äußerer Kräfte Aenderungen erfährt. Lassen sich diese Sätze auch auf solche Massensysteme übertragen, die electrische Ladungen mitführen? Zunächst ist dieses nicht der Fall; die von den Wechselwirkungen der electrischen Ladungen herrührenden inneren Kräfte leisten im allgemeinen bei einer Bewegung positive oder negative Arbeit, die eine Zunahme oder Abnahme der mechanischen Energie bedingt. Doch kann man bekanntlich das Energieprincip aufrecht erhalten, wenn man dem electromagnetischen Felde eine bestimmte Energie

$$4) \qquad W = W_0 + W_m$$

1) Die vielfach gebräuchlichen Bezeichnungen „scheinbare" und „wahre" Masse dürften verwirrend wirken. Die „scheinbare" Masse ist in mechanischem Sinne wahr, die „wahre" Masse hingegen ist wahrscheinlich unwahr.

Digitized by Google

zuschreibt, deren electrischer und magnetischer Bestandteil durch die über das ganze Feld erstreckten Integrale bestimmt sind:

4a) $$W_e = \iiint \frac{dv}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2,$$

4b) $$W_m = \iiint \frac{dv}{8\pi} \cdot \mathfrak{H}^2.$$

Die Abnahme der electromagnetischen Energie compensiert die von den inneren Kräften geleistete Arbeit. Mithin lautet das verallgemeinerte Energieprincip: Die Zunahme der Summe der mechanischen und der electromagnetischen Energie pro Zeiteinheit ist der Arbeit der äußeren Kräfte gleich [1]):

5) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{Mq^2}{2} + W\right) = \mathfrak{K}_e \cdot q$$

{q = Betrag der Geschw., $\mathfrak{K}_e$ = Comp. der äußeren Kraft in Richtung der Geschw.}

Aehnlich, wie das Energieprincip, verhält sich der Schwerpunctsatz. Die mechanische Bewegungsgröße eines mit electrischen Ladungen behafteten Systems wird im allgemeinen durch innere Kräfte verändert; denn die ponderomotorischen Kräfte, welche die Ladungen auf einander ausüben, genügen keinesweg dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Die Stellung der Lorentz'schen Theorie zum dritten Axiome Newton's discutierte besonders eingehend Herr H. Poincaré [2]); er betonte, daß der Satz der Erhaltung der Bewegungsgröße seine Giltigkeit bewahrt, wenn dem electromagnetischen Felde eine bestimmte Bewegungsgröße zugeschrieben wird. Diese „electromagnetische Bewegungsgröße ($\mathfrak{G}$) wird, nach Richtung und Betrag, durch das über das ganze Feld erstreckte Integral bestimmt

6) $$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2} \cdot \iiint dv\, \mathfrak{S},$$

wo

6a) $$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}].$$

den Poynting'schen Strahlvector darstellt. In der That, aus der Lorentz'schen Theorie folgt [3]), daß der von den inneren Kräften

1) Daß der Ansatz (1) für die ponderomotorische Kraft dem verallgemeinerten Energiegesetz genügt, beweist H. A. Lorentz, l. c. pag. 22.

2) H. Poincaré, Arch. Néerl. (2) 5 p. 252—278. 1900.

3) Dies besagt die Gleichung (15) auf pag. 26 des citierten Buches von H. A. Lorentz.

Digitized by Google

erzeugte Impuls durch die gleichzeitig stattfindende Abnahme der electromagnetischen Bewegungsgröße compensiert wird, falls die auf die Grenzfläche des Raumes v von den Maxwell'schen Spannungen ausgeübte Kraft verschwindet; bei quasistationärer Electronenbewegung ist diese Bedingung erfüllt, wenn das Volumintegral der Gl. (6) über den ganzen Raum erstreckt wird. Mithin lautet der verallgemeinerte Schwerpunctsatz: Die Zunahme, welche der resultierende Vector der mechanischen und der electromagnetischen Bewegungsgröße in der Zeiteinheit erfährt, ist der äußeren Kraft gleich

$$7) \qquad \frac{d}{dt}(Mq + \mathfrak{G}) = \mathfrak{K}.$$

Wie berechnet man, auf Grund der beiden Integralprincipe, die electromagnetische Masse? Die Energie des Feldes hängt, da wir das Feld des Electrons als durch seine Geschwindigkeit bestimmt ansehen, nur von dem Betrage q derselben ab. Mithin ergiebt (5):

$$\left(Mq + \frac{dW}{dq}\right)\frac{dq}{dt} = \mathfrak{K}_s \cdot q.$$

Andrerseits ergiebt die Bewegungsgleichung (3), angewandt auf Beschleunigung in der Bahnrichtung (s)

$$(M + m_s)\frac{dq}{dt} = \mathfrak{K}_s.$$

Es folgt somit als Wert der „longitudinalen Masse m_s", die bei Beschleunigung in der Bewegungsrichtung in Betracht kommt.

$$8) \qquad m_s = \frac{1}{q}\frac{dW}{dq}.$$

Diese Formel für die longitudinale Masse stimmt mit der Kaufmann'schen[1]) überein; sie ergiebt indessen nur diejenige Trägheit, welche sich einer Beschleunigung in der Bewegungsrichtung entgegenstellt. Beschleunigung senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit, wie sie z. B. im magnetischen Felde auftritt, erfordert keinen Arbeitsaufwand; demgemäß ist die hier in Rechnung zu ziehende „transversale Masse" aus der Feldenergie nicht abzuleiten. Um sie zu ermitteln, ist der verallgemeinerte Schwerpunctsatz (7) heranzuziehen.

Wie die Energie, so ist auch die Bewegungsgröße bei quasi-

1) l. c. pag. 11 Gl. 13.

Digitized by Google

stationärer Electronenbewegung nur von der Geschwindigkeit abhängig. Die Richtung des Vectors der Bewegungsgröße stimmt, bei den in den folgenden Paragraphen zu Grunde gelegten Annahmen über Form und Ladungsverteilung des Electrons, mit der Richtung des Geschwindigkeitsvectors überein. Bezeichnet G den Betrag der Bewegungsgröße, so gilt, nach (7), für Beschleunigung in der Bahnrichtung

$$\left(M+\frac{dG}{dq}\right)\frac{dq}{dt} = \mathfrak{K}_s.$$

Hieraus, in Verbindung mit (3), folgt für die longitudinale electromagnetische Masse die Formel

9) $$m_s = \frac{dG}{dq}.$$

Erfährt andrerseits das Electron eine Beschleunigung senkrecht zur Bahnrichtung, so bleibt der Betrag der Geschwindigkeit, mithin auch derjenige der Bewegungsgröße, constant, nur die Richtung beider Vectoren wird im Raume gedreht, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{q}{r}\right)$, wenn r den Krümmungsradius der Bahn bezeichnet. Der Zuwachs, welchen die genannten Vectoren in der Zeiteinheit erfahren, wird dargestellt durch Vectoren vom Betrage

$$(Mq+G)\frac{q}{r} \quad \text{bezw.} \quad \frac{q^2}{r},$$

die nach dem Krümmungsmittelpuncte der Bahn hinweisen. Aus (7) folgt mithin

$$(Mq+G)\frac{q}{r} = \mathfrak{K}_r,$$

andererseits aus (3)

$$(M+m_r)\frac{q^2}{r} = \mathfrak{K}_r.$$

Mithin ist

10) $$m_r = \frac{G}{q}$$

die transversale electromagnetische Masse. Bei großen Geschwindigkeiten ist die electromagnetische Bewegungsgröße des Electrons nicht mehr der Geschwindigkeit proportional; die transversale Masse wird hier verschieden von der longitudinalen. Eine Kraft, die in der Richtung der Geschwindigkeit wirkt, ruft daher

Digitized by Google

eine andere Beschleunigung hervor, als eine solche, die senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt. Ist die Kraft schief zur Bewegungsrichtung orientiert, so stimmt die Richtung der Beschleunigung nicht mit derjenigen der Kraft überein. Um den Beschleunigungsvector zu erhalten, ist die Kraft in ihre Componenten parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung zu zerlegen; die entsprechenden Componenten der Beschleunigung werden berechnet, indem man die Kraftcomponenten durch die longitudinale, bezw. die transversale Masse dividiert. Das Resultat ist in den Satz zusammenzufassen: Die electromagnetische Masse ist kein Scalar, wie die Masse der gewöhnlichen Mechanik, sondern ein Tensor[1]), von der Symmetrie eines Rotationsellipsoides.

§ 4. Feld und Kräftefunction eines gleichförmig bewegten Electrons.

Es erwächst nunmehr die Aufgabe, die electromagnetische Energie und Bewegungsgröße eines mit beliebiger Geschwindigkeit gleichförmig bewegten Electrons zu ermitteln. Hierbei ist nur das von dem Electron selbst erzeugte Feld zu berücksichtigen, die Einwirkung des äußeren Feldes ist in der äußeren Kraft $\mathfrak{K}$ enthalten. Das Feld des gleichförmig bewegten Electrons ist, im stationären Zustande, relativ zum Electron constant; es wird mit der Geschwindigkeit q durch den Raum geführt. Auch ohne specielle Annahmen über die Verteilung der Ladung im Electron zu machen, läßt sich, wie aus den eingangs citierten Untersuchungen der Herren W. B. Morton und G. F. C. Searle hervorgeht, über das stationäre Feld allgemein Folgendes aus den Grundgleichungen ableiten.

Die magnetische Feldstärke ist das äußere Product des durch die Lichtgeschwindigkeit gemessenen Geschwindigkeitsvectors und der electrischen Feldstärke

$$11) \qquad \mathfrak{H} = \left[\frac{q}{c}, \mathfrak{E}\right].$$

Führt man ein mit dem Electron mitbewegtes Coordinatensystem ein, dessen x-Axe in Richtung der Bewegung des Electrons weist,

---

1) Ueber diesen Begriff vergl. W. Voigt, „Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle", Leipz. 1898 und M. Abraham, Encycl. d. mathem. Wissensch. Bd. IV. Art. 14.

Digitized by Google

so sind die magnetischen Feldcomponenten

11a) $$\mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{q}{c}\cdot\mathfrak{E}_z, \quad \mathfrak{H}_z = +\frac{q}{c}\cdot\mathfrak{E}_y.$$

Der Vector

12) $$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \left[\frac{q}{c}, \mathfrak{H}\right],$$

der die vom Felde auf die mitbewegte Einheit der Ladung ausgeübte ponderomotorische Kraft anzeigt, ist im stationären Felde der Gradient eines Scalars φ; letzterer wird „Convectionspotential" genannt

12a) $$\mathfrak{F} = \text{grad}\ \varphi.$$

Die Componenten der Vectoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}$ sind, nach (11) und (11a) durch folgende Gleichungen verknüpft:

12b) $$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \mathfrak{E}_x, \\ \mathfrak{F}_y &= \mathfrak{E}_y - \frac{q}{c}\cdot\mathfrak{H}_z = \mathfrak{E}_y\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right), \\ \mathfrak{F}_z &= \mathfrak{E}_z + \frac{q}{c}\cdot\mathfrak{H}_y = \mathfrak{E}_z\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Hieraus, in Verbindung mit 12a, und der Gleichung

12c) $$\text{div}\,\mathfrak{E} = 4\pi\varrho,$$

in der ϱ die räumliche Dichte der Volumladung des Electrons bezeichnet, folgt

13) $$\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\varrho\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right).$$

Diese Differentialgleichung bestimmt das Convectionspotential bei gegebener Form und Ladungsverteilung des Electrons. Sie entspricht der Poisson'schen Gleichung der gewöhnlichen Potentialtheorie, in die sie für $q = 0$ übergeht. Das Convectionspotential giebt die Arbeit an, die zu gewinnen wäre, wenn die Einheit der Ladung, von dem betreffenden Puncte des Feldes aus ohne merkliche Aenderung der Convectionsgeschwindigkeit in unendliche Entfernung gebracht würde.

Die Analogie der Electrostatik legt es nahe, die Funktion

14) $$U = \iiint dv\,\frac{\varrho\cdot\varphi}{2}$$

einzuführen; wir nennen sie „Kräftefunction" des stationären

Digitized by Google

Feldes. Sie entspricht der electrostatischen Energie eines Systems ruhender Ladungen, indem sie die Arbeit angiebt, die aus dem stationären Felde zu gewinnen wäre, wenn die gleichnamigen Ladungen der Volumelemente des Electrons, den zwischen ihnen wirkenden Kräften folgend, sich ohne merkliche Aenderung der Convectionsgeschwindigkeit ins Unendliche entfernten. Eine einfache Umformung, welche die Gleichungen (12a) und (12c) verwendet, bringt (14) auf die Form

14a) $$U = \iiint \frac{dv}{8\pi} \cdot (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{F}).$$

Das hier auftretende innere (scalare) Product der Vectoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ ist, nach (11a, 12b) zu schreiben

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{F}) = \mathfrak{E}_x\mathfrak{F}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{F}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{F}_z = \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2.$$

Es folgt mit Rücksicht auf (4a, 4b)

15) $$U = W_e - W_m.$$

Die Kräftefunction des Electrons ist gleich der Differenz der electrischen und der magnetischen Feldenergie. Dieser wichtige, von Searle herrührende[1]) Satz läßt sich deuten, indem man $+W_e$ als Kräftefunction der abstoßenden electrostatischen, $-W_m$ als Kräftefunction der anziehenden electrodynamischen Kräfte interpretiert.

Mit Hilfe der Formel (15) werden wir die für die Berechnung der electromagnetischen Masse maaßgebenden Gleichungen (8, 9, 10) des vorigen Paragraphen auf eine für die praktische Berechnung geeignetere Form bringen. Diese Umformung vorbereitend, berechnen wir zunächst den Vector der electromagnetischen Bewegungsgröße. Die Componenten desselben sind, nach (6, 6a), da $\mathfrak{H}_x = 0$ ist

16)
$$\mathfrak{G}_x = \frac{1}{4\pi c} \cdot \iiint dv (\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y),$$
$$\mathfrak{G}_y = \frac{1}{4\pi c} \cdot \iiint dv (-\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z),$$
$$\mathfrak{G}_z = \frac{1}{4\pi c} \cdot \iiint dv (+\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y).$$

Nehmen wir jetzt an, daß die (xy) und die (xz)-Ebene Symmetrieebenen des Electrons sind, sowohl was die Form, als auch, was die Ladungsverteilung des Electrons anbelangt, so sind die Com-

1) l. c. Phil. Trans. 187 A (1896) p. 675—713.

Digitized by Google

ponenten $\mathfrak{G}_x$, $\mathfrak{G}_z$ gleich null. Denn in je zwei Puncten, die durch die Coordinaten (x, y, z) und $(x, -y, -z)$ charakterisiert sind, sind die electrischen Componenten $\mathfrak{E}_z$ gleich, die Componenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$ hingegen, und folglich, nach (11a), auch die magnetischen Componenten $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, entgegengesetzt gleich. Mithin heben sich die Beiträge auf, welche zwei solche Puncte zu den Componenten $\mathfrak{G}_x$, $\mathfrak{G}_z$ liefern. Wir gelangen also zu dem Resultat: Besitzt das Electron zwei aufeinander senkrechte, durch die Bewegungsrichtung gehende Symmetrieebenen, so weist der Vector der electromagnetischen Bewegungsgröße in Richtung der Bewegung. Der Betrag der Bewegungsgröße ist, nach (11a)

$$G = \mathfrak{G}_z = \frac{1}{4\pi q} \cdot \iiint dv\,(\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_x^2),$$

oder, gemäß 4b

17) $$G = \frac{2W_m}{q}.$$

Das Product aus electromagnetischer Bewegungsgröße und Geschwindigkeit ist gleich der doppelten magnetischen Feldenergie.

Die Gleichungen (10) und (9), für transversale und longitudinale electromagnetische Masse, schreiben wir jetzt

17a) $$m_r = \frac{2W_m}{q^2},$$

17b) $$m_l = 2 \cdot \frac{d}{dq}\left(\frac{W_m}{q}\right).$$

Diese Relationen ergab der verallgemeinerte Schwerpunctsatz. Aus dem Energieprincip folgte andrerseits die Gl. (8)

17c) $$m_l = \frac{1}{q}\frac{d}{dq}(W_e + W_m).$$

Subtraction von 17c, 17b ergiebt, mit Rücksicht auf (15):

$$\frac{2W_m}{q^2} = -\frac{1}{q}\frac{d}{dq}(W_e - W_m) = -\frac{1}{q}\frac{dU}{dq},$$

mithin

18) $$W_m = -\frac{q}{2} \cdot \frac{dU}{dq}.$$

Während Searle die magnetische Energie durch Integration über das ganze Feld berechnet, gestattet

Digitized by Google

uns die Formel (18), dieselbe durch Differentiation der Kräftefunction des Electrons abzuleiten; durch (15) ist dann auch die electrische Energie bestimmt. Die electromagnetische Bewegungsgröße wird jetzt

$$G = -\frac{dU}{dq}, \tag{18a}$$

die transversale, bezw. longitudinale electromagnetische Masse

$$m_r = -\frac{1}{q}\frac{dU}{dq}; \tag{18b}$$

$$m_s = -\frac{d^2U}{dq^2}. \tag{18c}$$

Durch Angabe der Kräftefunction sind mithin alle für die Dynamik des Electrons wichtigen Größen bestimmt.

§ 5. Dreiaxiges Ellipsoïd.

Die bisherigen Entwickelungen legten recht allgemein gehaltene Annahmen über Form und Ladungsverteilung des Electrons zu Grunde. Nunmehr wollen wir dieselben specialisieren. Wir betrachten das Electron als dreiaxiges Ellipsoïd, das in Richtung einer der drei Hauptaxen bewegt wird; seine Ladung soll entweder gleichförmig über das ganze Volumen, oder gleichförmig über eine unendlich dünne, von zwei benachbarten, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoïden begrenzte Oberflächenschicht verteilt sein. Den erstgenannten Fall haben wir im Sinn, wenn wir kurz von „Volumladung", den letztgenannten, wenn wir von „Flächenladung" des Electrons reden.

Beiden Fällen entsprechende Lösungen der Differentialgleichung (13) des Convectionspotentials erhält man mit Hilfe eines von H. A. Lorentz[1]), sowie auch von Searle[2]) angewandten Reductionsverfahren. Dieses Verfahren bildet das bewegte System S auf ein ruhendes System S' electrischer Ladungen ab; die Coordinaten entsprechender Puncte P, P' der beiden Systeme sind einander folgendermaaßen zugeordnet

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1-\varkappa^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \tag{19}$$

$$\left(\varkappa = \frac{q}{c}\right).$$

1) H. A. Lorentz, l. c. pag. 36 ff.

2) H. F. C. Searle, Phil. Mag. 44 (1897) p. 329—341.

Digitized by Google

Das ganze Feld erscheint also im ruhenden Systeme S' in der Richtung der x-Axe gedehnt, und zwar in dem, von der Geschwindigkeit abhängigen Verhältnis $1 : \sqrt{1-\varkappa^2}$. Auch das Bild des Electrons selber in S' ist in diesem Verhältnis verlängert; doch sollen — das setzen wir fest — die Ladungen entsprechender Volumelemente die gleichen, mithin

19a) $$\varrho = \varrho' \sqrt{1-\varkappa^2}.$$

sein. Das electrostatische Potential φ' genügt der Poisson'schen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} = -4\pi\varrho'.$$

Vergleichung mit (13) ergiebt

19b) $$\varphi' = \frac{\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2}}.$$

Die Bestimmung des Convectionspotentiales φ im bewegten Systeme ist somit reduciert auf die Bestimmung des electrostatischen Potentials im ruhenden Systeme. Die electrostatische Energie des letzteren

20) $$U' = \iiint dv' \frac{\varrho' \varphi'}{2}$$

hängt mit der Kräftefunction U des Electrons durch die aus (19, 19a, 19b) folgende Gleichung zusammen

20a) $$U = U' \cdot \sqrt{1-\varkappa^2}.$$

Die Berechnung der Kräftefunction des Electrons ist hierdurch zurückgeführt auf die Berechnung der electrostatischen Energie eines gemäß (19) deformierten ruhenden Systems.

Nun läßt sich bekanntlich die Berechnung der electrostatischen Energie ausführen für ein über das ganze Volumen gleichförmig geladenes Ellipsoïd, sowie für eine Ladung, die gleichförmig über eine, von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoïden begrenzte Schicht verteilt ist. Auf diese Aufgabe aber wird man geführt, wenn man die Kräftefunction eines Electrons von den im Eingange dieses Paragraphen vorausgesetzten Eigenschaften aufsucht. Was den Fall der Flächenladung des Electrons anbelangt, so wird dieser durch das Reductionsverfahren zurückgeführt auf ein ruhendes System S', in dem die Ladung sich wiederum gleichförmig über eine, von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellip-

Digitized by Google

soïden begrenzte Schicht verteilt. Von der letzteren Verteilung weiß man, daß sie in dem von der Schicht eingeschlossenen Hohlraum constantes Potential ergiebt, also im Grenzfalle einer unendlich dünnen Schicht mit der Gleichgewichtsverteilung der Electricität auf der Oberfläche eines leitenden Ellipsoïds identisch ist. Mithin ergiebt die entsprechende Flächenladung im bewegten Systeme S nach (19b) ein im ellipsoïdischen Hohlraume constantes Convectionspotential; da der Gradient des Convectionspotentials die Kraft auf die mitbewegte Einheit der Ladung anzeigt, so entspricht im bewegten Systeme S die Ladungsverteilung dem convectiven Gleichgewicht der Electricität auf der Oberfläche eines leitenden Ellipsoïdes. Da dieses für beliebige Geschwindigkeiten gilt, so folgt einerseits, daß die Gleichgewichtsverteilung auf einem leitenden Ellipsoïd von der Geschwindigkeit unabhängig ist, daß mithin die Verteilung der Electricität auf einem leitenden Ellipsoïd durch die gleichförmige Bewegung nicht beeinflußt wird. Dieses hat bereits Herr W. B. Morton bewiesen. Andrerseits aber erkennen wir, daß die Annahme einer fest haftenden Flächenladung des Electrons zu denselben Resultaten führen muß, wie diejenige eines Leiters von derselben ellipsoïdischen Oberfläche.

Wir gehen über zur Berechnung der Kräftefunction des dreiaxigen Ellipsoïds. Die Halbaxen seien a, b, c; die Bewegung finde, wie bisher, in Richtung der x-Axe statt. Durch das Reductionsverfahren wird die Bestimmung der Kräftefunction U zurückgeführt auf die Berechnung der electrostatischen Energie U' eines Ellipsoids von den Halbaxen

$$a' = \frac{a}{\sqrt{1-\varkappa^2}},\ b,\ c.$$

Für den ersten Fall der gleichförmigen Volumladung ist das electrostatische Potential im Inneren des Ellipsoïdes [1])

$$21) \qquad \varphi' = \tfrac{3}{4} \cdot e \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{D}\left(1 - \frac{x'^2}{a'^2+s} - \frac{y'^2}{b^2+s} - \frac{z'^2}{c^2+s}\right),$$

wo $D = \sqrt{(a'^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$ gesetzt ist. Für den zweiten Fall der Flächenladung, der als Grenzfall einer gleichförmigen Verteilung in einer von zwei benachbarten, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoïden begrenzten Schicht aufzufassen ist, ist der Wert des Potentials auf der geladenen Fläche [1])

1) Vgl. B. Riemann, Partielle Differentialgleichungen, 4. Aufl. herausgeg. von H. Weber, I p. 255—261. In Betreff der Geschichte des Problems ist zu verweisen auf H. Burkhardt und W. F. Meyer, Encycl. d. mathem. Wissensch. Bd. II, Art. A 7b Nr. 15.

Digitized by Google

21a) $$\varphi' = \tfrac{1}{2} \cdot e \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{D}.$$

Mithin ist die electrostatische Energie

22) $$U' = \tfrac{1}{2} e\varphi' = \frac{e^2}{4} \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{D}$$

bei Flächenladung. Bei Volumladung hingegen wird

22a) $$U' = \tfrac{1}{2} \iiint dv' \varrho' \varphi' = \tfrac{2}{5} \cdot e \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{D} \cdot J,$$

wo J das über das ganze Ellipsoïd erstreckte Integral

22b) $$J = \iiint dv' \varrho' \left(1 - \frac{x'^2}{a'^2+s} - \frac{y'^2}{b^2+s} - \frac{z'^2}{c^2+s}\right)$$

bezeichnet. Nun gilt

$$\iiint dv' \varrho' = \iiint dv \varrho = e;$$

ferner zeigt eine z. B. bei der Berechnung der Trägheitsmomente homogener Ellipsoïde gebräuchliche Betrachtung, daß zu setzen ist

$$\iiint dv' \varrho' x'^2 = \tfrac{1}{5} \cdot e \cdot a'^2,$$
$$\iiint dv' \varrho' y'^2 = \tfrac{1}{5} \cdot e \cdot b^2,$$
$$\iiint dv' \varrho' z'^2 = \tfrac{1}{5} \cdot e \cdot c^2.$$

Mithin folgt, bei Volumladung

22c) $$U' = \tfrac{2}{5} \cdot e^2 \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{D} \left(1 - \tfrac{1}{5} \frac{a'^2}{a'^2+s} - \tfrac{1}{5} \frac{b^2}{b^2+s} - \tfrac{1}{5} \frac{c^2}{c^2+s}\right).$$

Dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen; setzen wir, abkürzend

$$\int_0^\infty \frac{ds}{D} = f(a'^2, b^2, c^2),$$

so ist

$$\int_0^\infty \frac{ds}{D(a'^2+s)} = -2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a'^2},$$
$$\int_0^\infty \frac{ds}{D(b^2+s)} = -2 \cdot \frac{\partial f}{\partial b^2},$$
$$\int_0^\infty \frac{ds}{D(c^2+s)} = -2 \cdot \frac{\partial f}{\partial c^2}.$$

Führen wir diese Relationen in (22c) ein, so erhalten wir

22d) $$U' = \tfrac{2}{5} \cdot e^2 \left\{f + \tfrac{1}{5}\left(a'^2 \frac{\partial f}{\partial a'^2} + b^2 \frac{\partial f}{\partial b^2} + c^2 \frac{\partial f}{\partial c^2}\right)\right\}.$$

Digitized by Google

Nun ist f eine homogene Function von a'^2, b^2, c^2, und zwar vom Grade $(-\frac{1}{2})$; also ist nach einem, von Euler herrührenden Satz über homogene Functionen

$$a'^2 \frac{\partial f}{\partial a'^2} + b^2 \frac{\partial f}{\partial b^2} + c^2 \frac{\partial f}{\partial c^2} = -\tfrac{1}{2} \cdot f.$$

Daher ergiebt sich schließlich, bei Volumladung

$$23) \qquad U' = \tfrac{2}{5} \cdot e^2 \cdot f(1-\tfrac{1}{5}) = \frac{3}{10} \cdot e^2 \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{D}.$$

Aus (22) und (23) geht hervor, daß sich, für dasselbe Ellipsoïd, die Werte der electrostatischen Energie U' bei Volumladung und Flächenladung verhalten, wie 6 : 5. Vom ruhenden System S' zum bewegten System S übergehend, erkennen wir, daß nach (20a) dasselbe Verhältnis auch für die Werte der Kräftefunction des bewegten Ellipsoïds bei Volumladung und Flächenladung gilt. Auf Grund der Resultate des § 4 gelangen wir nun sofort zu dem Satze: Alle für die Dynamik des Electrons wichtigen Größen, magnetische und electrische Energie, longitudinale und transversale electromagnetische Masse, werden im Verhältnis 6:5 vermehrt, wenn man von dem Falle der Flächenladung zum Falle der Volumladung desselben bewegten Ellipsoïds übergeht. Dieses Resultat ist im Einklange mit dem von Herrn C. H. Wind[1]), speciell für die Energie und die longitudinale Masse einer langsam bewegten Kugel abgeleiteten.

Durch den soeben bewiesenen Satz ist der Fall der Volumladung auf denjenigen der Flächenladung zurückgeführt, so daß uns weiterhin nur der letztere zu beschäftigen braucht. Bei Flächenladung aber entspricht, wie gezeigt wurde, die Verteilung der Electricität in S' der Gleichgewichtsverteilung auf der Oberfläche eines leitenden, ruhenden Ellipsoïds von den Halbaxen a', b, c. Die Kapacität Q' eines solchen wird in den Lehrbüchern der Electrostatik angegeben. Das Potential an seiner Oberfläche wird $\varphi' = \frac{e}{Q'}$, mithin die electrostatische Energie

$$24) \qquad U' = \tfrac{1}{2} \varphi' e = \frac{e^2}{2Q'}.$$

Nach (20a) wird also die Kräftefunction des bewegten Ellipsoïds, von den Halbaxen a, b, c

1) C. H. Wind, Arch. Néerl. (2) 5 (1900) p. 609—635.

Digitized by Google

24a) $$U = \frac{e^2}{2Q'} \cdot \sqrt{1-\varkappa^2}$$

bei Flächenladung, und, nach dem soeben bewiesenen Satze

24b) $$U = \tfrac{4}{5} \cdot \frac{e^2}{2Q'} \cdot \sqrt{1-\varkappa^2}$$

bei Volumladung. Beachtet man, daß das ruhende Ellipsoïd in S' gegen das bewegte in S im Verhältnis $1 : \sqrt{1-\varkappa^2}$ parallel der x-Axe gedehnt ist, und setzt demgemäß $a' = \frac{a}{\sqrt{1-\varkappa^2}}$, so ist U als Funktion der Geschwindigkeit des Electrons bekannt. Die Formeln des § 4 erlauben es daher, alle für die Dynamik des Electrons wichtigen Größen zu berechnen. Für den Fall des kugelförmigen Electrons mögen diese Rechnungen ausgeführt werden.

§ 6. Kugelförmiges Electron.

Wir betrachten in diesem Abschnitte das Electron als eine Kugel vom Radius (a), deren Oberfläche mit einer electrischen Belegung von gleichförmiger Dichte versehen ist. Die Anwendung des Reductionsverfahrens bildet das Electron ab auf ein ruhendes gestrecktes Rotationsellipsoïd, mit den Halbaxen $a' = \frac{a}{\sqrt{1-\varkappa^2}}$, a, a. Die reciproke Kapacität eines solchen ist[1])

$$\frac{1}{Q'} = \frac{\lg\left(\frac{a' + \sqrt{a'^2 - a^2}}{a}\right)}{\sqrt{a'^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{2\varkappa a} \cdot \lg\left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right).$$

Gl. (24a) ergiebt, als Kräftefunction des Electrons:

25) $$U = \frac{e^2}{2a} \cdot \frac{(1-\varkappa^2)}{2\varkappa} \cdot \lg\left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right), \quad \varkappa = \frac{q}{c}.$$

Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $\varkappa$ ergiebt:

25a) $$U = \frac{e^2}{2a} - \frac{e^2}{a}\left(\frac{1}{3}\varkappa^2 + \frac{1}{3.5}\varkappa^4 + \frac{1}{5.7}\varkappa^6 + \cdots\right).$$

Die magnetische Energie beträgt, nach (18):

25b) $$W_m = -\frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{dU}{d\varkappa} = \frac{e^2}{4a} \cdot \left(\frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa} \cdot \lg\left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right) - 1\right);$$

1) Vgl. z. B. Maxwell, Treatise I. p. 244 der deutschen Uebersetzung.

Digitized by Google

nach (15) folgt sofort die Searle'sche Formel für die Gesammtenergie:

$$25c) \qquad W = 2W_m + U = \frac{e^2}{2a}\left(\frac{1}{\varkappa}\cdot \lg\left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right) - 1\right).$$

Was endlich die electromagnetische Masse anbelangt, so folgt, aus (18b), für die transversale:

$$25d) \quad m_r = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{dU}{d\varkappa} = \frac{e^2}{2ac^2}\cdot\frac{1}{\varkappa^2}\cdot\left(\frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa}\cdot\lg\left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right) - 1\right)$$
$$= \frac{e^2}{ac^2}\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3.5}\cdot\varkappa^2 + \frac{6}{5.7}\cdot\varkappa^4 + \frac{8}{7.9}\cdot\varkappa^6 + \cdots\right),$$

hingegen, aus (18c), für die longitudinale:

$$25e) \quad m_l = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2U}{d\varkappa^2} = \frac{e^2}{2ac^2}\cdot\frac{1}{\varkappa^2}\left(-\frac{1}{\varkappa}\lg\left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right) + \frac{2}{1-\varkappa^2}\right)$$
$$= \frac{e^2}{ac^2}\cdot\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{5}\cdot\varkappa^2 + \tfrac{6}{7}\cdot\varkappa^4 + \tfrac{8}{9}\cdot\varkappa^6 + \cdots\right).$$

Man bemerkt, daß, bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit, die transversale Masse nicht so rasch ansteigt, wie die longitudinale. Daß, in den Reihenentwickelungen der transversalen und longitudinalen Masse, die Coefficienten von $\varkappa^2$ verschiedene Werte besitzen, fand bereits Herr H. A. Lorentz[1]); den Gang seines Beweises gab er nicht an.

Bei gleichförmiger Volumladung der Kugel wären die rechten Seiten aller dieser Formeln mit $(\frac{6}{5})$ zu multiplicieren. Es ist also ein kugelförmiges Electron vom Radius a mit Volumladung äquivalent einem mit Flächenladung versehenen vom Radius $\left(\frac{5a}{6}\right)$. Die Abhängigkeit der electromagnetischen Trägheit von der Geschwindigkeit ist in beiden Fällen die gleiche.

Es entsteht die Frage, ob die auf Grund der Electronentheorie erhaltenen Formeln sich mit den Beobachtungsresultaten vereinbaren lassen. Die experimentellen Untersuchungen des Herrn W. Kaufmann[2]) betrafen die Ablenkung der Becquerelstrahlen im magnetischen und im transversalen electrischen Felde; die Ablenkungswinkel waren so klein, daß die Beschleunigung, auch im electrischen Felde, als rein transversale zu betrachten ist. Es ist mithin die Formel (25d) heranzuziehen. Wir schreiben diese

1) H. A. Lorentz, Phys. Zeitschr. 2. p. 78. 1900.
2) W. Kaufmann, Gött. Nachr. 1901, Heft 2.

Digitized by Google

26) $$m_r = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \psi(\varkappa),$$

indem wir

26a) $$\psi(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa} \cdot \lg\left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right) - 1\right), \quad \varkappa = \frac{q}{c}$$

setzen. Die beobachtete Massenträgheit bezeichnen wir mit μ, den absoluten Betrag der Ladung des Electrons, electromagnetisch gemessen, mit ε, so daß

26b) $$e = -c \cdot \varepsilon$$

ist.

Die erste Columne der folgenden Tabelle enthält die den Beobachtungen entnommenen Werte von $q \cdot 10^{-10}$, die zweite diejenigen von $\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot 10^{-7}$. In der dritten Columne sind die, den betreffenden Werten der Geschwindigkeit q zugehörigen Werte von $\psi(\varkappa)$ angegeben, und in der vierten die Werte des Productes

26c) $$P = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot 10^{-7} \cdot \psi(\varkappa) = \frac{m_r}{\mu}\left(\frac{2a}{\varepsilon}\right) \cdot 10^{-7}.$$

$q \cdot 10^{-10}$	$\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot 10^{-7}$	$\psi(\varkappa)$	P
2,83	0,63	2,85	1,8
2,72	0,77	2,47	1,90
2,59	0,975	2,20	2,14
2,48	1,17	2,05	2,40
2,36	1,31	1,92	2,52
0,6	1,865	1,333	2,49

Die Zahlen der letzten Horizontalreihe beziehen sich auf Kathodenstrahlen; der Wert von $\frac{\varepsilon}{\mu}$ ist den Beobachtungen des Herrn S. Simon [1]) entnommen, für $\psi(\varkappa)$ ist der für kleine Werte von $\varkappa$ gültige Grenzwert $(\frac{4}{3})$ gesetzt. Alle übrigen Zahlen beziehen sich auf Becquerelstrahlen.

Ist die beobachtete Trägheit durch die dynamische Wirkung des electromagnetischen Feldes zu erklären, so muß $\mu = m_r$, mithin das Product P constant sein. Ist, umgekehrt, P constant, so ist $\mu = m_r$.

1) S. Simon, Wied. Ann. 69, p. 589. 1899.

Digitized by Google

Vergleicht man die aus Versuchen mit Kathodenstrahlen einerseits, mit den langsamsten Becquerelstrahlen andrerseits erhaltenen Werte des Productes P, so ergiebt sich eine sehr befriedigende Uebereinstimmung. Wir gelangen also zu dem Resultate:

Die beobachtete Trägheit der in den Kathodenstrahlen und in den langsamsten Becquerelstrahlen bewegten Teilchen läßt sich vollständig durch die dynamische Wirkung ihres electromagnetischen Feldes erklären, wenn man die Teilchen als kugelförmige Electronen betrachtet.

Vergleicht man die für Becquerelstrahlen erhaltenen Zahlwerte unter einander, so ist die Uebereinstimmung keine befriedigende; doch wird man auf diesen Umstand kein sehr großes Gewicht legen, wenn man bedenkt, daß die genaue Messung der Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen mit wachsender Geschwindigkeit immer schwieriger wird. Wie mir Herr Kaufmann mündlich mitteilte, ist möglicherweise die Abweichungen der theoretischen und der beobachteten Masse den bei der Geschwindigkeitsbestimmung eingehenden Versuchsfehlern zuzuschreiben. Weitere experimentelle Untersuchungen müssen hierüber Aufklärung schaffen. Sehr wünschenswert wäre auch eine Ausfüllung des Intervalles das die langsamsten Becquerelstrahlen von den raschesten der bisher messend untersuchten Kathodenstrahlen trennt.

Die Einführung einer constanten „materiellen“ Masse würde die Abweichung zwischen Theorie und Experiment nicht aufheben, sondern vergrößern; denn die theoretische Masse würde, bei Hinzufügung eines constanten Gliedes, relativ noch langsamer mit wachsender Geschwindigkeit ansteigen. Tritt jene Abweichung wirklich bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit ein, so müssen unbekannte Einflüsse ins Spiel kommen. Ist sie nur durch Versuchsfehler bedingt, so wird man behaupten können:

Die Trägheit des Electrons ist ausschließlich durch sein electromagnetisches Feld verursacht.

Zum Schlusse sei nochmals hervorgehoben, daß die hier entwickelte Dynamik des Electrons quasistationäre Bewegung annimmt; plötzliche Geschwindigkeitsänderungen des Electrons sind ausgeschlossen. Sobald solche eintreten, sendet das Electron electromagnetische Impulse, Röntgenstrahlen, aus; diese Ausstrahlung, und die durch dieselbe bedingte Dämpfung, fällt aus dem Rahmen der hier entwickelten Theorie heraus. Die soeben dargelegte Theorie der Kathoden- und Becquerel-Strahlen beschränkt sich also auf solche Vorgänge, bei denen

Digitized by Google

kein merklicher Bruchteil der Energie in Röntgenstrahlung verwandelt wird. Will man den Gültigkeitsbereich der Theorie festlegen, so muß man die bei ungleichförmiger Bewegung des Electrons emittierte Röntgenstrahlung berechnen. Diese Rechnung, die wesentlich andere mathematische Hilfsmittel verwendet, mag einer künftigen Mitteilung vorbehalten bleiben.

Digitized by Google

Ueber reducible lineare homogene Differentialgleichungen.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. B.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 25. Januar 1902.

In den folgenden Seiten beabsichtige ich einige, wie ich glaube, nicht unwichtige Sätze über diejenigen irreduciblen linearen homogenen Differentialgleichungen, deren Integrale einer vorgelegten reduciblen linearen homogenen Differentialgleichung genügen, mitzutheilen. Die Angabe der Beweise sowie weiteres Eingehen auf diese Sätze behalte ich mir für eine nächstens zu publicirende Arbeit vor.

Der Begriff der Reducibilität einer linearen homogenen Differentialgleichung ist insofern ein relativer, als er die Fixirung eines Rationalitätsbereiches verlangt. Wir denken uns daher ein System von Functionen einer Variablen x gegeben; dieses System soll von der Vollständigkeit oder Abgeschlossenheit sein, daß man die Functionen des Systemes unbeschränkt unter einander addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren sowie eine jede differentiren kann, ohne daß man hierdurch das vorgelegte System verläßt. Ein solches Functionensystem nennt man einen Rationalitätsbereich. Der Rationalitätsbereich soll für das Folgende willkürlich, aber unveränderlich gewählt sein.

Im Anschluß an Herrn Frobenius[1]) heißt eine lineare homogene Differentialgleichung mit Coefficienten aus dem vorgelegten Rationalitätsbereiche irreducibel, wenn sie mit keiner ebenfalls linearen

1) G. Frobenius, Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 76, S. 236.

Digitized by Google

homogenen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung, welche auch nur Coefficienten aus dem Bereiche hat, ein Integral gemeinsam hat.

Ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit Coefficienten aus dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereiche reducibel, so wird sie durch alle Integrale einer oder mehrerer irreducibler linearer homogener Differentialgleichungen [1]) erfüllt.

Bei den algebraischen Gleichungen giebt es stets wenigstens zwei, immer nur eine endliche Anzahl verschiedener irreducibler Gleichungen, durch deren Wurzeln eine reducible algebraische Gleichung erfüllt wird; ferner ist die Summe der Ordnungen der verschiedenen irreduciblen algebraischen Gleichungen, durch deren Wurzeln die reducible algebraische Gleichung erfüllt wird, gleich der Ordnung der reduciblen Gleichung.

Für eine irreducible Differentialgleichung ist der Sachverhalt anders: Es kann nur eine einzige oder eine endliche Anzahl oder auch unendlich viele verschiedene irreducible Differentialgleichungen geben, durch deren Integrale die vorgelegte reducible Differentialgleichung erfüllt wird. Es gilt nun folgender Satz:

Giebt es für eine reducible lineare homogene Differentialgleichung eine einzige oder eine endliche Anzahl irreducibler linearer homogener Differentialgleichungen, durch deren Integrale die reducible lineare homogene Differentialgleichung befriedigt wird, so ist die Summe der Ordnungen dieser irreduciblen Differentialgleichungen stets kleiner oder höchstens gleich der Ordnung der reduciblen Differentialgleichung. Kennt man daher für eine reducible lineare homogene Differentialgleichung eine endliche Anzahl von verschiedenen irreduciblen Differentialgleichungen, durch deren Integrale die reducible Differentialgleichung befriedigt wird,

1) In dem vorliegenden Aufsatze sollen alle Differentialgleichungen ausnahmslos linear und homogen sein und nur Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche haben; ferner setzen wir stets voraus, daß der Coefficient der höchsten Ableitung immer gleich der Einheit sei; diese Voraussetzung wird deswegen gemacht, weil man aus einer linearen homogenen Differentialgleichung mit Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche durch Multiplication der linken Seite der Gleichung mit einer nur von der unabhängigen Variablen abhängigen Function des Rationalitätsbereiches stets wieder eine lineare homogene Differentialgleichung mit Coefficienten aus dem Bereiche und genau denselben Integralen erhält; die so gewonnenen unendlich vielen Differentialgleichungen mit genau denselben Integralen können aber nicht als verschieden angesehen werden.

Digitized by Google

und ist die Summe der Ordnungen dieser irreduciblen Differentialgleichungen größer als die Ordnung der vorgelegten reduciblen Differentialgleichung, so giebt es bald unendlich viele verschiedene irreducible Differentialgleichungen, durch deren Integrale die reducible Differentialgleichung befriedigt wird.

Man kann zunächst nach einem Criterium dafür fragen, daß eine reducible lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen verschiedenen irreduciblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat. Hierüber giebt folgendes Theorem Aufschluß: Nothwendig und hinreichend, damit eine lineare und homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduciblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß es wenigstens zwei irreducible lineare homogene Differentialgleichungen giebt, deren Integrale der vorgelegten Differentialgleichung genügen und welche von derselben Art sind.

Hat man zwei lineare homogene Differentialgleichungen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots p_n(x)y = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^{n_1} z}{dx^{n_1}} + q_1(x)\frac{d^{n_1-1}z}{dx^{n_1-1}} + \cdots q_{n_1}(x)z = 0 \quad (n_1 \leqq n) \tag{2}$$

mit Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche, so heißt (2) mit (1) von derselben Art, wenn man durch eine Transformation:

$$z = a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

deren Coefficienten a aus dem Rationalitätsbereiche sind, von den Integralen von (1) zu denen von (2) übergehen kann. Sind die zwei Differentialgleichungen irreducibel, so muss $n = n_1$ sein und auch (1) ist mit (2) von derselben Art; in diesem Falle, wo die Beziehung gegenseitig ist, sage ich einfach, die zwei Gleichungen sind von derselben Art. (Vgl. L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II 1, S. 120, Leipzig, Teubner 1897).

Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduciblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemein-

Digitized by Google

sam, so giebt es unter einer jeden beliebigen Anzahl derartiger irreducibler Differentialgleichungen, bei denen die Summe der Ordnungen gleich oder größer als die Ordnung der vorgelegten Differentialgleichung ist, wenigstens zwei Differentialgleichungen, die von derselben Art sind.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von unendlich vielen irreduciblen Differentialgleichungen, die mit der vorgelegten Differentialgleichung Integrale gemeinsam haben, kann auch in folgende Form gekleidet werden:

Die vorgelegte Differentialgleichung muß außer einem Integrale y_1, das auch einer irreduciblen Differentialgleichung genügen muß, noch ein zweites Integral von der Form:

$$a_0(x)y_1 + a_1(x)\frac{dy_1}{dx} + \cdots a_{s-1}(x)\frac{d^{s-1}y_1}{dx^{s-1}}$$

besitzen; dabei sollen a_0, a_1, ... a_{s-1} Functionen des Rationalitätsbereiches und s die Ordnung der irreduciblen Differentialgleichung, welcher y_1 genügt, bedeuten. Es sei noch hervorgehoben, daß nicht ein jedes Integral einer reduciblen Differentialgleichung auch einer irreduciblen genügen muß, sondern dies eine Bedingung vorstellt.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen auch diejenigen reduciblen Differentialgleichungen, für welche man wenigstens ein derartiges Fundamentalsystem von Integralen finden kann, daß jedes Element dieses Fundamentalsystemes auch Integral einer irreduciblen Differentialgleichung wird. Für diese Klasse von Differentialgleichungen existiren stets entweder eine endliche Anzahl irreducibler Differentialgleichungen, bei denen die Summe der Ordnungen gleich der Ordnung der vorgelegten Gleichung ist, oder unendlich viele Differentialgleichungen, mit denen die Gleichung Integrale gemeinsam hat. Es sei noch erwähnt, daß es für eine reducible Differentialgleichung auch sehr wohl unendlich viele irreducible Differentialgleichungen, mit denen sie Integrale gemeinsam hat, geben kann, ohne daß die Differentialgleichung zu der soeben besprochenen Gattung von Differentialgleichungen gehört.

Zu der soeben charakterisirten Gattung von Differentialgleichungen gehören die algebraisch integrirbaren. Für eine jede algebraisch integrirbare Differentialgleichung kann man stets wenigstens ein derartiges Fundamentalsystem von Integralen finden, daß ein jedes Ele-

Digitized by Google

ment dieses Fundamentalsystemes Integral einer irreduciblen Differentialgleichung ist.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit eine Differentialgleichung die Eigenschaft hat, daß ein jedes Element wenigstens eines Fundamentalsystemes von Integralen auch einer irreduciblen linearen Differentialgleichung genügt, ist das Zerfallen der Rationalitätsgruppe in eine Reihe nicht reducibler Gruppen[1]).

Durch die Untersuchungen von Herrn Frobenius[2]) ist man auch auf die Zerlegung eines reduciblen linearen homogenen Differentialausdruckes in irreducible Factoren hingewiesen worden. Hierfür mögen noch folgende Sätze angegeben sein:

Nothwendig und hinreichend, damit ein linearer homogener Differentialausdruck sich auf unendlich viele verschiedene Arten in irreducible lineare homogene Differentialausdrücke zerlegen läßt, ist, daß entweder die durch Nullsetzen des reduciblen Ausdruckes entstehende Differentialgleichung oder irgend eine mit dieser zu derselben Art gehörige Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduciblen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat.

Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck in irreducible Factoren zerlegt wird, so kann man die Factoren einer jeden Zerlegung den Factoren einer jeden anderen Zerlegung eineindeutig zuordnen, so daß immer die zwei durch Nullsetzen von zwei zugeord-

1) Das Wort „reducible Gruppe" verwende ich hier wie Herr Schlesinger, Handbuch, II 1, S. 104. Der obige Satz soll aussagen, man kann die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung in die Form:

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{\mu\mu} \end{matrix}$$

bringen, wo $a_{11}, a_{22}, \dots a_{\mu\mu}$ nicht reducible Gruppen bedeuten. In der Bezeichnung von Herrn Frobenius (Berl. Berichte, 1899, S. 483) würde man sagen: die Rationalitätsgruppe muß sich in die Form einer zerlegbaren Gruppe bringen lassen, $a_{11}, a_{22}, \dots a_{\mu\mu}$ sind nach Herrn Frobenius als primitive oder irreducible Gruppen zu bezeichnen.

2) Frobenius, a. a. O. S. 259. Vgl. auch L. Schlesinger, Handbuch, I, S. 84 ff.

Digitized by Google

neten Factoren entstehenden irreduciblen linearen homogenen Differentialgleichungen von derselben Art sind.

Dieser Satz enthält als speciellen Fall den Satz von Herrn E. Landau[1]); ferner folgt aus diesem Satze das von mir der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig mitgetheilte Theorem II[2]); umgekehrt aber kann auch aus dem dort gegebenen Satz dieser hier vorliegende Satz abgeleitet werden.

1) E. Landau, Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreducible Factoren. Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 124, S. 115.

2) A. Loewy, Ueber die irreduciblen Factoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes. Berichte der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wiss., Sitzung vom 13. Januar 1902.

Digitized by Google

Beiträge zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Krystalle.

Von

W. Voigt.

Mit 11 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Febr. 1902.

Für die merkwürdigen Erscheinungen, welche Platten aus pleochroitischen Krystallen, normal zu einer optischen Axe geschnitten, im convergenten Lichte zeigen, habe ich die Ableitung aus der allgemeinen Theorie bereits vor ziemlich langer Zeit gegeben, allerdings nicht sogleich in größter Allgemeinheit, sondern zunächst nur für optisch einaxige und solche zweiaxige Krystalle, die rhombische Symmetrie besitzen [1]). Die Verallgemeinerung der Betrachtung auf Krystalle von beliebiger Symmetrie habe ich dann einige Zeit später mitgetheilt [2]). Aber auch jene allgemeineren Entwickelungen zeigen nach einer Richtung noch eine gewisse Lücke. Im Interesse der Vereinfachung der im Allgemeinen sehr complicirten Formeln wurde, neben den Richtungen der sogenannten [3]) optischen Axen selbst, nur ein Bereich R in Betracht gezogen, welches diese nicht ganz unmittelbar umgab, sondern, ringförmig gestaltet, wie nach außen, so auch nach innen abgegrenzt war. Diese Beschränkung erschien zunächst unbedenklich, weil die abgeleiteten Formeln den weitaus größten Theil der beobachtbaren Erscheinungen darstellten, und deren Fortsetzung in den Raum R', der von dem Ringgebiet R umschlossen ist, nahezu selbstverständlich erschien. In der That verlaufen die Erschei-

1) W. Voigt, Götting. Nachr. 1884, p. 337.

2) W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik Bd. II, S. 719 u. f., 1896.

3) Es mag daran erinnert werden, daß das Verhalten absorbirender Krystalle längs dieser Axen von demjenigen durchsichtiger abweicht.

Digitized by Google

nungen bei höher symmetrischen Krystallen so, daß über ihre Fortsetzung innerhalb R' kaum ein Zweifel bleiben kann. Aber bei den niedrig symmetrischen, insbesondere denen des triclinen Systemes, liegen die Verhältnisse so eigenartig, daß ihre nähere Untersuchung erwünscht scheint. Dieselbe ist im Nachstehenden in der Weise geliefert, daß Formeln entwickelt und discutirt werden, welche für Krystalle beliebiger Symmetrie die ganze Umgebung der optischen Axen gleichmäßig umfassen. Dabei haben sich einerseits schöne Gesetzmäßigkeiten herausgestellt, die bisher noch nicht bemerkt sein dürften [1]), und es hat sich andererseits die Erklärung einiger bisher noch nicht gedeuteter Erscheinungen ergeben, wie insbesondere der idiophanen Ringsysteme, die man unter gewissen Umständen an Platten absorbirender Krystalle beobachtet.

1) Die Grundgleichungen. Die neuere Theorie der Absorption und Dispersion geht von den allgemeinen Maxwell-Hertzschen Formeln aus, die in der gebräuchlichen Bezeichnung (XYZ für die Componenten der electrischen, ABC für die Componenten der magnetischen Kraft) lauten

$$1) \qquad \frac{\partial A}{\partial t} = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

. . . . . .

und definirt in ihnen die electrischen Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ durch gewisse Hülfsvectoren ξ_λ, η_λ, ζ_λ, die sich durch die Hypothese der Electronen veranschaulichen lassen, gemäß den Beziehungen

$$2) \qquad \mathfrak{X} = X + \Sigma\xi_\lambda, \quad \mathfrak{Y} = Y + \Sigma\eta_\lambda, \quad \mathfrak{Z} = Z + \Sigma\zeta_\lambda.$$

Die Hülfsvectoren werden gewissen Bedingungen unterworfen, welche ihnen gedämpfte Eigenschwingungen von bestimmter Periode gestatten. Für Krystalle schreiben wir dieselben, indem wir unter α^λ_{mn}, β^λ_{mn}, γ^λ_{mn} Parameter, unter dem Symbol h einen oberen Index, unter die Ableitung nach der Zeit verstehen:

$$3) \qquad \begin{aligned} &\alpha^\lambda_{11}\xi_\lambda + \beta^\lambda_{11}\xi'_\lambda + \gamma^\lambda_{11}\xi''_\lambda + \alpha^\lambda_{12}\eta_\lambda + \beta^\lambda_{12}\eta'_\lambda + \gamma^\lambda_{12}\eta''_\lambda \\ &\quad + \alpha^\lambda_{13}\zeta_\lambda + \beta^\lambda_{13}\zeta'_\lambda + \gamma^\lambda_{13}\zeta''_\lambda = X, \end{aligned}$$

. . . . . .

Dabei kann man durch energetische Betrachtungen die Beziehungen

$$4) \qquad \alpha^\lambda_{mn} = \alpha^\lambda_{nm}, \quad \beta^\lambda_{mn} = \beta^\lambda_{nm}, \quad \gamma^\lambda_{mn} = \gamma^\lambda_{nm}$$

plausibel machen, die wir annehmen wollen.

Bei Einführung periodischer complexer Lösungen giebt dies

1) Hierzu ist zu vergleichen P. Drude, Wied. Ann. Bd. 32, p. 585, 1888; Bd. 40, p. 665, 1890.

Digitized by Google

$$5) \qquad \mathfrak{x}_h D^h_{11} + \mathfrak{y}_h D^h_{12} + \mathfrak{z}_h D^h_{13} = X,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo die D_{hk} leicht angebbare Functionen der Periode τ sind, welche die Beziehungen $D_{hk} = D_{kh}$ erfüllen.

Löst man diese Gleichungen nach $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$ auf und schreibt das Resultat

$$6) \qquad \mathfrak{x}_h = X\Delta^h_{11} + Y\Delta^h_{12} + Z\Delta^h_{13},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so ergiebt sich für die electrischen Polarisationen

$$7) \qquad \mathfrak{X} = X + \Sigma\mathfrak{x}_h = X(1 + \Sigma\Delta^h_{11}) + Y\Sigma\Delta^h_{12} + Z\Sigma\Delta^h_{13},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und endlich umgekehrt für die Kraftcomponenten

$$8) \qquad X = \mathfrak{X}\Theta_{11} + \mathfrak{Y}\Theta_{12} + \mathfrak{Z}\Theta_{13},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wobei wiederum gilt $\Theta_{hk} = \Theta_{kh}$. Setzt man

$$9) \qquad v^2\Theta_{hk} = a_{hk} + ib_{hk},$$

so sind die je sechs a_{hk} und b_{hk} Componenten je eines Tensortripels[1]) a_1, a_2, a_3 resp. b_1, b_2, b_3, welches den Krystall für die betreffende Farbe characterisirt. Das erstere mag kurz als das Polarisations-, das letztere als das Absorptionstripel bezeichnet werden. Wir wollen festsetzen, daß gilt

$$10) \qquad a_1 > a_2 > a_3, \quad b_1 > b_2 > b_3.$$

Die Orientirungen der beiden Tripel im Krystall sind im Allgemeinen verschieden; nur wenn der Krystall besondere Symmetrien besitzt, können sie ganz oder theilweise übereinstimmen.

Wir legen den drei an sich zweiseitigen gerichteten Größen willkürlich einen Richtungssinn bei, sodaß die positiven Richtungen von a_1, a_2, a_3 und von b_1, b_2, b_3 je ein directes Axenkreuz bilden, also je ein Coordinatensystem repräsentiren. Figur 1 (a. d. f. S.) giebt hiervon eine Anschauung.

Jedem Tripel ordnen wir ein Ovaloid von der resp. Gleichung

$$11) \qquad \begin{aligned} r_1^2 &= a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2, \\ r_2^2 &= b_1\alpha_2^2 + b_2\beta_2^2 + b_3\gamma_2^2 \end{aligned}$$

zu und nennen das erste das Polarisations-, das zweite das Absorptionsovaloid des Krystalles für die bestimmte Farbe.

1) W. Voigt, Gött. Nachr. v. 1900, p. 355.

Digitized by Google

Die Normalen A_λ und B_λ auf den Kreisschnitten dieser Ovaloide liegen in den Ebenen $a_1 a_2$ resp. $b_1 b_2$ und schließen mit den resp. Tensoren a_3 und b_3 die Winkel o und s ein, gegeben durch

$$12) \quad \begin{aligned} \sin^2 o &= \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad \cos^2 o = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}, \\ \sin^2 s &= \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}, \quad \cos^2 s = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b}. \end{aligned}$$

Wir nennen die A_λ die Polarisations-, die B_λ die Absorptionsaxen des Krystalles für die bestimmte Farbe; verschwindet die Absorption, so werden die A_λ mit den optischen Axen des Krystalles identisch. Die Einführung der Absorptionsaxen erleichtert die Aufdeckung der Gesetzmäßigkeiten bei absorbirenden Krystallen allgemeiner Symmetrie ganz außerordentlich [1]).

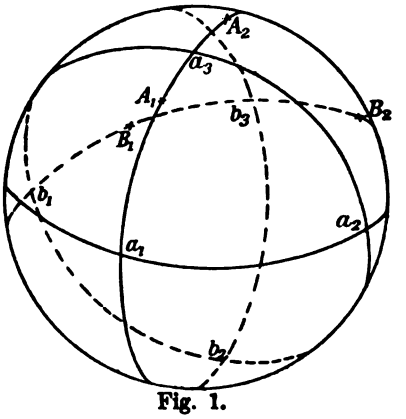


Fig. 1.

Die gegenseitige Lage der Polarisations- und der Absorptionsaxen, welche Fig. 1 durch eine Darstellung auf der Kugel veranschaulicht, ist für die beobachtbaren Erscheinungen von großer Bedeutung. Man erkennt leicht, daß hier eine große Fülle von Möglichkeiten vorliegt; selbst bei den einfachsten zweiaxigen Krystallen, denen des rhombischen Systemes, sind sechs, resp. acht verschiedene Fälle möglich.

An den zweiseitigen Richtungen A_λ und B_λ unterscheiden wir willkürlich die eine Seite und nennen A_1 diejenige Axe, die zwischen $+a_1$ und $+a_3$, A_2 diejenige die zwischen $-a_1$ und $+a_3$ liegt; analog B_1 die zwischen $+b_1$ und $+b_3$, B_2 die zwischen $-b_1$ und $+b_3$ gelegene (s. Fig. 1). —

Setzt man die Beziehungen (8) in das System (1) der Hauptgleichungen ein, so kann man aus ihm $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ eliminiren und erhält ein System von Formeln für die magnetische Kraft allein, die ja bekanntlich durch ihre Schwingungen direct das bestimmt,

1) W. Voigt, Kompendium II, p. 716. Dort weichen die Bezeichnungen von den obigen in mehrfacher Hinsicht ab.

Digitized by Google

was man den Polarisationszustand einer Welle nennt, und die wir deshalb hier bevorzugen wollen.

Wir betrachten die Fortpflanzung einer homogenen ebenen Welle in dem Krystall und legen die Z-Axe eines Coordinatensystemes in die Fortpflanzungsrichtung. Bezeichnen dann $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ die complexen Schwingungscomponenten der magnetischen Kraft nach den transversalen, aber vorläufig beliebigen Richtungen X und Y, so lauten die Differentialgleichungen

$$13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} &= (a_{22} + ib_{22}) \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2} - (a_{11} + ib_{12}) \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} &= (a_{11} + ib_{11}) \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2} - (a_{12} + ib_{12}) \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

oder kürzer

$$14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} &= \mathfrak{a}_{22} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2} - \mathfrak{a}_{12} \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} &= \mathfrak{a}_{11} \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2} - \mathfrak{a}_{12} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{a}_{\lambda\lambda} = a_{\lambda\lambda} + ib_{\lambda\lambda}$.

Diese Fundamentalformeln sind hier aus der Electronentheorie abgeleitet worden; sie sind davon aber unabhängig und lassen sich z. B. ganz direct aus den alten Gleichungen für durchsichtige Krystalle gewinnen, indem man nur deren reelle Parameter mit complexen vertauscht, also neben dem einen, reellen, noch ein zweites, imaginäres, Tensortripel zur Characterisirung der Substanz heranzieht.

2) Verschiedene Coordinatensysteme. Einer der beiden Parameter a_{12} und b_{12}, aber im Allgemeinen nur einer von ihnen, läßt sich durch eine geeignete Wahl des Coordinatenkreuzes XY zu Null machen.

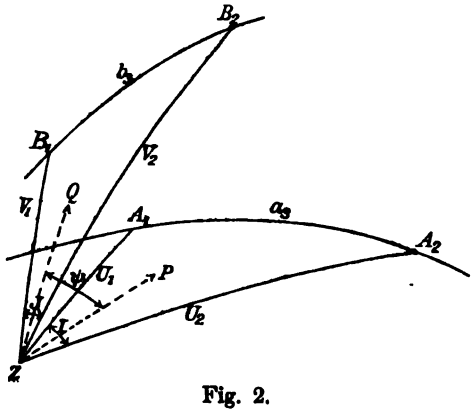


Fig. 2.

Construirt man die Ebenen durch Z und A_1 resp. A_2, halbirt den von ihnen eingeschlossenen Winkel I durch eine dritte Ebene ZP und legt die X-Axe in

Digitized by Google

diese Ebene, so wird

15) $$(a_{12}) = 0,$$

wobei die Klammer die Einführung dieses speciellen Axenkreuzes andeutet, das auch selbst mit (XY) bezeichnet werden mag. Zugleich wird

16) $$\begin{aligned}(a_{22}) &= \tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)\cos(U_2-U_1),\\ (a_{11}) &= \tfrac{1}{2}(a_1+a_2)+\tfrac{1}{2}(a_1-a_2)\cos(U_2+U_1),\end{aligned}$$

wobei

$$< Z, A_1 = U_1, \quad < Z, A_2 = U_2$$

gesetzt ist.

Construirt man dagegen die Ebenen durch Z und B_1 resp. B_2, halbirt den von ihnen eingeschlossenen Winkel J durch eine dritte Ebene ZQ und legt die X-Axe in diese Ebene, wodurch ein zweites specielles Axenkreuz $[XY]$ gegeben ist, so wird bei entsprechender Bezeichnung

17) $$[b_{12}] = 0,$$

18) $$\begin{aligned}[b_{22}] &= \tfrac{1}{2}(b_1+b_2)+\tfrac{1}{2}(b_1-b_2)\cos(V_1-V_2),\\ [b_{11}] &= \tfrac{1}{2}(b_1+b_2)+\tfrac{1}{2}(b_1-b_2)\cos(V_1+V_2),\end{aligned}$$

wobei

$$< Z, B_1 = V_1, \quad < Z, B_2 = V_2$$

gesetzt ist. Fig. 2 veranschaulicht die hier vorliegenden Verhältnisse.

Schließen die Ebenen ZP und ZQ den von Q nach P gerechneten Winkel ψ ein, so ist zugleich, da sich Tensorcomponenten wie die Quadrate von Vectorcomponenten transformiren:

19) $$\begin{aligned}[a_{11}] &= (a_{11})\cos^2\psi+(a_{22})\sin^2\psi, \quad (b_{11}) = [b_{11}]\cos^2\psi+[b_{22}]\sin^2\psi,\\ [a_{22}] &= (a_{11})\sin^2\psi+(a_{22})\cos^2\psi, \quad (b_{22}) = [b_{11}]\sin^2\psi+[b_{22}]\cos^2\psi,\\ [a_{12}] &= -((a_{22})-(a_{11}))\sin\psi\cos\psi, \quad (b_{12}) = ([b_{22}]-[b_{11}])\sin\psi\cos\psi.\end{aligned}$$

Hieraus folgt auch

20) $$\begin{aligned}[a_{11}]+[a_{22}] &= (a_{11})+(a_{22}), \quad [a_{11}]-[a_{22}] = ((a_{11})-(a_{22}))\cos 2\psi,\\ (b_{11})+(b_{22}) &= [b_{11}]+[b_{22}], \quad (b_{11})-(b_{22}) = ([b_{11}]-[b_{22}])\cos 2\psi.\end{aligned}$$

Die Beziehungen (15) bis (18) lassen sich (abweichend von dem gewöhnlichen Beweise) direct aus den Definitionen der Tensorcomponenten a_{kk} resp. b_{kk} gewinnen. In der That gilt z. B., wenn die Richtungscosinus der Axenkreuze a_1, a_2, a_3 und X, Y, Z durch das Schema

Digitized by Google

21)

	X	Y	Z
a_1	α_1	α_2	α_3
a_2	β_1	β_2	β_3
a_3	γ_1	γ_2	γ_3

gegeben sind:

22)
$$a_{11} = a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2,$$
$$a_{22} = a_1\alpha_2^2 + a_2\beta_2^2 + a_3\gamma_2^2,$$
$$a_{12} = a_1\alpha_1\alpha_2 + a_2\beta_1\beta_2 + a_3\gamma_1\gamma_2.$$

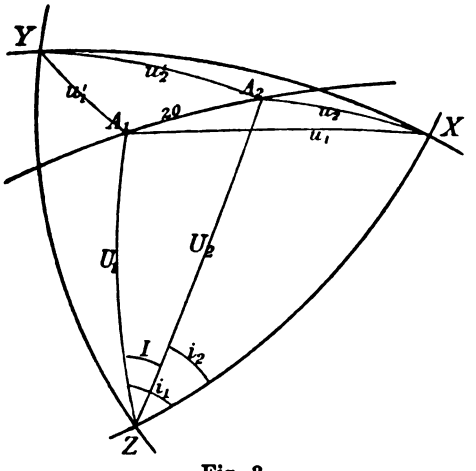


Fig. 3.

Nach Figur 3 ist aber

23)
$$\cos u_1 = \alpha_1 \sin o + \gamma_1 \cos o, \quad \cos u_2 = -\alpha_1 \sin o + \gamma_1 \cos o,$$
$$\cos u_1' = \alpha_2 \sin o + \gamma_2 \cos o, \quad \cos u_2' = -\alpha_2 \sin o + \gamma_2 \cos o,$$
$$\cos U_1 = \alpha_3 \sin o + \gamma_3 \cos o, \quad \cos U_2 = -\alpha_3 \sin o + \gamma_3 \cos o,$$

also

24)
$$\cos u_1 - \cos u_2 = 2\alpha_1 \sin o, \quad \cos u_1 + \cos u_2 = 2\gamma_1 \cos o,$$
$$\cos u_1' - \cos u_2' = 2\alpha_2 \sin o, \quad \cos u_1' + \cos u_2' = 2\gamma_2 \cos o,$$
$$\cos U_1 - \cos U_2 = 2\alpha_3 \sin o, \quad \cos U_1 + \cos U_2 = 2\gamma_3 \cos o.$$

Ferner ist ebenfalls nach der Figur

25)
$$\cos u_1 = \sin U_1 \cos i_1, \quad \cos u_2 = \sin U_2 \cos i_2,$$
$$\cos u_1' = \sin U_1 \sin i_1, \quad \cos u_2' = \sin U_2 \sin i_2.$$

Die Function (a_{12}) läßt sich aber wegen

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

Digitized by Google

nach (22) und (12) schreiben

$$a_{12} = (a_1 - a_3)(\alpha_1 \alpha_2 \sin^2 o - \gamma_1 \gamma_2 \cos^2 o)$$

und dies liefert nach (24)

$$a_{12} = -\tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)(\cos u_1 \cos u_2' + \cos u_2 \cos u_1'),$$

oder wegen (25) auch

26) $$a_{12} = -\tfrac{1}{2}(a_1 - a_3) \sin U_1 \sin U_2 \sin(i_1 + i_2).$$

a_{12} verschwindet also in den Polarisationsaxen (d. h. für U_1 oder U_2 gleich Null) ganz unabhängig von der Lage des XY-Systemes, im Allgemeinen aber nur, wenn letzteres so gewählt ist, daß $i_1 + i_2 = 0$ oder $= \pi$ ist. Wir setzen willkürlich die erste der beiden Lagen fest, wählen also die Beziehung

27) $$i_1 = -i_2 = \tfrac{1}{2} I.$$

Die durch $(a_{12}) = 0$ definirte XZ-Ebene halbirt hiernach den Winkel I zwischen U_1 und U_2 (oder den Nebenwinkel, was nur auf eine Bevorzugung der XZ- vor der YZ-Ebene herauskommt).

Die Ausdrücke (a_{11}) und (a_{22}) aber nehmen successive die folgenden Formen an; wegen (22)

$$(a_{11}) = a_2 + (a_1 - a_3)(\alpha_1^2 \sin^2 o - \gamma_1^2 \cos^2 o),$$
$$(a_{22}) = a_2 + (a_1 - a_3)(\alpha_2^2 \sin^2 o - \gamma_2^2 \cos^2 o),$$

und wegen (24), (25) und (27)

28) $$(a_{11}) = a_2 - (a_1 - a_3)\cos u_1 \cos u_2 = a_2 - (a_1 - a_3)\sin U_1 \sin U_2 \cos^2 \tfrac{1}{2} I,$$
$$(a_{22}) = a_2 - (a_1 - a_3)\cos u_1' \cos u_2' = a_2 + (a_1 - a_3)\sin U_1 \sin U_2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I.$$

Nun ist aber nach (12)

29) $$a_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) + \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)\cos 2o$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) + \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)(\cos U_1 \cos U_2 + \sin U_1 \sin U_2 \cos I),$$

und die Einführung dieses Werthes ergiebt, wie oben benutzt:

30) $$(a_{11}) = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) + \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)\cos(U_1 + U_2),$$
$$(a_{22}) = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) + \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)\cos(U_1 - U_2).$$

Ganz analog kann man mit den $[b_{\lambda\lambda}]$ verfahren.

3) Formulirung des Problemes. Bezeichnen wir nunmehr mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ die complexen Amplituden von u und v, mit o die complexe Geschwindigkeit, so folgt aus (14) allgemein

31) $$(a_{22} - o^2)\mathfrak{F} = a_{12}\mathfrak{G}, \quad (a_{11} - o^2)\mathfrak{G} = a_{12}\mathfrak{F}$$

Digitized by Google

also

$$(a_{11}-v^2)(a_{22}-v^2) = a_{12}^2, \tag{32}$$

$$\frac{\mathfrak{G}^2}{\mathfrak{F}^2}+\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} = 1. \tag{33}$$

Dabei ist $v = \omega/(1-i\varkappa)$, unter ω die reelle Geschwindigkeit, unter $\varkappa$ den Absorptionsindex verstanden.

Absorbirt — wie in den meisten Fällen von practischer Bedeutung — der Krystall so schwach, daß $\varkappa^2$ neben Eins vernachlässigt werden kann, so ist

$$v^2 = \omega^2(1+2i\varkappa), \tag{34}$$

und die Gleichung (32) zerfällt in die beiden

$$\begin{aligned}(a_{11}-\omega^2)(a_{22}-\omega^2)-a_{12}^2 &= (b_{11}-2\omega^2\varkappa)(b_{22}-2\omega^2\varkappa)-b_{12}^2,\\ (a_{11}-\omega^2)(b_{22}-2\omega^2\varkappa)+(a_{22}-\omega^2)(b_{11}-2\omega^2\varkappa) &= 2a_{12}b_{12}.\end{aligned} \tag{35}$$

Das früher (neben der optischen oder Polarisations-Axe selbst) untersuchte Bereich war dadurch characterisirt, daß innerhalb desselben $(a_{11}-a_{22})$ (absolut genommen) immer noch groß gegen $2\omega^2\varkappa$ resp. die Parameter b_{11}, b_{22}, b_{12} sein sollte. In diesem Falle konnte man leicht in folgender Weise verfahren[1]).

Durch Einführung des durch die Ebene ZP characterisirten Coordinatensystemes (XY) kann man $(a_{12}) = 0$ machen und erhält dann aus der ersten Gleichung (35) bis auf Größen zweiter Ordnung richtig

$$\omega_1^2 = (a_{22}), \quad \omega_2^2 = (a_{11}). \tag{36}$$

Das Einsetzen dieses Resultates in die zweite Gleichung (35) liefert

$$2\omega_1^2\varkappa_1 = (b_{22}), \quad 2\omega_2^2\varkappa_2 = (b_{11}), \tag{37}$$

also

$$\varkappa_1 = (b_{22})/2(a_{22}), \quad \varkappa_2 = (b_{11})/2(a_{11}). \tag{38}$$

Ist $(a_{11})-(a_{22})$ von gleicher Ordnung wie die $b_{\alpha\beta}$, so gelten die Beziehungen (36) und (38) bis auf Größen erster Ordnung exclusive; ist $(a_{11})-(a_{22})$ klein neben den $(b_{\alpha\beta})$, wie dies bei starker Annäherung an die Polarisationsaxen stattfindet, so ist auf dem angegebenen Wege überhaupt keine Annäherung zu erhalten.

Zieht man die Werthe (30) für (a_{11}) und (a_{22}) in Betracht, so erkennt man, daß die Formeln (36) mit den bei durchsichtigen Krystallen gültigen übereinstimmen, u. zw. die mit (1) bezeichnete

1) W. Voigt, Kompendium II, p. 719 u. f.

Digitized by Google

Welle mit der ordinären, die mit (2) bezeichnete mit der extraordinären dann zusammenfällt. Wir wollen für die allgemeinen Entwickelungen die Bezeichnungen erste und zweite Welle weiterhin stets beibehalten.

In der Polarisationsaxe selbst, wo für jedes System XY der Parameter a_{12} verschwindet, kann man das System $[XY]$ einführen, für welches $[b_{12}] = 0$ ist, und erhält dann aus (35), da dort $a_{11} = a_{22} = a_2$ ist,

39) $$\omega_1^2 = \omega_2^2 = a_2,$$

40) $$\varkappa_1 = [b_{12}]/2a_2, \quad \varkappa_2 = [b_{11}]/2a_2.$$

Durch Vorstehendes ist die bei der früheren Untersuchung gelassene Lücke characterisirt.

Die Formel (33) schreiben wir

41) $$(a_{22}-a_{11})+i(b_{22}-b_{11}) = (a_{12}+ib_{12})\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}}-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{G}}\right),$$

oder bei Einführung des Systemes (XY) auch

42) $$((a_{22})-(a_{11}))+i((b_{22})-(b_{11})) = i(b_{12})\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}}-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{G}}\right).$$

Ist $(a_{22})-(a_{11})$ sehr groß neben den (b_{hk}), so muß entweder $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$ einen sehr großen imaginären Theil haben, d. h., die beiden Bewegungen müssen in sehr gestreckten Ellipsen stattfinden, deren große Axen resp. den Richtungen (X) und (Y) parallel sind; das Licht muß angenähert lineär polarisirt nach diesen beiden Richtungen schwingen.

Ist $(a_{22})-(a_{11})$ von gleicher Ordnung wie $(b_{22})-(b_{11})$, so ist dieser Schluß nicht mehr zulässig, die Ellipsenaxen besitzen gleiche Größenordnung; ist endlich $(a_{22})-(a_{11})$ klein neben $(b_{22})-(b_{11})$, so wird der reelle Theil von $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ resp. $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$ überwiegen. Für $a_{22} = a_{11} = a_2$, d. h. für die Richtung einer Polarisationsaxe, kann man wiederum das System $[XY]$ einführen und erhält hier wegen des verschwindenden $[b_{12}]$ unendlich große reelle Werthe $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ resp. $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$, somit also streng lineär nach den Richtungen $[X]$ und $[Y]$ polarisirtes Licht.

Auch hier ist der Uebergang, der von dem Zustand in grösserer Entfernung zu dem in der Polarisationsaxe führt, noch aufzuklären. —

Wir wenden uns nunmehr der ganz allgemeinen Untersuchung des Schwingungszustandes in der Nähe der Polarisationsaxen zu und betrachten dabei ein Bereich in so naher Umgebung der Polarisationsaxe A_1, daß der Winkel U_1 der Fortpflanzungsrichtung Z

Digitized by Google

gegen A_1 neben Eins vernachlässigt werden kann und V_1, V_2 als constant gelten dürfen. U_2 setzen wir $= 2o+u$ und sehen u als klein von erster Ordnung neben $2o$ an. Eine dichte Nachbarschaft der andern Polarisationsaxe A_2 oder einer Absorptionsaxe B_2 bei A_1 ist dabei also ausgeschlossen, hat aber auch bisher keine practische Bedeutung.

Unter den gemachten Annahmen sind $[b_{11}]$ und $[b_{22}]$ gemäß (18) merklich constant; (a_{22}) und (a_{11}) aber nehmen nach (16), da die Beziehung (29) besteht, bis auf Größen zweiter Ordnung exclusive die Werthe an

43) $(a_{22}) = a_2+\frac{1}{2}(a_1-a_3)(U_1-u)\sin 2o$, $(a_{11}) = a_2-\frac{1}{2}(a_1-a_3)(U_1+u)\sin 2o$,

was wir abkürzen in

44) $(a_{22}) = a_0+aU_1$, $(a_{11}) = a_0-aU_1$, wobei $a_0 = a_2-au$.

Nach unserer Festsetzung (10) ist dabei a eine stets positive Größe und außerdem a_0 von a_2 wegen des stets kleinen $(a_1-a_3)/a_2$ nur um eine kleine Größe von höherer als erster Ordnung verschieden.

Das Bereich, welches durch diese Vernachlässigungen begrenzt wird, ist natürlich ziemlich eng, wenn man auch die Genauigkeit der in Betracht kommenden Beobachtungen niedrig ansetzt. Indessen kann man doch die abzuleitenden Resultate, in denen a_0 keine wesentliche Rolle spielt, eine erhebliche Strecke über die gezogenen Grenzen hinaus verwerthen, wenn man sich daran erinnert, daß in den strengen Formeln (16)

$$\frac{1}{2}(a_1-a_3)\sin U_1 \sin U_2 \text{ an Stelle von } aU_1,$$

steht, und für $[b_{11}]$, $[b_{22}]$ die Formeln (18) gelten. Es sind demgemäß in weiterer Entfernung von A_1 die Parameter a, $[b_{11}]$, $[b_{22}]$ als langsam veränderlich anzusehen, und zwar in einer Weise, die dem einzelnen Krystall individuell ist. Statt a als variirend zu betrachten, kann man auch $\sin U_1 \sin U_2 = W_1$ statt U_1 als Variable eingeführt denken, was darauf herauskommt, daß an Stelle des wirklichen Raumes ein in leicht ersichtlicher Weise deformirter der Betrachtung unterzogen wird. Demgemäß werden wir in Annäherung bei der Discussion der Resultate auch weiter von A_1 abliegende Richtungen in Betracht ziehen dürfen.

4) Das Gesetz der Absorptionen. Die Formeln (35), welche die Grundlage unserer Betrachtungen bilden, enthalten die beiden Unbekannten ω^2 und $\varkappa$, resp. $2\omega^2\varkappa$. Für die Absorption einer Welle ist bekanntlich das Verhältniß $\varkappa/\omega$, resp. bei Multiplication mit der Geschwindigkeit v im leeren Raum, das Product

Digitized by Google

$n\varkappa$ (der Absorptionscoefficient) maßgebend, in dem n den Brechungsindex bezeichnet. Die Größe $2\omega^2\varkappa$ verläuft im Allgemeinen ganz abweichend von $\varkappa/\omega$. Indessen in dem von uns zunächst abgegrenzten Bereich um A_1, wo, wie sich zeigen wird, ω^2 nur um eine Größe von mindestens erster Ordnung von der Constanten a_2 verschieden ist, können wir zumeist die Abweichungen des Verlaufes ignoriren und den Parameter

45) $$2\omega^2\varkappa = k$$

direct als für die Absorption maßgebend betrachten. In größeren Entfernungen von A_1 wird dies Verfahren wenigstens bei qualitativen Ueberlegungen zulässig sein. Wir werden sehen, daß ω^2 und k in dem betrachteten Bereich sehr einfache und elegante Gesetze befolgen.

Legt man die X-Axe wieder in die Ebene ZP (s. S. 52), so verschwindet (a_{12}), und es wird aus der ersten Gleichung (35) bei Berücksichtigung von (19)

46) $$(a_0-\omega^2)^2 = ([b_{11}]-k)([b_{22}]-k)+a^2U_1^2 = r^2,$$

wobei r eine neue Bezeichnung ist, und es folgt

47) $$\omega^2 = a_0 \pm r.$$

Dabei entspricht das obere Zeichen, wenn r als absolute Größe geführt wird, ersichtlich derjenigen Welle, die bei durchsichtigen Krystallen als ordinäre bezeichnet wird und hier als (1) characterisirt ist, das untere der extraordinären (2).

Die zweite Gleichung (35) wird hiernach zu

48) $$\begin{aligned}&(\pm r+aU_1)([b_{11}]\sin^2\psi+[b_{22}]\cos^2\psi-k)\\&+(\pm r-aU_1)([b_{11}]\cos^2\psi+[b_{22}]\sin^2\psi-k) = 0,\end{aligned}$$

oder nach einfacher Reduction zu

49) $$\begin{aligned}&(([b_{11}]-k)([b_{22}]-k)+a^2U_1^2)([b_{11}]+[b_{22}]-2k)^2\\&= a^2U_1^2([b_{22}]-[b_{11}])^2\cos^2 2\psi.\end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades in Bezug auf k, die sich auf eine biquadratische reducirt durch die Substitution

50) $$k = \tfrac{1}{2}([b_{22}]+[b_{11}])+p = \gamma+p;$$

ihr schließen wir bequem die Abkürzungen an

51) $$aU_1 = \alpha, \quad \tfrac{1}{2}([b_{22}]-[b_{11}]) = \beta, \quad 2\psi = \chi,$$

wobei β nach (18) und (10) als positiv zu betrachten ist.

Digitized by Google

Wir erhalten so

$$p^4 + p^2(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha^2 \beta^2 \cos^2\chi, \tag{52}$$

woraus sich ergiebt, da $p^2 > 0$ sein muß,

$$p^2 = \tfrac{1}{2}[(\beta^2 - \alpha^2) + \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2\cos^2\chi}]. \tag{53}$$

Die Discussion knüpft man am besten an die Formel (52) an. Construirt man alle vorkommenden Richtungen durch das Centrum einer Kugel vom Radius a, und beschränkt sich gemäß der Annahme auf die so nahe Umgebung der Polarisationsaxe A_1, daß das in Betracht kommende Stück der Kugel von einer Ebene nicht merklich abweicht, so kann man die Vorgänge in einer ebenen Figur (s. Fig. 4) darstellen. In dieser Ebene ist $aU_1 = \alpha$ der Abstand, der zwischen dem Schnittpunkt A_1 der Polarisationsaxe und dem Schnittpunkt Z der Wellennormale mit der Kugelfläche liegt, $A_1 \longrightarrow A_2$ die Spur der Ebene der Polarisationsaxen, wobei A_2 als sehr fern liegend zu denken ist. Ferner kann man in der Figurebene die Projectionen der Z zugehörigen Richtung P und der nach Annahme in dem betrachteten Bereich der festen Richtung Q durch A_1 zeichnen, deren Winkel mit der Geraden $A_1 A_2$ nur um Größen zweiter Ordnung von $\frac{1}{2}I$ und $K = \frac{1}{2}I + \psi$ abweichen. Construirt man weiter noch eine Richtung, die mit $A_1 \longrightarrow A_2$ den Winkel $2K$ einschließt und verlängert sie durch A_1 hindurch, so macht α mit dieser Verlängerung den Winkel

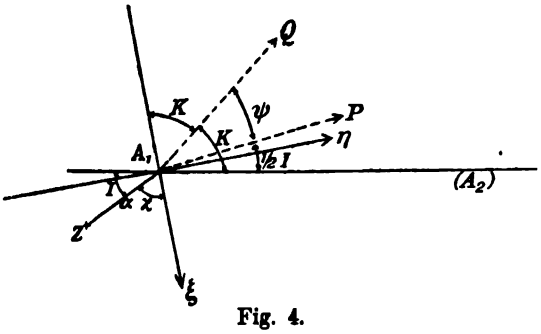


Fig. 4.

$$\chi = 2\psi = 2K - I. \tag{54}$$

Wählt man die letztere Richtung zur ξ-, die dazu normale zur η-Axe, so ist

$$\alpha\cos\chi = \xi, \quad \alpha\sin\chi = -\eta, \tag{55}$$

und Formel (52) nimmt die Gestalt an

$$p^4 + p^2(\xi^2 + \eta^2 - \beta^2) = \xi^2\beta^2 \tag{56}$$

oder

Digitized by Google

57) $$1 = -\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2 - p^2}.$$

Dies zeigt, daß die Curven gleicher Werthe p confocale Hyperbeln sind, deren Brennpunkte die Coordinaten $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$ besitzen. Jeder Hyperbel entsprechen zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von p, und somit zwei k, die das constante Mittel γ besitzen. Werthe von p^2, die β^2 übertreffen, kommen nicht vor; k liegt also in dem von der Formel umspannten Bereich überall zwischen $[b_{11}]$ und $[b_{33}]$.

Trägt man p als dritte Coordinate ζ zu ξ und η auf, so erhält man eine Oberfläche mit zwei Hüllen, die durch die $\xi\eta$-Ebene symmetrisch getheilt wird. Die Fläche wird durch die $\xi\zeta$-Ebene in den Geraden $\eta = 0$, $\zeta = \pm\beta$ geschnitten, durch die $\eta\zeta$-Ebene aber in einer Curve, die aus einem Kreis und einer Geraden zusammengesetzt ist; denn Formel (53) ergiebt für $\chi = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha^2 = \eta^2$

58) $$\begin{aligned} &\text{für } \eta^2 < \beta^2, \quad \eta^2 + \zeta^2 = \beta^2, \\ &\text{für } \eta^2 > \beta^2, \qquad \zeta = 0. \end{aligned}$$

Die beiden Hüllen der Fläche $p = f(\xi, \eta)$ durchdringen sich also in den Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 > \beta^2$, und die Punkte $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$ sind für die zweiwerthige Function $p = f(\xi, \eta)$ die Windungspunkte.

Um das Verhalten von $\zeta = p$ in der η-Axe zu untersuchen, bilden wir noch für $\xi = 0$

59) $$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \frac{\sqrt{(\eta^2 + \zeta^2 - \beta^2)(\beta^2 - \zeta^2)^3}}{\eta^2\beta^2 - (\beta^2 - \zeta^2)^2}.$$

Es ist hiernach für alle Stellen des Schnittkreises von der Gleichung $\eta^2 + \zeta^2 = \beta^2$ naturgemäß $\partial\zeta/\partial\xi = 0$; dagegen gilt für die Stellen der Schnittgeraden $\zeta = 0$, $\eta^2 > \beta^2$

60) $$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{\eta^2 - \beta^2}}.$$

Die beiden Hüllen der Oberfläche für p durchkreuzen einander also unter um so kleinerem Winkel, je weiter vom Coordinatenanfang entfernt die betrachtete Stelle liegt.

In Figur 5 sind die beiden Schnitte der Oberfläche für p mit der $\xi\zeta$- und $\eta\zeta$-Ebene durch ausgezogene Linien dargestellt. Außerdem ist in einer zur $\xi\eta$-Ebene parallelen Ebene $e_1 e_2 e_3 e_4$ die ihr zugehörige Schnittcurve, nämlich eine der Hyperbeln $p = \text{Const.}$, mit punktirten Linien eingetragen. Fällt diese Ebene in die $\xi\eta$-Ebene, so werden die Hyperbeln zu den Geraden $\xi = 0$, $\mp\infty \lesseqgtr \eta \lesseqgtr \mp\beta$;

Digitized by Google

entfernt sie sich von ihr um $\zeta = \pm\beta$, so werden sie zu den Geraden $\eta = 0$, $\zeta = \pm\beta$.

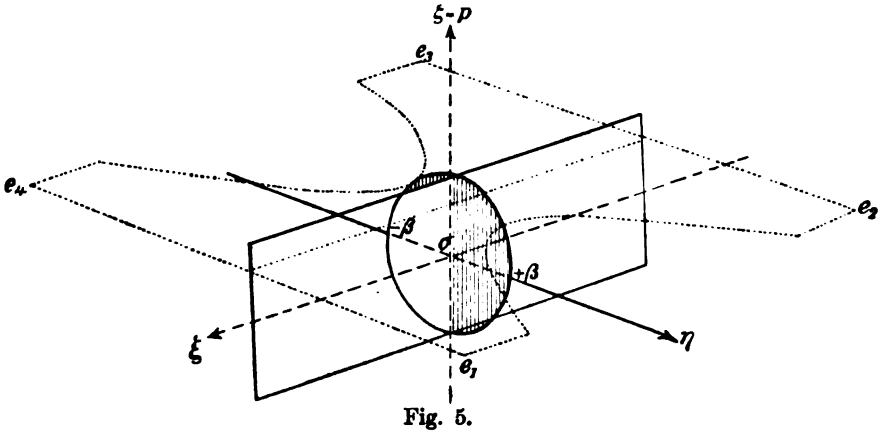


Fig. 5.

Aus der Oberfläche für p folgt die für k, indem man den Anfangspunkt der ζ um die Strecke $-\frac{1}{2}([b_{22}]+[b_{11}]) = -\gamma$ verschiebt.

Zum Schluß dieser Darstellung mag nochmals daran erinnert werden, daß gemäß dem auf S. 59 Gesagten die Größe k in der Umgebung einer Polarisationsaxe mit dem Absorptionsindex $n\varkappa$ nahezu proportional ist und somit ganz directe practische Bedeutung besitzt.

5) Das Gesetz der Geschwindigkeiten. Um zu erkennen, wie in der Nähe der Polarisationsaxe A_1 die Geschwindigkeit ω variirt, knüpfen wir an die Formel (47) an und setzen darin für r den Werth (46), der sich nach Einführung von p gemäß (50) und der Abkürzungen (51) reducirt auf

$$61) \qquad r^2 = p^2 + \alpha^2 - \beta^2.$$

Hiernach resultirt

$$62) \qquad \omega^2 = a_0 \pm \sqrt{p^2 + \alpha^2 - \beta^2},$$

was bei Benutzung von (53) schließlich ergiebt

$$63) \qquad \omega^2 = a_0 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2\cos^2\chi} + \alpha^2 - \beta^2)}.$$

Da α und β von höherer als erster Ordnung klein sind, so unterscheidet sich ω^2 jedenfalls um ein Glied von höherer als erster Ordnung von a_0 und a_2, wie dies auf S. 59 bereits benutzt worden ist.

Die zwei derselben Fortpflanzungsrichtung entsprechenden Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2 werden einander gleich, falls

$$64) \qquad 2r^2 = \sqrt{(\beta^2-\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2\cos^2\chi} + \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

Digitized by Google

ist. Da von der Wurzel der absolute Werth zu nehmen ist, so ist diese Gleichung für alle Richtungen erfüllt, die den Bedingungen genügen

65) $$\cos\chi = 0, \quad \beta^2 \gtrless \alpha^2.$$

Benutzt man wieder die Darstellung von S. 60 und setzt demgemäß $\alpha\cos\chi = \xi$, $-\alpha\sin\chi = \eta$, so bestimmen die Formeln das Stück der η-Axe, für das $-\beta < \eta < +\beta$ ist.

Die beiden Geschwindigkeiten werden somit bei einem absorbirenden Krystall einander gleich für zwei ganze Fächer von Richtungen, die (nahezu) je in einer Ebene liegen und je eine Polarisationsaxe als Mittellinie besitzen.

Im Uebrigen finden constante Werthe r und somit constante Geschwindigkeitsdifferenzen $\omega_1 - \omega_2$ statt in den Curven von der Gleichung

66) $$1 = \frac{\xi^2}{r^2} + \frac{\eta^2}{r^2+\beta^2};$$

dieselben sind Ellipsen mit den Brennpunkten an den Stellen $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$, in die auch die Brennpunkte des Hyperbelsystemes $p =$ Const. fallen. Jeder Ellipse entsprechen zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von r, und somit zwei Geschwindigkeiten, deren Quadrate das Mittel a_0 besitzen.

Trägt man r als dritte Coordinate ζ senkrecht zu ξ und η auf, so erhält man wiederum eine Oberfläche mit zwei Hüllen, welche durch die $\xi\eta$-Ebene symmetrisch getheilt wird. Ihre Schnittcurve mit der $\xi\zeta$-Ebene ist das Paar von um 45° gegen die ξ-Axe geneigten Geraden

67) $$\eta = 0, \quad \zeta = \pm\xi;$$

ihre Schnittcurve mit der $\eta\zeta$-Ebene ist für $-\beta < \eta < +\beta$ die η-Axe selber, für $\mp\infty \lesseqgtr \eta \lesseqgtr \mp\beta$ dagegen die gleichseitige Hyperbel

68) $$\xi = 0, \quad \beta^2 = \eta^2 - \zeta^2.$$

Es durchdringen sich sonach die beiden Hüllen der Oberfläche für r in der Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$, und es sind die Stellen $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$ die Windungspunkte, wie von p, so auch von der zweiwerthigen Function $r = f(\xi, \eta)$.

In Figur 6 sind die Schnittcurven der Oberfläche für r mit der $\xi\zeta$- und der $\eta\zeta$-Ebene durch ausgezogene Linien dargestellt; außerdem ist eine zur $\xi\eta$-parallele Ebene e_1, e_2, e_3, e_4 angedeutet mit der darin liegenden punktirten Schnittcurve, nämlich der betreffenden Schnittellipse $r =$ Const. Fällt die Ebene in die $\xi\eta$-

Digitized by Google

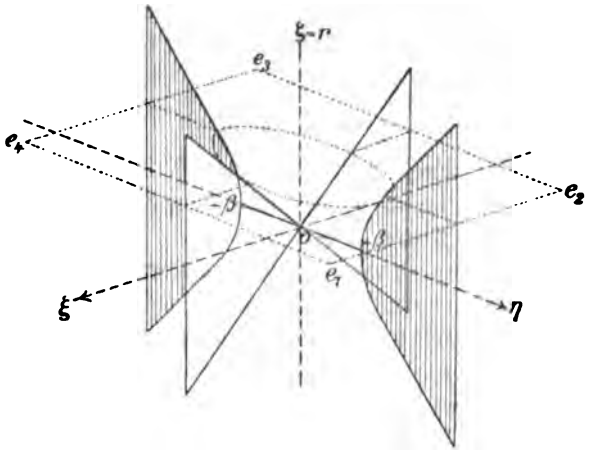


Fig. 6.

Ebene, so wird die Ellipse zur Geraden $\xi = 0$, $-\beta < \eta < +\beta$, entfernt sie sich nach der einen oder nach der andern Seite, so nehmen die Ellipsenaxen entsprechend zu, während die Brennpunkte den constanten Abstand 2β behalten.

Aus der Oberfläche für r folgt nach (47) diejenige für ω^2, indem man jede ζ-Coordinate um den Betrag a_0 vergrößert, der sich aus (44) zu $a_2 + au$ ergiebt. u ist aber nach dem der Gleichung (43) Vorausgeschickten gleich $U_2 - 2o$, d. h. in der hier benutzten Annäherung gleich $U_1 \cos I$; demnach wird schließlich

$$a_0 = a_2 + \alpha \cos I = a_2 + \xi \cos 2K - \eta \sin 2K.$$

Die Fläche für ω^2 ist somit gegenüber derjenigen für r sowohl gehoben, als deformirt, resp. durch Drehung um eine zu $A_1 A_2$ normale Axe geneigt. —

Eine besondere Untersuchung verlangt die Frage, wie die beiden Wurzeln für k (resp. p) und ω (resp. r) einander zuzuordnen sind.

Aus (48) folgt unter Rücksicht auf die Abkürzungen (50) und (51)

$$\pm r(\gamma - k) + \alpha\beta \cos \chi = 0,$$

während zugleich nach (47)

$$\omega^2 = a_0 \pm r$$

ist. Wir haben somit bei Einführung von $\alpha \cos \chi = \xi$ ganz allgemein

$$\omega^2 = a_0 + \frac{\beta\xi}{k - \gamma}.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt, daß, wenn man wie Seite 59 diejenige Welle, deren Geschwindigkeit durch die obere Hülle der Oberfläche von der Gleichung (66) gegeben ist, mit (1) bezeichnet, dann für $\xi \gtrless 0$, $k_1 \gtrless \gamma$ oder $p_1 \gtrless 0$ sein muß; wenn die andere Welle mit (2) bezeichnet wird, analog für $\xi \gtrless 0$, $k_2 \lesseqgtr \gamma$ oder $p_2 \lesseqgtr 0$. Es entsprechen sich somit die oberen und die unteren Hüllen der beiden Flächen für ω^2 (oder r) und für k (oder p) nicht gegenseitig, sondern der oberen Hülle für ω^2 entspricht für k ein Gebilde, zusammengesetzt aus der Hälfte $\xi > 0$ der oberen und der Hälfte $\xi < 0$ der unteren Hülle, und umgekehrt. Die zusammengehörigen Hälften hängen nur längs der Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 > \beta^2$ zusammen und besitzen längs $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$ freie Ränder. Diese complicirte Beziehung ist bei der Discussion specieller Fälle wohl zu beachten.

6) Die Gesetze der Polarisationen. Zur Untersuchung des Polarisationszustandes der beiden Wellen in der Nähe der Polarisationsaxe A_1 ist die Formel (33) heranzuziehen, die ganz allgemein complexe Verhältnisse $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ und somit elliptische Polarisation fordert. In der That liefert sie

$$69) \qquad \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} = -\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}\right)^2+1}\right).$$

Die Schwingungsellipse ist auf ihre Hauptaxen bezogen, wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ sich rein imaginär darstellt; sie degenerirt zur Geraden, wenn der Werth von $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ zu $0.i$ oder ∞i wird. $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ wird aber dann rein imaginär, wenn $(a_{11}-a_{22})/2a_{12}$ rein imaginär und zwar absolut größer als i ist. Nun ist

$$70) \qquad \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} = \frac{(a_{11}-a_{22})+i(b_{11}-b_{22})}{2(a_{12}+ib_{12})},$$

somit verlangt die gestellte Bedingung, daß

$$71) \qquad \frac{a_{22}-a_{11}}{b_{22}-b_{11}} = -\frac{b_{12}}{a_{12}}$$

und

$$72) \qquad |a_{12}(b_{11}-b_{22})-b_{12}(a_{11}-a_{22})| \geqq 2(a_{12}^2+b_{12}^2),$$

oder, wenn man

$$73) \qquad a_{22}-a_{11} = +2qb_{12}, \quad b_{22}-b_{11} = -2qa_{12}$$

setzt, daß

$$74) \qquad |q| \geqq 1$$

ist.

Digitized by Google

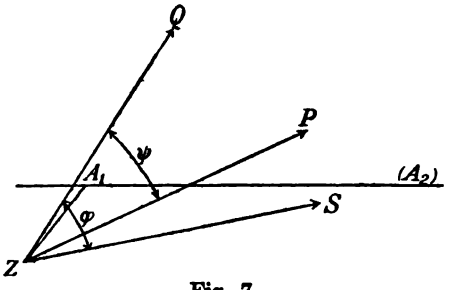


Fig. 7.

Um die Lage der Schwingungsellipsen näher zu untersuchen, ist es vortheilhaft, für die X-Axe neben den S. 52 und 53 definirten speciellen Richtungen P und Q noch eine dritte S einzuführen, die mit der in dem betrachteten Bereiche fe s t en Richtung Q einen, gleichsinnig mit ψ gerechneten, Winkel φ einschließt. Bei Anwendung dieses (allgemeinen) Coordinatensystemes (XY ohne Klammer) ergeben sich für die Parameter $a_{\lambda\lambda}$ und $b_{\lambda\lambda}$ Ausdrücke, die aus den in (19) enthaltenen folgen, wenn darin ψ resp. mit $\psi-\varphi$ und φ vertauscht wird. Ist nämlich $\varphi = 0$, resp. $= +\psi$, so geht $a_{\lambda\lambda}$ in $[a_{\lambda\lambda}]$, resp. in $(a_{\lambda\lambda})$, und zugleich $b_{\lambda\lambda}$ in $[b_{\lambda\lambda}]$ resp. in $(b_{\lambda\lambda})$ über.

Hiernach gilt nun auch, falls wieder abkürzend

$$\tfrac{1}{2}((a_{22})-(a_{11})) = aU_1 = \alpha, \quad \tfrac{1}{2}([b_{22}]-[b_{11}]) = \beta$$

gesetzt wird,

75)
$$\begin{aligned} a_{22}-a_{11} &= 2\alpha\cos 2(\varphi-\psi), & b_{22}-b_{11} &= 2\beta\cos 2\varphi, \\ a_{12} &= \alpha\sin 2(\varphi-\psi), & b_{12} &= \beta\sin 2\varphi, \end{aligned}$$

und die Bedingung (71) nimmt die Formen an

76)
$$\alpha^2\sin 4(\varphi-\psi)+\beta^2\sin 4\varphi = 0,$$

oder

77)
$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{\alpha^2\sin 4\psi}{\alpha^2\cos 4\psi+\beta^2} = \frac{\alpha^2\sin 2\chi}{\alpha^2\cos 2\chi+\beta^2},$$

und endlich bei Einführung der Coordinaten

$$\xi = \alpha\cos\chi, \quad \eta = -\alpha\sin\chi,$$

78)
$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{-2\xi\eta}{\xi^2-\eta^2+\beta^2}.$$

$\operatorname{tg} 4\varphi$ ist somit für b e i d e Wellen constant $= t$ längs derselben Curven

79)
$$(\xi^2-\eta^2)t+2\xi\eta+\beta^2 t = 0,$$

d. h. längs gleichseitiger Hyperbeln mit dem Coordinatenanfang als Centrum, deren Hauptaxen gegen das Coordinatenkreuz $\xi\eta$ um den Winkel $\delta = \frac{1}{4}\pi-2\varphi$ oder $\frac{3}{4}\pi-2\varphi$ gedreht sind und die

Digitized by Google

Größe $\beta\sqrt{\pm\cos 2\delta} = \beta\sqrt{\pm\sin 4\varphi}$ haben. Für $\operatorname{tg} 4\varphi = \infty$ fallen beide Axenkreuze zusammen und die Axen der Hyperbeln sind gleich β; für $\operatorname{tg} 4\varphi = 0$ sind die Kreuze um 45° gegeneinander gedreht und die Hyperbeln degeneriren zu den ξ- und η-Axen.

Alle Hyperbeln aber gehen durch die Punkte $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$; die durch letztere gegebenen Richtungen besitzen also die Eigenschaft, daß in ihnen die Axenrichtungen der Schwingungsellipsen unbestimmt werden, was offenbar auf die Verwandlung der Ellipsen in Kreise hinweist.

In Fig. 8 sind die Hyperbeln $t = \text{Const.}$ mit gestrichelten Linien eingetragen. Um ihre Bedeutung noch klarer hervortreten zu lassen, sind auf einem umfassenden Kreise durch Doppelpfeile diejenigen Richtungen markirt, welche den Winkel I zwischen U_1 und U_2 (s. Fig. 2) halbiren, in denen also, hinlänglich weit von der Polarisationsaxe A_1 entfernt, die lineäre Polarisation der dem oberen Blatte der $\xi\eta$-Ebene zugeordneten (ordinären) Welle (1) stattfindet, falls, wie immer in den hier aufgeführten Figuren, die positiven Richtungen a_2 und also auch A_2 rechts von A_1 liegen.

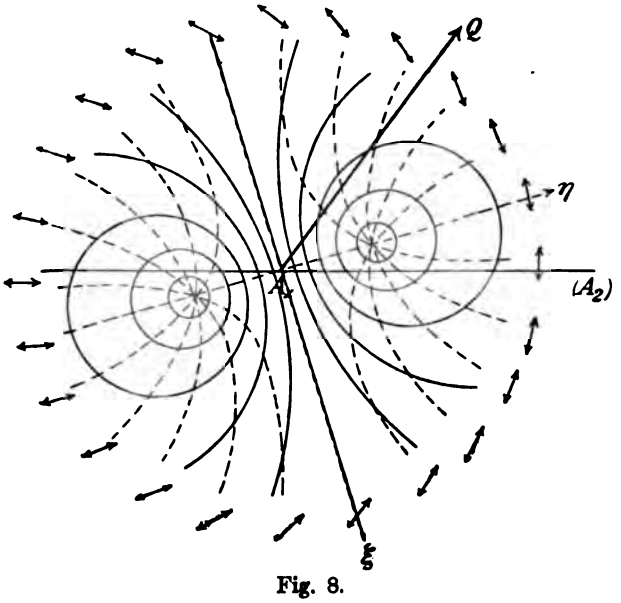


Fig. 8.

Diese Pfeile bestimmen somit auf jeder Hyperbel die Lage der großen Ellipsenaxe für die Welle (1) bis an einen der Kreuzungspunkte $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$ heran. Geht man auf einer Hyperbel durch einen dieser Kreuzungspunkte hindurch, ohne das obere Blatt der $\xi\eta$-Ebene zu verlassen, so behält zwar gemäß dem oben

Digitized by Google

Gesagten t, d. h. $\operatorname{tg} 4\varphi$, seinen Werth auch weiterhin noch bei, aber die Axenrichtungen drehen sich um 45°. Geht man beim Passiren eines Kreuzungspunktes aus dem oberen in das untere Blatt über, so drehen sich bei gleichfalls ungeändertem t die Ellipsen in entgegengesetzter Richtung, so daß unten und oben allenthalben die großen Ellipsenaxen gekreuzt liegen.

Uebrigens kann man auch auf anderen Wegen, als auf den Hyperbeln $t = \text{Const.}$, aus dem einen in das andere Blatt gelangen, denn beide Blätter hängen längs derselben Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$ zusammen, wie die beiden Blätter für ω resp. r. —

Was den Werth von q^2 angeht, so erhält man denselben in verschiedenen symmetrischen Formen aus (73), d. h. aus

$$80) \qquad 4q^2 = -\frac{(a_{22}-a_{11})(b_{22}-b_{11})}{a_{12}b_{12}},$$

indem man die Ausdrücke (75) heranzieht; es ergiebt sich nämlich zunächst

$$81) \qquad q^2 = \operatorname{ctg} 2\varphi \operatorname{ctg} 2(\psi-\varphi),$$

und bei Benutzung von (77) nach einfacher Umformung auch

$$82) \qquad q^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\sqrt{\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2\cos 2\chi}}{\alpha^2+\beta^2-\sqrt{\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2\cos 2\chi}},$$

was unter Berücksichtigung von (53) schließlich übergeht in

$$83) \qquad q^2 = \frac{\alpha^2+p^2}{\beta^2-p^2}.$$

Diese Größe q ist nun maßgebend für das Axenverhältniß der Schwingungsellipsen, denn aus (69) folgt nach (73) sogleich

$$84) \qquad \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} = -i(q \pm \sqrt{q^2-1}).$$

Da das Product der beiden hierdurch angegebenen Werthe $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ gleich -1 ist, so sind die beiden derselben Wellennormalen entsprechenden Schwingungsellipsen einander ähnlich, dabei gekreuzt gelegen und in gleicher Richtung umlaufen. Setzen wir — was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann —

$$85) \qquad \mathfrak{G} = G, \quad \mathfrak{F} = iF,$$

wobei G und F reelle Größen sind, so stellen G und F die Halbaxen der Schwingungsellipsen dar, und es gilt

$$86) \qquad \frac{G}{F} = q \pm \sqrt{q^2-1}, \quad q = \frac{F^2+G^2}{2FG}.$$

Digitized by Google

Je nachdem $q \gtrless 0$ ist ergiebt sich hiernach eine $\pm$ Rotationsrichtung der elliptischen Schwingungen.

Zieht man den Werth (82) von q^2 heran, so ergiebt sich, daß q und somit das Axenverhältniß G/F constant ist auf den Curven von der Gleichung

87) $$(\xi^2+\eta^2+\beta^2) \pm \eta\beta \frac{1+q^2}{q} = 0,$$

d. h. also auf Kreisen um die Stellen

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = \pm\beta \frac{1+q^2}{2q}$$

als Mittelpunkte und von den Radien $R = \beta \frac{q^2-1}{2q}$.

Da hieraus die Beziehung

$$\eta_0^2 - \beta^2 = R^2$$

folgt, so ergiebt sich ferner, daß die vom Coordinatenanfang gezogenen Tangenten an alle Kreise dieselbe Länge β besitzen, daß somit alle Kreise einen Hauptkreis vom Radius β um den Coordinatenanfang A_1 als Centrum rechtwinkelig schneiden.

Den Richtungen $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$ (resp. den sie markirenden unendlich kleinen Kreisen) entspricht $q = 1$, also circulare Schwingung; der Ebene $\eta = 0$ (resp. der sie markirenden Geraden) entspricht $q = \infty$ und somit lineäre Schwingung. Beim Durchgang durch diese Ebene kehren die Rotationsrichtungen ihre Vorzeichen um, so daß sie auf der einen Seite derselben positiv, auf der anderen Seite negativ sind.

In der That finden sich aus (73) und (75) die unsymmetrischen Formeln

88) $$q = \frac{\alpha \cos(2\varphi-\chi)}{\beta \sin 2\varphi} = -\frac{\beta \cos 2\varphi}{\alpha \sin(2\varphi-\chi)},$$

welche bei Anwendung auf die Stellen

$\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$ resp. $\alpha = \beta$, $\chi = \mp\frac{1}{2}\pi$ den Werth $q = \mp 1$

ergeben, wobei das obere Zeichen einer negativen oder rechten, das untere einer positiven oder linken Rotation entspricht.

In Figur 8 sind neben den gestrichelten Hyperbeln $t = $ Const. die Kreise $q = $ Const. in ausgezogenen Linien eingetragen. Die Gerade $\eta = 0$ gehört beiden Systemen an. Bedenkt man, daß beim Uebergang von dieser Geraden zu den unendlich kleinen Kreisen die lineäre Polarisation sich allmählig in rechts und links circulare wandelt, so erhält man eine deutliche Vorstellung von den gesammten Polarisationsverhältnissen.

Digitized by Google

Es mag nochmals daran erinnert werden, daß die beiden Curvensysteme für beide Wellen in gleicher Weise Geltung haben, die eingezeichneten Pfeile aber direct nur für die ordinäre Welle (1), resp. für das obere Blatt der Doppelfläche. Für das untere Blatt, welches der extraordinären Welle (2) entspricht, und in welches man durch Ueberschreiten der Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$ gelangt, würden die Pfeile allenthalben gegen die gezeichneten um 90^0 verdreht einzutragen sein.

Nimmt man hinzu, daß die beiden Blätter für ω^2 resp. r gleichfalls in der Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$, diejenigen für k resp. p aber in den Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 > \beta^2$ zusammenhängen, so erkennt man, wie das ganze Verhalten einer Welle beim Passiren der Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$ sich stetig ändert. Insbesondere resultirt bei rhombischen Krystallen leicht der bekannte Satz, daß in der Ebene $A_1 A_2$ mit constant bleibender Geschwindigkeit auch die Absorption constant bleibt.

7) Ausgezeichnete Richtungen. Aus dem Gesagten geht hervor, daß die Richtungen $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$ außerordentlich merkwürdige und sie vor allen übrigen auszeichnende Eigenschaften besitzen. In ihnen wird sowohl die Geschwindigkeit, als auch die nach S. 59 für die Absorption maßgebende Größe k bei beiden Wellen gleich, und die Schwingungen finden in je zwei gleichsinnig umlaufenen Kreisbahnen statt. Man würde daher eine gewisse Berechtigung haben, jene Richtungen als die optischen Axen des absorbirenden Krystalles zu bezeichnen. Da indessen gewisse Bedenken vorliegen, diesen Namen den durch die Formeln (12) definirten Richtungen, die oben als Polarisationsaxen bezeichnet sind, trotz ihrer durch die Absorption modificirten Eigenschaften, zu entziehen, so ist es vielleicht besser, die neuen Axen im Hinblick auf die Thatsache, daß sie die Windungspunkte der Flächen für ω^2 und für k bestimmen, die Windungsaxen des absorbirenden Krystalles zu nennen.

Was die Lage der den beiden Polarisationsaxen zuzuordnenden Axenpaare im Krystalle angeht, so ist daran zu erinnern, daß ihre Ebenen in folgender Weise erhalten werden (s. Fig. 9). Man lege von jeder Polarisationsaxe nach jeder Absorptionsaxe eine Ebene und halbiere die entstehenden Winkel J_1, J_2. Heißen die Winkel dieser Halbirungsebenen mit der Ebene $A_1 A_2$ der Polarisationsaxen (im Sinne der Figur 9 gerechnet) K_1, K_2, so sind die Ebenen der Windungsaxen resp. um $2K_1 - \frac{1}{2}\pi$ und $2K_2 - \frac{1}{2}\pi$ gegen die Ebene $A_1 A_2$ der Polarisationsaxen geneigt. Die Winkel ϑ_1, ϑ_2 der Windungs- gegen die Polarisationsaxen sind nach S. 60 gegeben durch

Digitized by Google

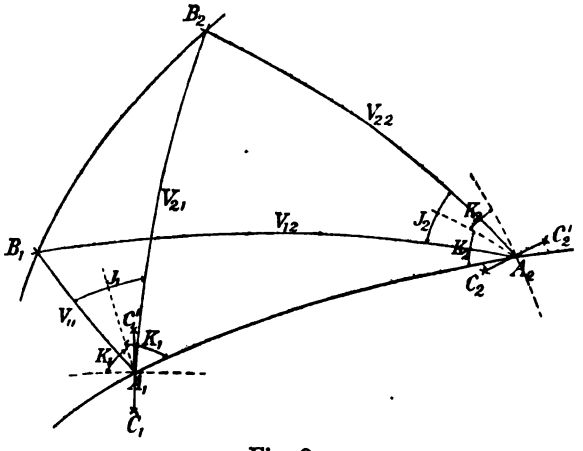


Fig. 9.

89) $$\vartheta_h = \frac{([b_{22}]-[b_{11}])_h}{(a_1-a_2)\sin 2o} = \frac{([b_{22}]-[b_{11}])_h}{\sqrt{2(a_1-a_2)(a_2-a_3)}},$$

wobei der Index h an der im Zähler stehenden Klammer darauf hinweist, daß $([b_{22}])-[b_{11}])$ in der Umgebung der beiden Polarisationsaxen verschiedene Werthe besitzt. In der That folgt aus (18)

90) $$[b_{22}]-[b_{11}] = (b_1-b_3)\sin V_1 \sin V_2,$$

unter den V_h die Winkel der betrachteten Richtungen gegen die Absorptionsaxen verstanden. Wir können daher, indem wir den Winkel zwischen A_h und B_k mit V_{hk} bezeichnen, auch schreiben

91) $$\vartheta_h = \frac{(b_1-b_3)\sin V_{1h}\sin V_{2h}}{\sqrt{2(a_1-a_2)(a_2-a_3)}}.$$

In der schematischen Figur 9 sind die Windungsaxen mit den Buchstaben C_1, C_1', C_2, C_2' versehen.

Die im Allgemeinen vorhandene Dissymetrie in der Lage der vier Windungsaxen mindert sich, wenn der Krystall eine höhere, als die trikline Symmetrie besitzt, in leicht erkennbarer Weise.

Da im Allgemeinen (b_1-b_3) sehr klein ist gegen die Wurzel im Nenner, so sind die Winkel ϑ_h zumeist gleichfalls sehr klein; die Windungsaxen trennen sich für die Beobachtung nicht merklich von den Polarisationsaxen, und ihre optischen Eigenschaften kommen direct wenig zur Geltung. Dementsprechend sind die Hyperbeln constanter Lage der Schwingungsellipsen in Figur 8 von Geraden durch den Punkt A_1 nicht wesentlich verschieden,

Digitized by Google

und die Axenrichtungen bestimmen sich durch nahe dasselbe Gesetz, wie die Richtungen lineärer Polarisation bei durchsichtigen Krystallen. Die Kreise in Figur 8 gehen alle nahezu durch den Punkt A_1, das Gesetz der Ellipticitäten wird daher einfacher. Auch die Curven constanter Geschwindigkeiten und constanter Absorptionen nehmen specielle Formen an, die von concentrischen Kreisen um den Punkt A_1 und von Geraden durch denselben wenig abweichen. Doch hat man insbesondere bei letzteren Curven zum vollen Verständniß der Vorgänge sich immer des allgemeinen und in Figur 5 dargestellten Schema zu erinnern. —

Für gewisse im Folgenden auftauchende Fragen wird es sich nützlich erweisen, den Verlauf der Functionen p, r und q speciell in der Umgebung einer Windungsaxe zu untersuchen. Wir setzen dazu

92) $$\alpha\cos\chi = \xi, \quad -\alpha\sin\chi = \eta = \beta+\eta', \quad \xi^2+\eta'^2 = \varrho^2$$

und betrachten ξ, η' und ϱ als klein neben β. Dann ergiebt sich aus (53) und (64) bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung

93) $$p = \beta(\varrho-\eta'), \quad r^2 = \beta(\varrho+\eta'),$$

ferner aus (70) und (75)

$$\frac{a_{22}-a_{11}}{2a_{12}} = \frac{\xi\cos 4\varphi-\eta'\sin 4\varphi+i(\beta+\eta')}{\beta+\xi\sin 4\varphi+\eta'(1+\cos 4\varphi)}.$$

Damit dies rein imaginär und größer als Eins sei, muß

94) $$\sin 4\varphi = -\xi/\varrho, \quad \cos 4\varphi = -\eta'/\varrho$$

sein; es folgt dann nach (73)

95) $$\frac{a_{22}-a_{11}}{2ia_{12}} = (1+\varrho/\beta) = -q$$

und nach (86)

96) $$\frac{G}{F} = -(1\mp\sqrt{2\varrho/\beta}).$$

Nun ist $k = \gamma \pm p$, $\omega^2 = a_0 \pm r$; bezeichnet außerdem ε denjenigen absoluten Werth von G/F, welcher kleiner als Eins ist und der sonach das Verhältniß der kleinen zur großen Axe der Schwingungsellipse darstellt, so ergiebt sich, falls man $\eta'/\varrho = \cos\sigma$ setzt,

97) $$k = \gamma \pm \sqrt{2\beta\varrho}\sin\tfrac{1}{2}\sigma, \quad \omega^2 = a_0 \pm \sqrt{2\beta\varrho}\cos\tfrac{1}{2}\sigma, \quad \varepsilon = 1-\sqrt{2\varrho/\beta}.$$

Ordnet man noch das obere und das untere Vorzeichen je einer Welle (1) und (2) zu, so folgt

98) $$k_1-k_2 = 2\sqrt{2\beta\varrho}\sin\tfrac{1}{2}\sigma, \quad \omega_1^2-\omega_2^2 = 2\sqrt{2\beta\varrho}\cos\tfrac{1}{2}\sigma, \quad 1-\varepsilon = \sqrt{2\varrho/\beta};$$

Digitized by Google

die letzten drei Ausdrücke werden also bei der Annäherung an eine Windungsaxe alle von derselben Ordnung in Bezug auf ϱ unendlich klein und das Verhältniß der ersten beiden zur dritten wird auch für keinen speciellen Werth von σ unendlich.

8) Allgemeine Formeln für den Durchgang ebener Wellen durch eine zu einer Polarisationsaxe normale Platte. Zum Zweck der Erklärung der Erscheinungen, die eine Platte aus einem pleochroitischen Krystall, normal zu einer Polarisationsaxe geschnitten, beim Hindurchblicken mit oder ohne Polarisationsinstrumente zeigt, betrachten wir in der bekannten Weise die Platte als Stück einer Kugelschaale, in deren Centrum sich das Auge des Beobachters befindet und auf die von außen her Licht normal auffällt. Hier durchsetzen alle Strahlen die Platte normal, welche Abweichung von der Wirklichkeit die Theorie außerordentlich vereinfacht und die Resultate kaum merklich beeinflußt, so lange es sich um der Polarisationsaxe in der oben eingeführten Weise benachbarte Richtungen handelt.

Nach dem Inhalt der vorstehenden allgemeinen Entwickelungen pflanzen sich in jeder Richtung eines pleochroitischen Krystalles zwei elliptisch polarisirte Wellen (1) und (2) mit gekreuzter Lage der Schwingungsellipsen fort; über das Gesetz, welches die Axenverhältnisse ε_1 und ε_2 befolgen, wollen wir aus einem bestimmten Grunde zunächst noch keinerlei Annahmen machen.

Benutzen wir ein XY-Coordinatensystem, dessen X-Axe mit der großen Axe der Schwingungsellipse (1) zusammenfällt, und verstehen unter ε_1 und ε_2 zwei ächte Brüche, so sind die reellen Schwingungscomponenten innerhalb der Platte oder Kugelschaale in der Form anzusetzen

$$99) \qquad \begin{aligned} u &= c_1 e^{-k_1\zeta_1}\cos T_1 - c_2\varepsilon_2 e^{-k_2\zeta_2}\sin T_2, \\ v &= c_1\varepsilon_1 e^{-k_1\zeta_1}\sin T_1 + c_2 e^{-k_2\zeta_2}\cos T_2, \end{aligned}$$

wobei

$$100) \qquad T_\lambda = 2\pi(t/\tau - z/\lambda_\lambda) + \delta_\lambda, \quad \zeta_\lambda = \pi z/\tau\omega_\lambda^2$$

ist und die übrigen Bezeichnungen einer Erklärung nicht bedürfen.

Ist das einfallende Licht lineär polarisirt unter dem (im positiven Drehungssinn gerechneten) Azimuth ϑ gegen die X-Axe und mit der Amplitude c_0, so muß bei Vernachlässigung der Reflexion beim Eintritt in die Platte gelten:

$$101) \qquad \begin{aligned} c_0\cos\vartheta &= c_1(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\cos\delta_1 = \frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\sin\delta_2, \\ c_0\sin\vartheta &= -\frac{c_1}{\varepsilon_2}(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\sin\delta_1 = c_2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\cos\delta_2. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Hieraus folgt

$$102) \quad c_1^2 = \frac{c_0^2(\cos^2\vartheta + \varepsilon_2^2 \sin^2\vartheta)}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2}, \quad c_2^2 = \frac{c_0^2(\sin^2\vartheta + \varepsilon_1^2\cos^2\vartheta)}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2},$$

und

$$103) \quad \begin{aligned} c_1 c_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) &= \frac{c_0^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)}, \\ c_1 c_2 \sin(\delta_2 - \delta_1) &= \frac{c_0^2(\varepsilon_1\cos^2\vartheta + \varepsilon_2\sin^2\vartheta)}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2}. \end{aligned}$$

An diesen Formeln fällt auf, daß sie für die Amplituden c_1 und c_2 Ausdrücke liefern, die unendlich werden, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1$ ist, — ein Fall, der bei absorbirenden Krystallen in den Windungsaxen eintritt. Man möchte zunächst glauben, daß dies paradoxe Resultat durch die Vernachlässigung der Reflexion beim Eintritt in die Platte bedingt wäre. Dem ist indessen anscheinend nicht so: die Berücksichtigung der Reflexion bringt in dieser Hinsicht keine Aenderung. Die auf Grund der vorstehenden Formeln weiterhin abgeleiteten Ausdrücke für der Beobachtung zugängliche Intensitätswerthe nehmen zwar in den Windungsaxen die Form 0/0 an, lassen sich aber mit Hülfe der Formeln (98) berechnen und erweisen sich als endlich. Freilich werden sie unter Umständen unbestimmt, nämlich von der Richtung abhängig, in der man die Windungsaxe erreicht; indessen ist das wohl nur als der Grenzfall einer sehr schnellen Aenderung in der Umgebung der Windungsaxen aufzufassen, wo practisch allein ein mittlerer Werth der betr. Intensität beobachtbar ist. Es scheint demgemäß unbedenklich, mit den erhaltenen Ausdrücken (101) u. f. zu rechnen, wenngleich eine genaue Untersuchung der Vorgänge im Innern des Krystalles wünschenswerth bleibt. In der That ist es wahrscheinlich, daß alle Schwierigkeiten in Wegfall kommen, wenn man nicht die auf S. 56 eingeführte Annäherung, sondern die strengen Formeln benutzt. —

Vernachlässigt man den Verlust durch Reflexion auch beim Austritt aus der Platte von der Dicke l und setzt man eine Beobachtung ohne zweiten Polarisator voraus, so findet sich die wahrzunehmende Intensität proportional mit

$$104) \quad c^2 = c_1^2 e_1^2(1+\varepsilon_1^2) + c_2^2 e_2^2(1+\varepsilon_2^2) + 2c_1 c_2 e_1 e_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sin(\Delta_2 - \Delta_1),$$

wobei gesetzt ist

$$105) \quad e^{-k_\lambda \pi l/\tau\omega_\lambda^2} = e_\lambda, \quad 2\pi l/\lambda_\lambda - \delta_\lambda = \Delta_\lambda.$$

Durch Einführung der Ausdrücke (102) und (103) erhält man

Digitized by Google

hieraus

$$106) \quad c^2 = \frac{c_0^2}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2}[e_1^2(1+\varepsilon_1^2)(\cos^2\vartheta+\varepsilon_2^2\sin^2\vartheta)+e_2^2(1+\varepsilon_2^2)(\sin^2\vartheta+\varepsilon_1^2\cos^2\vartheta)$$
$$+2e_1e_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)((1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\Delta-(\varepsilon_1\cos^2\vartheta+\varepsilon_2\sin^2\vartheta)\cos\Delta)],$$

wobei

$$107) \quad \Delta = 2\pi l(1/\lambda_2-1/\lambda_1)$$

ist.

Wird dagegen die aus der Platte austretende Welle mit einem Analysator aufgefangen, dessen Polarisationsebene mit der X-Axe den Winkel ϑ' einschließt, (s. Fig. 10) so wird die beobachtbare Intensität proportional mit

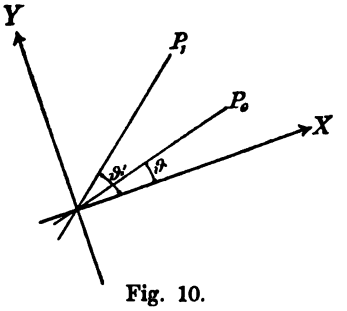


Fig. 10.

$$c'^2 = c_1^2e_1^2(\cos^2\vartheta'+\varepsilon_1^2\sin^2\vartheta')+c_2^2e_2^2(\sin^2\vartheta'+\varepsilon_2^2\cos^2\vartheta')$$
$$+c_1c_2e_1e_2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\sin 2\vartheta'\cos(\Delta_2-\Delta_1)$$
$$+2c_1c_2e_1e_2(\varepsilon_1\sin^2\vartheta'+\varepsilon_2\cos^2\vartheta')\sin(\Delta_2-\Delta_1),$$

was bei Rücksicht auf (102) und (103) übergeht in

$$c'^2 = \frac{c_0^2}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2}\{e_1^2(\cos^2\vartheta+\varepsilon_2^2\sin^2\vartheta)(\cos^2\vartheta'+\varepsilon_1^2\sin^2\vartheta')$$
$$108) \quad +e_2^2(\sin^2\vartheta+\varepsilon_1^2\cos^2\vartheta)(\sin^2\vartheta'+\varepsilon_2^2\cos^2\vartheta')$$
$$+[\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'-2(\varepsilon_1\cos^2\vartheta+\varepsilon_2\sin^2\vartheta)(\varepsilon_1\sin^2\vartheta'+\varepsilon_2\cos^2\vartheta')]e_1e_2\cos\Delta$$
$$+[(\varepsilon_1\cos^2\vartheta+\varepsilon_2\sin^2\vartheta)\sin 2\vartheta'+(\varepsilon_1\sin^2\vartheta'+\varepsilon_2\cos^2\vartheta')\sin 2\vartheta](1-\varepsilon_1\varepsilon_2)e_1e_2\sin\Delta\}.$$

Ist das einfallende Licht natürliches, so folgen die bezüglichen Intensitäten aus (106) und (108) durch den doppelten Mittelwerth für alle mögliche Werthe ϑ, wodurch man erhält

$$109) \quad c_n^2 = \frac{c_0^2}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2}[(1+\varepsilon_1^2)(1+\varepsilon_2^2)(e_1^2+e_2^2)-2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2e_1e_2\cos\Delta],$$

und

$$c_n'^2 = \frac{c_0^2}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)^2}[e_1^2(1+\varepsilon_2^2)(\cos^2\vartheta'+\varepsilon_1^2\sin^2\vartheta')+e_2^2(1+\varepsilon_1^2)(\sin^2\vartheta'+\varepsilon_2^2\cos^2\vartheta')$$
$$110) \quad +2e_1e_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)((1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\sin\vartheta'\cos\vartheta'\sin\Delta-(\varepsilon_1\sin^2\vartheta'+\varepsilon_2\cos^2\vartheta')\cos\Delta)].$$

Die letzte Gleichung kommt mit (106) in allem Wesentlichen überein, woraus eine weitgehende Uebereinstimmung zwischen den Erscheinungen folgt, die sich bei vor und bei hinter die Platte geschaltetem Polarisator ergeben.

Die definitiven Formeln (106) bis (110), über deren Berechnung für die Richtungen der Windungsaxen oben gesprochen ist,

Digitized by Google

sind außerordentlich complicirt. Eine ganz erhebliche Vereinfachung entsteht, wenn man sich rücksichtlich der von den Ellipticitäten ε_1 und ε_2 abhängigen Glieder auf die erste Ordnung beschränkt. ε_1 und ε_2 nehmen mit wachsender Entfernung von den Polarisationsaxen sehr schnell ab, und wir werden somit in mäßigen Abständen angenähert gültige Formeln erhalten, falls wir die quadratischen und die höheren Glieder vernachlässigen. Dies soll im Allgemeinen weiterhin geschehen; bei einigen speciellen Fragen wird indessen auf die vollständigen Formeln zurückzugreifen sein.

Die angenäherten Formeln lauten folgendermaßen:

$$111) \quad c_m^2 = c_0^2(e_1^2+e_2^2),$$

$$112) \quad \begin{cases} c^2 = c_0^2[e_1^2\cos^2\vartheta + e_2^2\sin^2\vartheta + e_1e_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sin 2\vartheta\sin\Delta], \\ c_m'^2 = c_0^2[e_1^2\cos^2\vartheta' + e_2^2\sin^2\vartheta' + e_1e_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sin 2\vartheta'\sin\Delta], \end{cases}$$

$$113) \quad \begin{aligned} c'^2 = c_0^2[&e_1^2\cos^2\vartheta\cos^2\vartheta' + e_2^2\sin^2\vartheta\sin^2\vartheta' + \tfrac{1}{2}e_1e_2\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'\cos\Delta \\ &+((\varepsilon_1\cos^2\vartheta+\varepsilon_2\sin^2\vartheta)\sin 2\vartheta'+(\varepsilon_1\sin^2\vartheta'+\varepsilon_2\cos^2\vartheta')\sin 2\vartheta)e_1e_2\sin\Delta]. \end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, daß die Größe

$$\Delta = 2\pi l(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1),$$

für die angenähert

$$\Delta = \pi l(\omega_1^2-\omega_2^2)/\tau\omega_m^3$$

geschrieben werden kann, wenn ω_m einen Mittelwerth aus ω_1 und ω_2 bezeichnet, nach S. 63 in der Strecke $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$ verschwindet und von ihr ausgehend nach allen Seiten hin anwächst.

9) Einfluß der Ellipticität der Schwingungen auf die Erscheinungen. Die von den Ellipticitäten ε_h lineär abhängenden Glieder spielen in den verschiedenen Formeln und demgemäß bei den verschiedenen Erscheinungen eine sehr verschiedene Rolle. In (111) treten sie garnicht auf, in (113) verbinden sie sich additiv einem nach Annahme beträchtlich größeren Glied, das in ähnlicher Weise von dem Argument Δ periodisch abhängt; bei der Beobachtung ohne jedes Polarisationsinstrument, sowie bei derjenigen mit Polarisator und Analysator kommt also die Ellipticität der Schwingungen nicht in merklicher Weise zur Geltung.

Dagegen zeigen die angenäherten Formeln (112) ebenso, wie die strengen (106) und (110), die Periodicität der Intensität mit dem Argument Δ ausschließlich in einem mit $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ proportionalen Glied; die Beobachtung mit Polarisator oder Analysator allein giebt also bei Anwendung convergirenden Lichtes

Digitized by Google

in der Umgebung einer optischen oder Polarisations-Axe nur dann abwechselnd helle und dunkle Ringe, wenn $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ von Null verschieden ist.

Die Fortpflanzung zweier elliptisch polarisirter Wellen, die für bestimmte Axen zu circularen werden, findet sich in der Natur in zwei verschiedenen Weisen vor; bei den natürlich-activen durchsichtigen Krystallen und bei allen magnetisch-activen Körpern sind die Ellipsen ähnlich bei entgegengesetzter Umlaufsrichtung: hier ist $\varepsilon_1+\varepsilon_2=0$, und die Ringe um die Axen verschwinden; bei absorbirenden Krystallen sind dagegen nach der Theorie gemäß (84) die Ellipsen ähnlich bei gleicher Rotationsrichtung: hier ist $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, also $\varepsilon_1+\varepsilon_2=2\varepsilon$, und es müssen bei geeigneten Werthen von ε Ringe um die Polarisationsaxen sichtbar werden.

Diese Ringe sind nun bei Beobachtungen mit Analysator oder mit Polarisator allein in vielen Fällen sehr deutlich und wahrscheinlich schon mehrfach wahrgenommen worden; ihr Auftreten ist nach dem Gesagten ein ganz directer Beweis für die Existenz der von der Theorie geforderten gleichsinnig rotirenden elliptischen Wellen und demgemäß theoretisch wichtig.

Die hin und wieder ohne irgend einen Polarisator beobachteten Ringe werden durch die angenäherte Formel (111) nicht erklärt, sie beruhen also entweder auf einer theilweisen Polarisation der Lichtquelle (z. B. des Himmelslichtes) oder sind eine Erscheinung höherer Ordnung. In der That liefert die strenge Formel (109) für den hier vorliegenden Fall nicht verschwindender $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ ein mit Δ periodisches Glied von demselben Character, wie es die Gleichungen (112) enthalten. —

Daß die vorstehend (wohl zum ersten Male) gegebene Erklärung der idiophanen Ringe der Wahrheit entspricht, ergiebt sich sehr überzeugend aus dem Verlauf der Erscheinung bei geänderten Umständen.

Aus der ersten Formel (112) folgt für $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$

$$114) \qquad c^2 = c_0^2[e_1^2\cos^2\vartheta+e_2^2\sin^2\vartheta+2\varepsilon e_1e_2\sin 2\vartheta\sin\Delta];$$

die Ringe sind also am intensivsten, wenn $\varepsilon\sin 2\vartheta$ am größten, sie sind unmerklich, wenn $\varepsilon\sin 2\vartheta$ gleich Null ist.

ϑ ist der Winkel der einfallenden Polarisationsrichtung mit der X-Axe, die wir in die große Axe der Welle (1) gelegt haben und die mit der Wellennormalen ihre Lage ändert. Das Gesetz dieser Lagenänderung ist oben ausführlich discutirt und

Digitized by Google

in Figur 8 durch das System punktirter Hyperbeln dargestellt worden. Nach der Bemerkung am Schluß von § 6 unterscheiden sich diese Hyperbeln in den hier beobachteten Bereichen nicht merklich von geraden Linien durch die Spur A_1 der Polarisationsaxe, und die große Ellipsenaxe für die ordinäre Welle (1) fällt merklich in die Richtung P, die den Winkel I zwischen α und der Richtung $A_2 \longrightarrow A_1$ halbirt. Es gilt somit, wenn man den Winkel zwischen $A_1 \longrightarrow A_2$ und der einfallenden Polarisationsebene P_0 mit H bezeichnet

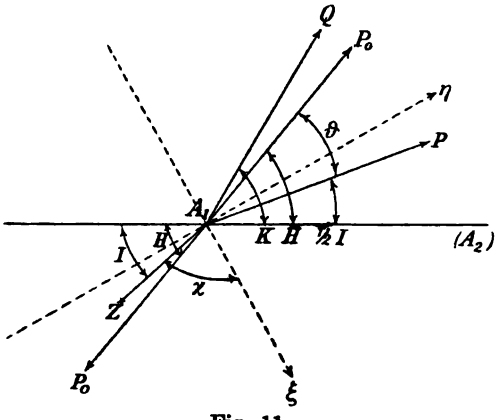


Fig. 11.

115) $2\vartheta = 2H - I$,

während nach der Construction auf S. 60 gilt

116) $I = 2K - \chi$,

unter K den Winkel verstanden, den die Richtung Q, d. h. die Richtung der linearen Polarisation der (ordinären) Welle (1) in der Polarisationsaxe A_1 mit $A_1 \longrightarrow A_2$ einschließt. Es mag daran erinnert werden, daß die beiden lineär und normal zu einander polarisirten Wellen, die sich parallel einer Polarisationsaxe fortpflanzen, im Allgemeinen verschieden stark absorbirt werden, und daß daher die Lage der einfallenden Polarisationsebene P_0 parallel oder normal zu Q für die Beobachtung durch die größte und die kleinste Intensität des Lichtes in der Axenrichtung characterisirt ist.

Was den Verlauf von ε angeht, so folgt aus (82) für gegen α kleines β in zweiter Annäherung

117) $$\frac{1}{q} = +\frac{\beta \sin\chi}{\alpha}$$

und aus (86) ergiebt sich in gleicher Genauigkeit

118) $$\varepsilon = +\frac{\beta}{2\alpha}\sin\chi.$$

Hiernach hat das mit ε proportionale Glied in (114) den Factor

119) $$F = \sin\chi \sin(2(H-K)+\chi) = \sin(2K-I)\sin(2H-I),$$

welcher seine absolut größten Werthe $-\sin^2(K-H)$ und $+\cos^2(K-H)$ für $K+H-I=0$ und $=\pm\frac{1}{2}\pi$ besitzt, dagegen für $2K-I$ oder

Digitized by Google

$2H-I=0$ oder $=\varkappa$ verschwindet. Die Maximalwerthe werden selbst wieder am größten, wenn $K-H$ entweder 0 und $\varkappa$ oder $\pm\frac{1}{2}\varkappa$ wird; hier fallen dann auch die genannten Nullstellen zusammen und die Erscheinung wird am deutlichsten.

Beschränken wir uns demgemäß auf diese Fälle, d. h. auf

$$K = H \text{ und } K = H \pm \tfrac{1}{2}\varkappa,$$
$$\text{oder } P_0 /\!/ Q \text{ und } P_0 \perp Q,$$

so entsprechen ihnen, für denselben Winkel

$$I = 2K \pm \tfrac{1}{2}\varkappa$$

die absolut größten Werthe des Factors (119)

$$F = +1 \text{ und } F = -1.$$

Wir werden weiter unten aus den obigen Formeln ableiten, daß bei der Beobachtung ohne jeden Polarisator, wie mit nur einem Polarisator Absorptionsbüschel auftreten, deren größte Tiefe auf der η-Axe d. h. bei $\chi = \pm\frac{1}{2}\varkappa$ oder $I = 2K \pm \frac{1}{2}\varkappa$ liegt. Es ergiebt sich somit der allgemeine Satz: die idiophanen Ringe sind am deutlichsten, wenn die einfallende Polarisationsebene einer der beiden in der Polarisationsaxe stattfindenden Polarisationsrichtungen parallel ist, und treten dann in den Absorptionsbüscheln auf, fehlen aber in der dazu normalen Richtung.

Was Gestalt und Lage der Interferenzringe angeht, so finden sich die hellen und die dunkeln Zonen dort, wo

$$\varepsilon \sin 2\vartheta \sin 2\pi l\,(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)$$

seinen größten oder kleinsten Werth annimmt. Für den letzten Factor werden die Maxima und Minima bestimmt durch

$$120) \quad l(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) = \frac{l(\omega_1^2-\omega_2^2)}{2\tau\omega_m^2} = \frac{4h+1}{4} \text{ oder } = \frac{4h-1}{4},$$

wobei unter ω_m eine mittlere Geschwindigkeit, unter h eine ganze Zahl verstanden ist. Durch diese Formeln sind die confocalen Ellipsen $r = \text{Const.}$ gegeben, die in allen bekannten Fällen von Kreisen nur sehr wenig abweichen. Indessen werden die Intensitätscurven gegenüber der Bedingung (120) etwas nach der Polarisationsaxe hin gerückt sein, weil der Factor ε mit wachsendem Abstand von der Polarisationsaxe nach (118) schnell abnimmt. Da der Factor $\varepsilon \sin 2\vartheta$ in den oben betrachteten speciellen Fällen $P_0 /\!/ Q$ und $P_0 \perp Q$ entgegengesetztes Vorzeichen hat, so sind in denselben die Maxima und die Minima ausgetauscht.

Digitized by Google

Die strengen Formeln geben die Ringe in Folge der Ellipticität etwas deformirt; doch mag auf diesen Punkt hier nicht weiter eingegangen werden.

Zieht man die Formel (113) heran, welche die Erscheinungen darstellt, die bei gleichzeitiger Anwendung von Polarisator und Analysator wahrnehmbar sind, und welche für gekreuzte Polarisationsebenen ($\vartheta' = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$) bei Beseitigung des in ε multiplicirten kleinen Gliedes lautet

$$121) \quad c'^2 = c_0^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \,(e_1^2 + e_2^2 - 2e_1 e_2 \cos 2\pi l(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)),$$

so erkennt man, daß dieselbe Minima der Intensität ergiebt für $l(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) = h$. Da nun für $P_0 \perp Q$ die Minima von c^2 nach dem Obigen eintreten, wenn derselbe Ausdruck etwas kleiner ist, als $h + \frac{1}{4}$, so müssen die Ringe in den beiden hier einander gegenüber gestellten Fällen nahezu übereinstimmen. —

Die Beobachtungen, zu denen ich die Mittel der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften verdanke, haben alle diese Resultate und somit auch die Richtigkeit der hier gegebenen Erklärung der idiophanen Ringe bestätigt. Die schönen Platten von Andalusit, Epidot und Axinit, die mir das optische Institut von Dr. W. Steeg und Reuter geliefert hat, zeigen bei alleiniger Anwendung von Polarisator oder Analysator sämmtlich die Ringe sehr deutlich; ganz besonders, wenn der sie durchziehende, weiter unten zu besprechende Streifen dunkel ist. Beim Hindurchblicken ohne irgend einen Polarisator fallen die Ringe gelegentlich immer noch recht auf, wenn die Lichtquelle der helle Himmel ist; kaum merklich sind sie, wie nach S. 77 zu erwarten, wenn eine vollkommen unpolarisirte Lichtquelle benutzt wird.

10) Einfluß der Absorption auf die Erscheinungen. Was die Rolle der Absorption bei den beobachtbaren Vorgängen angeht, so wird die Discussion am bequemsten, wenn man, was sich in Wirklichkeit durch angemessene Dicke l der Platte stets erreichen läßt, die Exponenten von e_1 und e_2 als kleine Größen ansehen darf. Man kann dann setzen

$$122) \qquad e_k^2 = e^{-2k_k L_k} = 1 - 2k_k L_k + 2k_k^2 L_k^2 \mp \cdots,$$

wobei in der Nähe der Polarisationsaxe L_1 und L_2 nur sehr wenig verschieden sind und mit $L = \pi l/\tau\omega_m^2$ vertauscht werden dürfen.

Ferner ist nach (50)

$$123) \qquad k_1 = \gamma + p, \quad k_2 = \gamma - p,$$

Digitized by Google

und p darin durch (53) gegeben; wir bemerken uns, daß $p \gtrless 0$ zu rechnen ist, je nachdem $\xi \gtrless 0$ ist.

Die angenäherte Formel (111) nimmt hiernach die Gestalt an

$$124) \qquad c^2 = 2c_0^2(1-2L[\gamma - L(\gamma^2+p^2)]) = 2c_0^2(\Pi + 2L^2p^2),$$

wobei Π im Umkreis einer Polarisationsaxe merklich constant ist.

Hieraus würde folgen, daß die ohne irgend eine polarisirende Vorrichtung durch eine zu A_1 nahe normale Platte beobachtbare Intensität auf den Hyperbeln von der Gleichung (57) constant ist und ihr Minimum auf den Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 > \beta$ besitzt, wo p verschwindet. Daß die Axe der hierdurch bestimmten, von Brewster 1818 entdeckten Absorptionsbüschel keineswegs, wie man ehemals annahm, stets normal zu der Ebene der Polarisationsaxen steht, habe ich schon früher hervorgehoben[1]).

Bei großer Annäherung an die Polarisationsaxe kommen die in (111) vernachlässigten Glieder zur Geltung, und ist demgemäß auf die strenge Formel (109) zurückzugreifen. Wie schon benutzt, ist Δ in der Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$ gleich Null und nimmt mit wachsendem Abstand zu. Daraus folgt, daß die Intensität innerhalb des Bereiches $0 < \Delta < 2\pi$ durch Formel (109) nicht unbeträchtlich größer gegeben wird, als durch (111), und daß demgemäß die Absorptionsbüschel in der Nähe der Polarisationsaxe weniger intensiv sind und durch ein breiteres Lichtband geschieden werden, als nach der angenäherten Formel (111) stattfinden würde. Bei einiger Aufmerksamkeit kann man dies bei der Beobachtung in der That erkennen.

In größerer Entfernung von der Polarisationsaxe dürfen bei nicht zu schwacher Doppelbrechung in (122) L_1 und L_2 nicht einander gleichgesetzt werden. Daraus resultiren andere Abweichungen von der Gleichung (124), auf die, als unbedeutender, hier nicht eingegangen werden soll. —

Die erste Formel (112) gewinnt unter den in (122) ausgedrückten Voraussetzungen die Gestalt

$$125) \qquad \begin{aligned} c^2 = c_0^2[&(1-2L(\gamma - L(\gamma^2+p^2)) - 2Lp(1-2L\gamma)\cos 2\vartheta \\ &+ 2\varepsilon(1-2L\gamma(1-L\gamma))\sin\Delta]. \end{aligned}$$

Sie zerfällt in drei Glieder, von denen das erste die soeben besprochenen Absorptionsbüschel, das dritte die oben behandelten Ringe ergiebt. Neues spricht das zweite Glied aus, das, als in Bezug auf p lineär, sehr wesentlich ist. Da nach (115) in

1) W. Voigt, Gött. Nachr. v. 1896, S. 17.

Digitized by Google

mäßigen Abständen von der Polarisationsaxe $2\vartheta = 2H - I$ ist, so gilt für das betreffende Glied

126) $$-2c_0^2 Lp(1-2L\gamma)\cos 2\vartheta = -pR\cos(2H-I),$$

unter R eine in dem betrachteten Bereich constante positive Größe verstanden.

p besitzt seinen absolut größten Werth β in der ξ-Axe, d. h. für $I = 2K$ und $I = 2K+\pi$, $\cos(2H-I)$ dagegen in den Geraden $I = 2H$ und $I = 2H+\pi$. Größte Helligkeit oder größte Dunkelheit wird eintreten, wenn für beide Factoren gleichzeitig Maxima stattfinden, d. h., wenn $2H$ entweder gleich $2K$ oder gleich $2K \pm \pi$ ist. Wir wollen diese Fälle allein betrachten.

Ist $H = K$, d. h., ist die einfallende Polarisationsrichtung der festen Richtung Q parallel, so nimmt $p\cos(2H-I)$ auf der ξ-Axe allenthalben den Werth $+\beta$, dazu normal den Werth Null an. Hier wird also das Ringsystem, das man bei Beobachtung mit nur einem Polarisator wahrnimmt, von einem dunkeln Streifen durchzogen sein, der der ξ-Axe parallel liegt.

Ist dagegen $H = K \pm \frac{1}{2}\pi$, d. h., ist die einfallende Polarisationsrichtung zu der festen Richtung Q normal, so nimmt $p\cos(2H-I)$ auf der ξ-Axe den Werth $-\beta$, dazu normal den Werth Null an. Hier wird das Ringsystem von einem hellen Streifen durchzogen sein.

Beide Streifen gehen durch die Polarisationsaxe A_1, d. h. das Centrum des Ringsystemes hindurch. Denn obwohl im Allgemeinen die Beziehung $2\vartheta = 2H - I$ in der Nähe von A_1 ihre Gültigkeit verliert, so behält sie dieselbe nach S. 22 doch auf der ξ-Axe bis an den Punkt A_1 hin. Die obigen Ueberlegungen gelten somit für alle Stellen dieser Axe. —

Die vorstehend besprochenen und leicht beobachtbaren Erscheinungen besitzen bei den verschiedenen Krystallen bemerkenswerth verschiedenen Character, gemäß der Lage der Fundamentalrichtung Q gegen die Ebene der Polarisationsaxen $A_1 A_2$.

Es ist hier der Ort, näher auf die verschiedenen Typen zweiaxiger pleochroitischer Krystalle einzugehen, auf die bereits S. 4 kurz hingewiesen worden ist.

Bei rhombischen Krystallen können die Tensoren b_k auf sechs verschiedene Weisen den Tensoren a_k parallel werden, wodurch sich acht verschiedene Möglichkeiten der Lage der Absorptionsaxen und (da die Richtungen $K = +\frac{1}{2}\pi$ und $= -\frac{1}{2}\pi$, sowie $K = 0$ und $= \pi$ hier einander gleichwerthig sind) zwei der Lage von Q ergeben.

Digitized by Google

Fällt b_1, b_2, b_3 in a_1, a_2, a_3, so liegen die B_λ in der Ebene von $a_1 a_3$. Schließen die B_λ die A_λ ein (wobei das S. 51 über die positiven Seiten der A_λ und B_λ Gesagte zu beachten ist), so ist in der Nähe von A_1 die Richtung Q normal zu $A_1 A_2$, also der Winkel $K = \frac{1}{2}\pi$; liegen die B_λ zwischen den A_λ, so ist $K = 0$.

Fällt b_3, b_2, b_1 in a_1, a_2, a_3, so liegen die B_λ gleichfalls in der Ebene $a_1 a_3$ und in der Nähe von A_1 ist $K = \frac{1}{2}\pi$, wenn A_1 zwischen den B_λ liegt, $K = 0$, wenn außerhalb.

Fällt b_2, b_1, b_3 oder b_2, b_3, b_1 in a_1, a_2, a_3, so liegen die Axen B_λ in der Ebene $a_2 a_3$; im ersten Falle ist $K = 0$, im letzten $= \frac{1}{2}\pi$.

Fällt endlich b_1, b_2, b_3 oder b_3, b_1, b_2 in a_1, a_2, a_3 so liegen die B_λ in der Ebene $a_1 a_2$; im ersten Falle ist $K = \frac{1}{2}\pi$, im letzten $K = 0$.

Es sind also vier Möglichkeiten für den Werth $K = 0$ und vier für den Werth $K = \frac{1}{2}\pi$ vorhanden. Die beiden hierdurch gekennzeichneten Typen lassen sich dadurch leicht unterscheiden, daß die Welle, welche, parallel einer Polarisationsaxe fortschreitend, in der Ebene $A_1 A_2$ polarisirt ist, bei dem ersten stärker, bei dem letzten schwächer absorbirt wird, als die normal zu $A_1 A_2$ polarisirte. Andalusit, für den b_3, b_2, b_1 in a_1, a_2, a_3 und A_1 zwischen die B_λ fällt, gehört zu dem letzteren Typus; man erhält daher den dunkeln Streifen in der Ebene $A_1 A_2$ liegend dann, wenn die einfallende Polarisationsebene normal zu $A_1 A_2$ steht.

Bei monoklinen Krystallen sind neun Arten des Zusammenfallens eines der b_1, b_2, b_3 mit einem der a_1, a_2, a_3 möglich.

Ist a_1 die allgemeine physikalische Symmetrieaxe, so kann damit sowohl b_1, als b_2, als b_3 zusammenfallen. In allen diesen Fällen kann K ganz beliebige Werthe haben.

Ist a_2 die Symmetrieaxe und fällt b_1 oder b_2 oder b_3 hinein, so ist im ersten und im letzten Falle $K = 0$ und $\pm\frac{1}{2}\pi$, im zweiten $= 0$ oder $= \pm\frac{1}{2}\pi$, je nachdem A_1 außerhalb oder zwischen den B_λ liegt.

Ist endlich a_3 die Symmetrieaxe und fällt mit ihr b_1 oder b_2 oder b_3 zusammen, so können alle möglichen Werthe K vorkommen.

Bei Krystallen des monoklinen Systemes kommen also zwar einzelne Fälle vor, in denen die Größe des Winkels K schon aus Symmetrierücksichten sich zu 0 oder $\pm\frac{1}{2}\pi$ bestimmt, im Allgemeinen hängt er aber von den dem Krystall individuellen Winkelwerthen zwischen den a_λ und den b_λ ab.

Bei Epidot ist bekanntlich $K = 0$, d. h., in der Polarisationsaxe ist die parallel $A_1 A_2$ polarisirte Componente die stärker absorbirte. Demgemäß erhält man den dunkeln parallel $A_1 A_2$ liegenden

Digitized by Google

Streifen dann, wenn die einfallende Polarisationsebene zu A_1A_2 parallel liegt.

Bei triklinen Krystallen ist von vorn herein keinerlei Gesetzmäßigkeit in der relativen Lage von a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 vorhanden; die Richtung Q weicht irgendwie aus der Ebene A_1A_2 ab und demgemäß auch der oben besprochene, die Ringe durchschneidende dunkle Streifen. Das in meinem Besitz befindliche Axinit-Präparat zeigt diese Abweichungen außerordentlich deutlich und beweist auch durch die unsymmetrischen farbigen Säume der mit bloßem Auge wahrnehmbaren Absorptionsbüschel die niedrige Symmetrie des triklinen Krystalles. —

11) Die hellen Axenbilder zwischen gekreuzten Polarisatoren. Die Formel (108), die sich auf die mit Polarisator und Analysator wahrnehmbaren Erscheinungen bezieht, enthält, wie die Ellipticität, so auch die Absorption der Schwingungen in minder wesentlichen Gliedern, wie die von uns bereits discutirten Formeln (106), (109) und (110); daher führt auch ihre Discussion zu nur wenigen Ergänzungen der früher auf angenähertem Wege gewonnenen Resultate. Nur ein Punkt mag kurz berührt werden: das Verhalten der unmittelbaren Umgebung einer Polarisationsaxe.

A ist auf der Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$ nach S. 63 gleich Null, in der Nähe derselben jedenfalls sehr klein, und dort gilt somit streng, resp. angenähert, wegen $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
c'^2 = \frac{c_0^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \{ & e_1^2 (\cos^2\vartheta + \varepsilon^2 \sin^2\vartheta)(\cos^2\vartheta' + \varepsilon^2 \sin^2\vartheta') \\
& + e_2^2 (\sin^2\vartheta + \varepsilon^2 \cos^2\vartheta)(\sin^2\vartheta' + \varepsilon^2 \cos^2\vartheta') \\
& + \tfrac{1}{2} e_1 e_2 [(1-\varepsilon^2)^2 \sin 2\vartheta \sin 2\vartheta' - 4\varepsilon^2] \}.
\end{aligned} \tag{127}
$$

Bei gekreuzten Polarisatoren ist $\vartheta - \vartheta' = \frac{1}{2}\pi$ und demgemäß

$$
\begin{aligned}
c'^2 = \frac{c_0^2}{(1-\varepsilon^2)^2} [& (e_1^2 + e_2^2)(\cos^2\vartheta + \varepsilon^2 \sin^2\vartheta)(\sin^2\vartheta + \varepsilon^2 \cos^2\vartheta) \\
& - \tfrac{1}{2} e_1 e_2 ((1-\varepsilon^2)^2 \sin^2 2\vartheta + 4\varepsilon^2)].
\end{aligned} \tag{128}
$$

Auf der Geraden $\xi = 0$, $\eta^2 < \beta^2$ ist nach S. 69 die Lage von P constant, und zwar, da die Gerade die Grenzlinie der beiden Wellen (1) und (2) bildet, um $\frac{1}{2}\pi$ unbestimmt, nämlich auf der einen Seite um $\frac{1}{2}\pi$ gegen die Lage auf der anderen Seite gedreht; ebenso ist e_3 zweideutig, nämlich diesseits und jenseits e_1 und e_2 vertauscht, während ε eindeutig ist. Der Werth von c'^2 ist demgemäß, wie man leicht sieht, eindeutig.

Digitized by Google

Man gelangt zu einem einfacheren Ausdruck, wenn man soweit von den Windungsaxen entfernt bleibt, daß man die Glieder von der Ordnung von ε^2, das in der Mitte zwischen ihnen verschwindet, vernachlässigen kann. Dann resultirt

129) $$c'^2 = \tfrac{1}{4} c_0^2 (e_1 - e_2)^2 \sin^2 2\vartheta,$$

und dies zeigt, daß die Intensität in der Richtung einer Polarisationsaxe auch bei gekreuzten Polarisatoren im Allgemeinen nicht verschwindet, sowie der Krystall pleochroitisch, d. h. e_1 von e_2 verschieden ist. Ausgenommen ist nur der Fall, daß die einfallende Polarisationsebene P_0 parallel oder normal zu einem der der Polarisationsaxe entsprechenden P liegt, d. h. $\vartheta = 0$ oder $\pm \frac{1}{2}\pi$ ist.

Handelt es sich speciell um einen Krystall, bei dem die Ebene der Windungsaxen $C_1 C_1'$ normal steht zur Ebene der Polarisationsaxen $A_1 A_2$, (worüber S. 35 u. f. gesprochen) so schließt P für alle Punkte zwischen den Windungsaxen die Winkel 0 oder $\pm \frac{1}{2}\pi$ mit $A_1 A_2$ ein, und man kann in (128) resp. (129) für ϑ unmittelbar den Winkel von P_0 gegen $A_1 A_2$ einsetzen, d. h. in der sogenannten Diagonallage (δ) $\pm \frac{1}{4}\pi$, in der sogenannten Normallage (ν) 0 oder $\pm \frac{1}{2}\pi$.

Hier giebt (128) resp.

130) $$c_\delta'^2 = \frac{c_0^2}{4(1-\varepsilon^2)^2}(1+\varepsilon^2)^2 (e_1 - e_2)^2, \quad c_\nu'^2 = \frac{c_0^2 \varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}(e_1 - e_2)^2,$$

und (129) einfacher

131) $$c_\delta'^2 = \tfrac{1}{4} c_0^2 (e_1 - e_2)^2, \quad c_\nu'^2 = 0.$$

Bei diesen Krystallen erleiden also die dunkeln Hyperbeln, die in der Diagonallage zwischen gekreuzten Nicols auftreten, stets, bei denjenigen der andern Gruppen wenigstens zumeist, in Folge des Pleochroismus Unterbrechungen.

Auf die hellen Axenbilder, welche selbst bei nur sehr wenig pleochroitischen Krystallen auftreten und somit ein empfindliches Merkmal des Pleochroismus darstellen, habe ich schon in meiner ersten Publication über diesen Gegenstand aufmerksam gemacht. Im Vorstehenden ist die Erscheinung etwas weitergehend aufgeklärt.

12) Gesetze für die Umgebung einer Absorptionsaxe. Bei der vollständigen Symmetrie der fundamentalen Gleichungen (35) in Bezug auf die beiden Gattungen von Tensorcomponenten a_{hk} und b_{hk} einerseits und die Variabeln ω^2 und $k = 2\omega^2 \varkappa$ andererseits ist es von vornherein klar, daß die im Vorstehenden

Digitized by Google

für die Umgebung einer Polarisationsaxe durchgeführten Rechnungen sich fast ohne Aenderungen sogleich auf die Umgebung einer Absorptionsaxe übertragen lassen. Wir wollen zum Schluß noch kurz untersuchen, ob die sich dabei ergebenden Resultate bestimmte, bisher noch nicht aufgefundene Erscheinungen in der Umgebung der Absorptionsaxen signalisiren.

Daß die Verhältnisse hier aber trotz der analytischen Symmetrie der Formeln physikalisch doch sehr abweichend liegen, ergiebt sich schon aus der verschiedenen physikalischen Bedeutung der beiden symmetrisch auftretenden Variabeln ω^2 und $k = 2\omega^2\varkappa$. Auch ist daran zu erinnern, daß bei dem zu machenden Uebergang k für sich allein schon seine Bedeutung einigermassen ändert, da es zwar in der Nähe einer Polarisationsaxe (wegen der dort nur unmerklich verschiedenen Geschwindigkeiten der beiden Wellen), nicht aber in anderen Bereichen ein directes Maaß der Absorption ergiebt.

Für Richtungen, die so nahe an der Absorptionsaxe B_1 liegen, daß V_1 neben Eins vernachlässigt und V_2 mit $2s - v$ vertauscht werden darf, (unter v eine Größe von der Ordnung von V_1 verstanden) liefern die Formeln (18) analog zu (43)

$$132) \qquad \begin{aligned} [b_{22}] &= b_2 + \tfrac{1}{2}(b_1 - b_2)(V_1 - v)\sin 2s, \\ [b_{11}] &= b_2 - \tfrac{1}{2}(b_1 - b_2)(V_1 + v)\sin 2s, \end{aligned}$$

was wir abkürzen in

$$133) \quad [b_{22}] = b_0 + bV_1, \quad [b_{11}] = b_0 - bV_1, \text{ wobei } b_0 = b_2 - bv.$$

Dabei ist b nach (10) stets positiv.

Legt man nun die X-Axe in die Ebene ZQ (s. S. 6), so wird $[b_{12}] = 0$, und die erste Gleichung (35) nimmt bei Berücksichtigung von (19) die Form an

$$134) \qquad (b_0 - k)^2 = ((a_{11}) - \omega^2)((a_{22}) - \omega^2) + b^2 V_1^2 = r'^2,$$

wobei r' eine neue Bezeichnung ist; es wird also

$$135) \qquad k = b_0 \pm r'.$$

Setzt man diesen Werth in die zweite Gleichung (35) ein, so ergiebt dieselbe

$$136) \qquad \begin{aligned} &+(\pm r' + bV_1)((a_{11})\sin^2\psi + (a_{22})\cos^2\psi - \omega^2) \\ &(\pm r' - bV_1)((a_{11})\cos^2\psi + (a_{22})\sin^2\psi - \omega^2) = 0, \end{aligned}$$

was genau (48) entspricht.

Setzt man also

$$137) \qquad \omega^2 = \tfrac{1}{2}((a_{11}) + (a_{22})) + p' = \gamma' + p'$$

Digitized by Google

und führt die Abkürzungen

138) $$bV_1 = \alpha', \quad \tfrac{1}{2}((a_{22})-(a_{11})) = \beta', \quad 2\psi = \chi'$$

ein, so erhält man entsprechend zu (52) und (53)

139) $$p'^4+p'^2(\alpha'^2-\beta'^2) = \alpha'^2\beta'^2\cos^2\chi',$$

also

140) $$p'^2 = \tfrac{1}{2}[\beta'^2-\alpha'^2+\sqrt{(\beta'^2-\alpha'^2)^2+4\alpha'^2\beta'^2\cos^2\chi'}].$$

Es ergiebt sich sonach bei der Construction auf einer Kugel vom Radius b für p' dasselbe Gesetz, wie oben für p. Man hat die jetzt innerhalb des betrachteten Bereiches feste Richtung P zu construiren, die S. 53 definirt ist; heißt K' ihr Winkel mit der Geraden $B_1 \longrightarrow B_2$, und schließt die ξ'-Axe eines $\xi'\eta'$-Systemes mit $B_2 \longrightarrow B_1$ den Winkel $2K'$ ein, so ist p' und somit $\omega_1^2-\omega_2^2$ constant auf einem System von confocalen Hyperbeln mit den Brennpunkten $\xi' = 0$, $\eta' = \pm\beta'$.

Führt man weiter in den Ausdruck (134) für r'^2 den Werth (137) für ω^2 ein, so ergiebt sich

141) $$r'^2 = p'^2+\alpha'^2-\beta'^2,$$

also nach (135) und (140)

142) $$\begin{aligned} k &= b_0 \pm \sqrt{p'^2+\alpha'^2-\beta'^2}, \\ &= b_0 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{(\beta'^2-\alpha'^2)^2+4\alpha'^2\beta'^2\cos^2\chi'}+\alpha'^2-\beta'^2)}. \end{aligned}$$

r' ist constant auf confocalen Ellipsen mit den Brennpunkten $\xi' = 0$, $\eta' = \pm\beta'$. Diese Punkte stellen für die beiden zweiwerthigen Functionen ω^2 und k die Windungspunkte dar, die Gerade $\xi' = 0$, $\eta'^2 < \beta'^2$ ist für k, die Gerade $\xi' = 0$, $\eta'^2 > \beta'^2$ für ω^2 der Verzweigungsschnitt.

Soweit geht Alles dem Früheren vollständig parallel. Ein ganz wesentlicher Unterschied wird aber dadurch bedingt, daß, während bei den bekannten Krystallen β/a eine so kleine Größe ist, daß die Windungspunkte $\xi = 0$, $\eta = \pm\beta$ auf der Kugel vom Radius a sich zumeist kaum von der Polarisationsaxe sondern, β'/b umgekehrt in Wirklichkeit so groß ist, daß die Windungspunkte $\xi' = 0$, $\eta' = \pm\beta'$ sich auf der Kugel vom Radius b gar nicht construiren lassen. Die Curven $p' = \text{Const.}$ und $r' = \text{Const.}$ werden hier also in zwei Systeme je zur ξ'- und zur η'-Axe paralleler Geraden degeneriren. Auch die Curven $\omega^2 = \text{Const.}$ und $k = \text{Const.}$ sind Gerade; die Curven constanter Absorption werden dagegen wegen $\varkappa/\omega = k/2\omega^2$ gekrümmte Form besitzen. ω und

Digitized by Google

$\varkappa/\varpi$ werden sich in der Nähe einer Absorptionsaxe aber so langsam ändern, daß es zweifelhaft erscheinen muß, ob die auf dieser Veränderlichkeit beruhenden Interferenz- und Absorptionserscheinungen sich überhaupt beobachten lassen.

Gleicher Weise sind die Ellipticitäten der Schwingungen dort überaus gering und wahrscheinlich einem experimentellen Nachweis unzugänglich.

Göttingen, Anfang Februar 1902.

Anhang.

Eine neue Erscheinung. Wenn auch durch das Auftreten der idiophanen Ringe um die sog. optischen Axen die allgemeinen Folgerungen aus der Theorie eine unerwartete und schöne Bestätigung finden, so schien es doch erwünscht, nach einer Erscheinung zu suchen, welche die theoretisch abgeleitete Fortpflanzung zweier gleichsinnig rotirender elliptischer Wellen noch einfacher wirksam werden läßt und auch die damit verbundenen merkwürdigen Symmetrieverhältnisse der Schwingungen in der Umgebung einer Polarisationsaxe noch directer zur Anschauung bringt. In Bezug auf letzteres mag daran erinnert werden, daß nach der Theorie jede Polarisationsaxe A_λ beiderseitig (dicht) eingeschlossen wird von zwei Richtungen (den Windungsaxen C_λ und C'_λ), in deren jeder sich zwei gleichsinnig rotirende circularpolarisirte Wellen fortpflanzen, die aber für die beiden Windungsaxen entgegengesetzten Rotationssinn besitzen. Bei rhombischen Krystallen, auf die wir in erster Linie exemplificiren wollen, steht die Ebene der Windungsaxen C_λ und C'_λ normal zu derjenigen der Polarisations- oder optischen Axen A_1, A_2, und die Rotationssinne in den vier Axen C_1, C'_1, C_2, C'_2 sind derart vertheilt, daß die Symmetrie der Krystallklasse gewahrt ist.

Um die Verschiedenheit der beiden Axen C_1 und C'_1, resp. C_2 und C'_2 und ihrer Bereiche hervortreten zu lassen, muß es genügen, das einfallende Licht elliptisch, insbesondere circular polarisirt zu wählen und ohne Analysator zu beobachten. Dann wird unzweifelhaft in der Umgebung derjenigen der Axen C_λ und C'_λ, deren eigner Rotationssinn mit demjenigen des einfallenden Lichtes übereinstimmt, mehr Licht fortgepflanzt werden, als in der Umgebung der Axe mit entgegengesetztem Rotationssinn; das letztere Bereich muß verglichen mit dem ersteren dunkeler erscheinen.

Digitized by Google

Wir wollen demgemäß das allgemeine Problem behandeln, daß das einfallende lineärpolarisirte Licht durch einen eingeschalteten Viertelundulationsglimmer in elliptisches verwandelt wird, bevor es auf die Platte aus dem absorbirenden Krystall trifft, und daß das austretende Licht direct in das Auge gelangt.

Es möge, wie früher, unter P_0 die einfallende Polarisationsrichtung, unter P die Richtung der großen Ellipsenaxe der ordinären Welle im Krystall, unter ϑ der Winkel (P, P_0), verstanden werden. Ferner mögen X_0 und Y_0 die Polarisationsrichtungen in dem Glimmer und Θ den Winkel zwischen P_0 und X_0 bezeichnen. Ist dann $c_0 \cos T_0$ die einfallende Schwingung, sind also

143) $$U_0 = c_0 \cos\Theta \cos T, \quad V_0 = c_0 \sin\Theta \sin T$$

die aus dem Glimmer austretenden Componenten nach X_0 und Y_0, so fallen auf den Krystall die Schwingungen $//$ und $\perp$ zu P

144) $$u_0 = U_0 \cos\delta + V_0 \sin\delta, \quad v_0 = -U_0 \sin\delta + V_0 \cos\delta,$$

wobei $\Theta - \vartheta = \delta$ gesetzt ist. Die austretende Intensität aber findet sich bei Vernachlässigung der Intensitätsverluste durch Reflexion nach (96) proportional mit

145)
$$\begin{aligned} c^2 = \frac{c_0^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \{ & e_1^2(1+\varepsilon^2)[(\cos^2\delta + \varepsilon^2\sin^2\delta)\cos^2\Theta + (\sin^2\delta + \varepsilon^2\cos^2\delta)\sin^2\Theta] \\ & + e_2^2(1+\varepsilon^2)[(\sin^2\delta + \varepsilon^2\cos^2\delta)\cos^2\Theta + (\cos^2\delta + \varepsilon^2\sin^2\delta)\sin^2\Theta] \\ & - 4 e_1 e_2 \varepsilon^2 \cos\Delta \\ & - \varepsilon[(1+\varepsilon^2)(e_1^2 + e_2^2 - 2 e_1 e_2 \cos\Delta)\sin 2\Theta \\ & + 2 e_1 e_2 (1-\varepsilon^2)\cos 2\Theta \sin 2\delta \sin\Delta]\}. \end{aligned}$$

Was uns in diesem höchst complicirten Ausdruck vorzüglich interessirt, ist das Auftreten von Gliedern, die mit dem Winkel Θ und daher mit dem Rotationssinn der einfallenden Welle ihr Vorzeichen umkehren. Es sind bei Rücksicht auf $\delta = \Theta - \vartheta$ die folgenden

146)
$$\begin{aligned} G = \frac{c_0^2 \sin 2\Theta}{2(1-\varepsilon^2)^2} [& (e_1^2 - e_2^2)(1-\varepsilon^4)\sin 2\vartheta \cos 2\Theta \\ & - 2\varepsilon(1+\varepsilon^2)(e_1^2 + e_2^2 - 2 e_1 e_2 \cos\Delta) - 4\varepsilon e_1 e_2 (1-\varepsilon^2)\cos 2\vartheta \cos 2\Theta \sin\Delta], \end{aligned}$$

und wir bemerken, daß eine Umkehr des Vorzeichens von Θ durch eine solche desjenigen von ϑ, und damit von ε, compensirt wird. Die Erscheinung, die sich bei einfallendem elliptisch polarisirten Licht darbietet, ist also unsymmetrisch in Bezug auf die ξ-Axe, und die Unsymmetrie kehrt sich um, wenn der Rotationssinn des einfallenden Lichtes umgekehrt wird.

Digitized by Google

Eine allgemeine Discussion des unübersichtlichen Ausdruckes (146) hat wenig Zweck; es mag nur bemerkt werden, daß er sich für $\Theta = \pm \frac{1}{4}\pi$, also bei einfallendem circular polarisirtem Lichte reducirt auf

147) $$G = \mp \frac{c_0^2(1+\varepsilon^2)\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}(e_1^2+e_2^2-2e_1e_2\cos A),$$

und daß dies auf einem Kreise um eine Polarisationsaxe seinen größten und seinen kleinsten Werth auf den Radien durch die Windungsaxen annimmt, aber bei wachsender Entfernung allmählig verschwindet. Berücksichtigt man, daß für $\Theta = 0$ oder $= \frac{1}{2}\pi$ das einfallende Licht lineär polarisirt ist, also der S. 81 u. f. ausführlich behandelte Fall eintritt, so kann man sich von der Unsymmetrie der Intensitätsvertheilung in der Umgebung einer Polarisationsaxe bei einfallendem elliptisch polarisirten Lichte leicht eine ungefähre Vorstellung bilden. —

Nach dem S. 71 Gesagten liegen die Windungsaxen stets sehr nahe bei den Polarisations- oder optischen Axen; um die signalisirte Erscheinung gut wahrzunehmen, muß man sich daher anderer Hülfsmittel bedienen, als der gewöhnlichen Polarisationsapparate für (äußerst stark) convergentes Licht. Ich habe ein Fernröhrchen von nur 4 cm Brennweite hierzu passend gefunden.

Die Anordnung des ersten der angestellten Versuche war die, daß Licht von einem Auerbrenner eine Lösung von Kupferoxydammoniak, einen Nicol und sodann einen für die so erhaltenen blauen Strahlen ausgesuchten und um die Strahlenrichtung drehbaren Viertelundulationsglimmer durchsetzte, ehe es auf die ausgezeichnete Andalusitplatte fiel, die ich zu dieser Beobachtung von Dr. Steeg und Reuter erhalten hatte. Das aus der Platte austretende Licht wurde mit dem auf Unendlich eingestellten Fernröhrchen aufgefangen und gelangte, ohne einen Analysator zu passiren, in's Auge. Die Polarisationsebene des Nicol lag normal zu der (vertical gestellten) Ebene A_1A_2 der Andalusitplatte.

Fiel eine der Polarisationsebenen des Glimmers mit derjenigen des Nicols zusammen, war $\Theta = 0$, also das einfallende Licht lineär polarisirt, so erschien der innerste Ring des idiophanen Systemes mit dem denselben schneidenden (verticalen) dunkeln Streifen im Gesichtsfeld. Beim Drehen des Glimmers zog sich der Streifen in zwei Flecken zusammen, die im gleichen Drehungssinne, aber mit doppelter Drehungsgeschwindigkeit, um die Polarisationsaxe wanderten. Der eine dieser Flecken (sagen wir der jetzt rechts befindliche) war dabei erheblich größer, insbesondere radial beiderseits weiter verlängert, und dunkler als der andere,

Digitized by Google

Bei $\Theta = \frac{1}{4}\pi$ (circularer Polarisation des einfallenden Lichtes, sagen wir in positivem Sinne) standen beide Flecken in der zur Ebene $A_1 A_2$ normalen Geraden, und ihre Verschiedenheit war am auffälligsten. Bei $\Theta = \frac{1}{2}\pi$ (einfallendes lineär polarisirtes Licht) war wieder die anfängliche Erscheinung vorhanden. Weiterhin wurde der (jetzt links befindliche) Flecken wieder größer und dunkler; bei $\Theta = \frac{3}{4}\pi$ (einfallendes circulares und negativ rotirendes Licht) standen die Flecken normal zu $A_1 A_2$ und die Differenz war abermals am deutlichsten. Bei $\Theta = \pi$ erschien das ursprüngliche Bild, und bis $\Theta = 2\pi$ wiederholte sich der ganze Cyclus.

Wie bei Andalusit unter Anwendung von blauem, so ließ sich bei Epidot und Axinit unter Anwendung von Na-Licht die Unsymmetrie des idiophanen Bildes vollständig deutlich wahrnehmen; indessen spielt sich hier der ganze Vorgang in einem noch kleineren Bereich um die Polarisationsaxe ab und ist daher nicht so auffallend, wie bei Andalusit.

Die zuletzt erhaltene Andalusitplatte gestattete übrigens auch eine ausgezeichnete objective Darstellung der zuletzt, wie der früher behandelten Erscheinungen. Concentrirte man das Licht einer electrischen Bogenlampe (am besten ohne farbige Zwischenschicht) mit einer Linse von ca. 15 cm Brennweite auf die Krystallplatte bei vorgeschaltetem Nicol, so erhielt man auf einem ein bis zwei Meter entfernten weißen Schirm sehr deutliche Bilder der Büschel, Ringe und unsymmetrischen Flecken.

Die beschriebene neue Erscheinung liefert, wie mir scheint, eine erwünschte Vervollständigung der Prüfung der Theorie; bewies das Auftreten der idiophanen Ringe die Fortpflanzung zweier gleichsinnig rotirender elliptisch polarisirter Wellen in jeder Richtung, so thut das neue Phänomen die von der Theorie geforderte Verschiedenheit dieses Rotationssinnes für verschiedene Richtungsbereiche überzeugend dar.

Göttingen, 20. Februar 1902.

Digitized by Google

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen (X).

Von

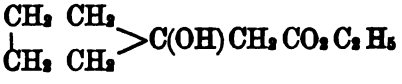
O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Februar 1902.

I. Neue Synthesen in der Terpenreihe (II).

Die Versuche zum synthetischen Aufbau von Verbindungen der Terpenreihe, über die früher[1]) berichtet worden ist, sind nach verschiedenen Richtungen mit Erfolg fortgeführt worden.

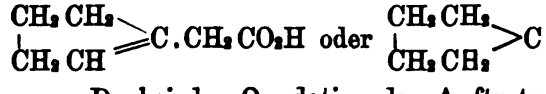
Herr Speransky hat auf meine Veranlassung aus dem Pentanon und Bromessigester bei Gegenwart von Zink den Cyklopentanolessigsäureester



aufgebaut.

Die Verbindung siedet bei 11 mm zwischen 105—107°, ist aber schwer analysenrein zu erhalten. Durch Wasserabspaltung geht sie leicht in einen ungesättigten Ester vom Siedepunkt 82—84° bei 11 mm über, der beim Verseifen eine feste bei 11 mm bei 122° siedende und bei 49—50° schmelzende Säure $C_7H_{10}O_2$ giebt. Diese Säure besitzt einen schwachen Fettsäuregeruch, sie addirt Brom und liefert ein bei 88° schmelzendes Dibromid $C_7H_{10}Br_2O_2$ und ein bei 144° schmelzendes Amid $C_5H_9CONH_2$.

Der ungesättigten Säure muß die Formel



zukommen. Da bei der Oxydation das Auftreten nur sehr geringer Mengen Pentanon zu beobachten waren, ist die erste Formel

1) Nachr. d. Ges. d. Wiss. 1900, 245.

Digitized by Google

einstweilen wahrscheinlicher, jedoch steht ein bestimmter Beweis dafür noch aus.

Dieselbe Reactionsreihe mit dem Methylpentanon aus β-Metyladipinsäure durchgeführt gab folgende Resultate:

Methylpentanolessigester $\begin{matrix}CH_3\\|\\CH.CH_3\\|\\CH_2.CH_2\end{matrix}>C(OH)CH_2CO_2C_2H_5$

siedet bei 11 mm zwischen 113—115°, der daraus entstehende ungesättigte Ester, $C_{10}H_{16}O_2$ bei 90—92°. Die ungesättigte Säure $C_8H_{12}O_2$ bei 10 mm bei 128°, bei gewöhnlichem Druck unter Kohlensäure-Abspaltung um 240°. Das Amid dieser Säure, $C_7H_{11}CONH_2$, schmilzt bei 128°. Beim Ermärmen mit Phosphorpentoxyd liefert es ein Nitril $C_7H_{11}.CN$ vom Siedepunkt 208—210°.

Wenn man, zwecks Darstellung des Amids das Ammoniaksalz der ungesättigten Säure auf 230° erhitzt, so entsteht neben dem Amid der Kohlenwasserstoff C_7H_{12} vom Siedepunkt 96—97°

d = 0.7750, n_D = 1.4336 bei 16° [M = 32,23, berech. 31.83].

Einige höhere homologe Terpene $C_{11}H_{18}$ und Menthene $C_{11}H_{20}$ habe ich gemeinsam mit Hrn. F. Thölke hergestellt, indem die Bromessigester-Synthese einerseits auf Bihydrocarvon und Carvenon und andererseits auf Menthon und Tetrahydrocarvon Anwendung fand.

Während das Bihydrocarvon in einen Oxyester $C_{16}H_{16}\overset{OH}{CH_2}CO_2C_2H_5$ [von folgenden Eigenschaften: Siedepunkt 282—286°, d = 0.997, n_D = 1.47664 bei 20°], überführbar ist und dieser erst mit Hülfe von Wasserentziehenden Mitteln in den ungesättigten Ester $C_{10}H_{16}CH_2CO_2C_2H_5$ übergeht (Siedepunkt 145—148° bei 18 mm), war aus dem isomeren Carvenon ein Oxyester nicht zu erhalten, sondern es entstand sofort der ungesättigte Ester (Siedep. 135—137° bei 16 mm). Aus den freien Säuren, welche durch Verseifung der ungesättigten Ester sich bilden, konnten durch Kohlensäureabspaltung die Homoterpene $C_{11}H_{18}$ erhalten werden. Sie zeigten folgende Eigenschaften:

$C_{11}H_{18}$ aus	Siedepunkt	d	n_D
Bihydrocarvon	191—192°	0.8465	1.4771
Carvenon	194—197°	0.8510	1.4821.

Die analogen Verbindungen aus Menthon und aus Tetrahydrocarvon

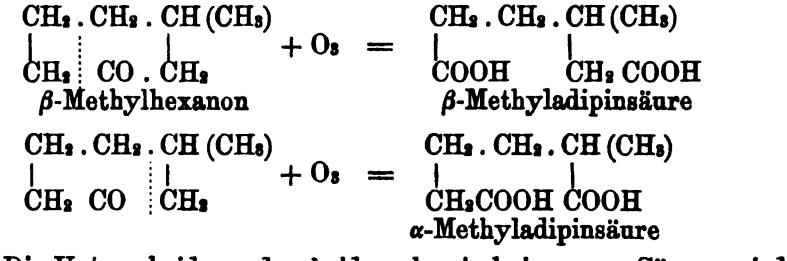
Digitized by Google

$C_{11}H_{20}$ aus			
Menthon	196—197°	0.8215	1.4579
Tetrahydrocarvon	194—195°	0.8300	1.4619.

II. Ueber die Unterscheidung von α- und von β-Methyladipinsäure.

Die β-Methyladipinsäure ist von verschiedenen Forschern auf verschiedenem Wege gewonnen worden[1]), aber die Angaben über ihre Eigenschaften stimmen nicht vollkommen überein. Die gefundenen Schmelzpunkte variiren (von 82—96°) und mehrfach ist die Schwierigkeit hervorgehoben worden, welche manchmal hervortritt, die in den meisten Lösungsmitteln sehr lösliche Verbindung in deutlich krystallisirter Form zu erhalten. Wenn man — wie üblich — die Säure in wenig trokenem Benzol löst und dann Petroläther zu der Lösung fügt, so scheidet sich nämlich die Verbindung nicht immer in nadelförmigen Krystallen, sondern oft gallertartig aus, auch dann, wenn man die Säure vorher durch ihr Kupfersalz gereinigt hat.

Bei dem Constitutionsnachweis des Methylhexanons aus Pulegon hatte ich nun das erstere Keton der Oxydation unterworfen und eine Säure erhalten, welche ich als β-Methyladipinsäure ansprach. Demgegenüber stellte vor einiger Zeit Markownikoff die Ansicht auf, daß das von mir entdeckte Methylhexanon bei der Oxydation, namentlich bei der Verwendung von Salpetersäure als Oxydationsmittel, nicht β- sondern α-Methyladipinsäure (Schmelzpunkt 52—53°) gäbe. Es ist ersichtlich, daß beide Verbindungen aus β-Methylhexanon sich bilden können, je nachdem die Oxydation einsetzt, wie es die folgenden Formelbilder veranschaulichen:



Die Unterscheidung der beiden chemisch isomeren Säuren wird

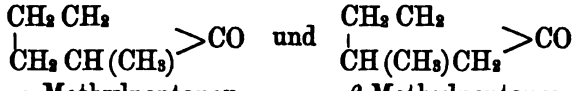
1) Semmler, Ber. 25, 3513; 26, 774. Manasse und Rupe, Ber. 27, 1818. Wallach, Ann. 289, 395. Tiemann, Ber. 29, 908. 923. Markownikoff, Ber. 33, 1909 u. a.

Digitized by Google

nun unzweifelhaft dadurch erschwert, daß sie wegen des Vorhandenseins eines asymmetrischen Kohlenstoffatoms in physikalisch verschiedenen Modificationen auftreten können. Die verschiedenen Angaben über die Schmelzpunkte der β-Methyladipinsäure sind zum Theil auch jedenfalls darauf zurückzuführen, daß man es eben mit solchen verschiedenen Modificationen oder mit Gemischen derselben zu thun hatte, die schwer zu trennen sind.

Ein sicherer Weg die Stellung des Methyls genau zu ermitteln, schien mir nun der folgende zu sein. Die Adipinsäuren gehen bekanntlich bei der Destillation ihrer Salze in Pentanone über. Aus der α-Methyl-Adipinsäure kann auf diese Weise nur α-Methyl-Pentanon, aus der β-Säure nur β-Methylpentanon sich bilden.

Betrachtet man nun den Bau dieser beiden cyclischen Ketone:



α-Methylpentanon β-Methylpentanon

so ist es klar, daß nach der Claisen'schen Regel bei der Condensation mit Benzaldehyd aus dem α-Methylpentanon nur eine Monobenzyliden-Verbindung, aus dem β-Methylpentanon aber eine Dibenzyliden-Verbindung sich herleiten kann, insofern im α-Keton dem Carbonyl nur ein substitutionsfähiges Methylen benachbart steht, im β-Keton aber deren zwei.

Das Dibenzyliden-β-Methylpentanon habe ich in der That nun schon früher leicht in Form einer schön krystallisirenden, gelben, bei 149—151° schmelzenden Verbindung erhalten können (Ber. 29, 1601).

Das Condensationsproduct des α-Methylpentanons mit Benzaldehyd ist noch nicht bekannt. Ich habe daher Herrn Speransky veranlaßt in erster Linie diese Verbindung zu bereiten.

α-Methyladipinsäure wurde nach Perkin (Journ. chem. Soc. 47, 807), hergestellt, durch Destillation des Kalksalzes in α-Methylpentanon verwandelt und dieses mit Benzaldehyd in üblicher Weise condensirt.

Es wurde, wie zu erwarten war, eine Monobenzylidenverbindung erhalten und zwar in Form farbloser, bei 123—124° schmelzender Nadeln.

Diese Verbindung ist in Zusammensetzung und Eigenschaften so verschieden von der Benzylidenverbindung des β-Methylpentanons, daß man dadurch die Methylpentanone und folglich auch auf diesem Umweg die α- und β-Adipinsäure gut unterscheiden kann.

Nunmehr wurde sowohl Pulegon als auch Methylhexanon aus

Digitized by Google

Pulegon oxydirt. Ersteres mit Permanganat, letzteres sowohl mit Permanganat als auch mit Salpetersäure. Die gewonnenen Säuren wurden jede getrennt für sich in Methylpentanon verwandelt und dieses dann mit Benzaldehyd condensirt. In allen Fällen wurde allein das characteristische, schön krystallisirende, gelbe, bei 149—151° schmelzende Dibenzyliden-β-Methylpentanon erhalten.

Damit ist die Richtigkeit meiner früheren Angabe erhärtet, daß bei der Oxydation von Methylhexanon aus Pulegon β-Methyladipinsäure entsteht und zwar unter den von uns gewählten Bedingungen ausschließlich. Zu genau demselben Resultat sind auch (beiläufig nach Abschluß unserer Versuche) Bouveault und Tetry (Bull. Soc. ch. **25**, 441; Centrbl. 1901. I. 1151) gekommen, die zur Beweisführung aber die Eigenschaften der Anilide der isomeren Adipinsäuren heranzogen.

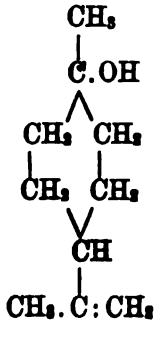
Endlich sei noch folgender Thatsachen gedacht. Wenn man die rohe β-Methyladipinsäure im Vacuum destillirt, so geht vor der erstarrenden Säure gewöhnlich ein Vorlauf über, der bei Luftabschluß flüssig bleibt, bei Luftzutritt allmählich erstarrt. Es liegt hier das schon von Manasse und Rupe beobachtete Anhydrid der β-Methyladipinsäure vor. (Ber. **27**, 1821).

Behandelt man destillirte, bei 86—87° schmelzende β-Methyladipinsäure (aus Pulegon) mit trockenem Benzol, so löst dieses nur einen Theil der Säure. Der Rückstand schmilzt dann bei 91°, der in Lösung gegangene Antheil, nachdem er wieder auskrystallisirt ist, bei 84°.

III. Ueber eine Reihe neuer isomerer cyclischer Ketone der Formel $C_9H_{14}O$ und $C_9H_{16}O$.

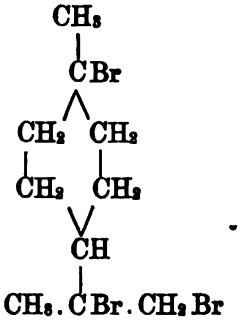
1) Abbauproducte des Terpineols.

Das von Dr. Helle und Stephan im flüssigen Terpineol aufgefundene, bei 32° schmelzende Terpineol



Digitized by Google

das mir die Firma Schimmel & Co. freundlichst zur Verfügung stellte, habe ich in Gemeinschaft mit Herrn stud. O. Rahn etwas näher untersucht. Wenn man das Terpineol in Eisessiglösung mit 1 Mol. Brom versetzt und dann Eisessig-Bromwasserstoffsäure hinzufügt, so entsteht ein Tribromid, dem die Formel



zukommen muß.

Dies Tribromid schmilzt bei 65° und besitzt einen Geruch, welcher sehr an den der Hologenwasserstoffadditionsproducte des Dipentens erinnert, zu denen es in naher Beziehung steht. Bei Einwirkung von Brom entsteht daraus Dipententetrabromid.

Bei der Oxydation des Terpineols mit Kaliumpermanganat entsteht, wie schon Helle und Stephan fanden, ein Glycerin $C_{10}H_{20}O_3$. Diese Verbindung schmilzt nach dem Umkrystallisiren aus Essigäther bei 116—117°. Wird sie mit verdünnter Schwefelsäure gekocht, so spalten sich 2 Moleküle Wasser ab. Man erhält eine mit Wasserdämpfen flüchtige Verbindung $C_{10}H_{16}O$ (ein Oxyd oder ein Alkohol) von folgenden Eigenschaften:

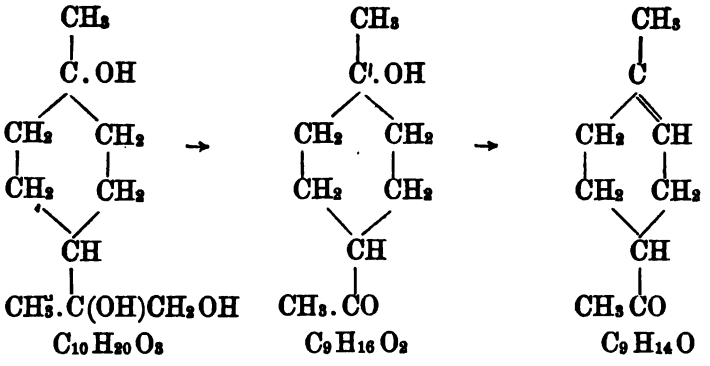
Siedepunkt 217—225, $d = 0.977$, $n_D = 1.4930$ bei 20°.

Diese Verbindung ähnelt in ihren allgemeinen Eigenschaften, namentlich auch im Geruch, der isomeren Verbindung $C_{10}H_{16}O$, welche durch Wasserabspaltung aus dem Oxydationsproduct $C_{10}H_{20}O_3$ aus Bihydrocarveol erhalten wird.

Bei der Oxydation des bei 116—117° schmelzenden Glycerins $C_{10}H_{20}O_3$ entsteht, wie schon Helle und Stephan fanden, ein Oxyketon $C_9H_{16}O_2$.

Erwärmt man dies Oxyketon mit verdünnter Schwefelsäure, oder nimmt man die Oxydation des Glycerins von vorn herein mit Chromsäure in schwefelsaurer Lösung vor, so verliert das Oxyketon Wasser und man erhält ein Keton $C_9H_{14}O$. Der Vorgang wird durch folgende Formeln deutlich:

Digitized by Google



Noch einfacher gelangt man zu demselben Product, wenn man das Terpineol direct mit Chromsäure oxydirt.

Das Keton $C_9H_{14}O$ ist durch folgende Eigenschaften characterisirt. Siedepunkt 205—206°, d = 0.9400, n_D = 1.4719 bei 19°.

Das Semicarbazon schmilzt bei 164—165°, das Oxim aus verdünntem Alkohol krystallisirt bei 51—52°, es ist selbst in Petroläther sehr löslich. Das gebromte Oxim, $C_9H_{14}Br_2NOH$, krystallisirt gut und schmilzt bei 130°.

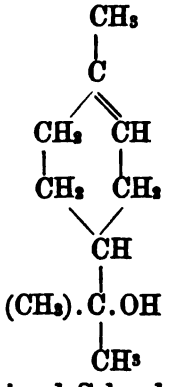
Das Keton $C_9H_{14}O$ darf als Tetrahydro-para Methyltolyl-keton aufgefaßt werden und die Richtigkeit dieser Betrachtungsweise wurde durch Ueberführung der hydrirten Verbindung in das aromatische Keton erwiesen. Erwärmt man die erstere nämlich mit dem etwa vierfachen Volum concentrirter Schwefelsäure, bis Entwickelung von Schwefeldioxyd auftritt und destillirt dann mit Wasserdampf, so geht ein dem Acetophenon sehr ähnlich riechendes Oel über, das bei 222—225° siedete und durch die Analyse sowohl wie durch Ueberführung in das bei 88—89° schmelzende Oxim und in das bei 100° schmelzende Bromsubstitutionsproduct als p-Methyltolylketon erkannt wurde, welches letztere von Widman und Bladin (Ber. **19**, 583) durch Oxydation des Cymols, von Michaelis (Ber. **15**, 185) und von Claus (Ber. **19**, 234) synthetisch aus Toluol und Essigsäureanhydrid erhalten ist. Das Tetrahydroketon ist beiläufig isomer mit einer von Perkin und Kipping (Ber. **23**, R. 249) durch Condensation aus α, ω-Diacetylpentan erhaltenen Verbindung $C_9H_{14}O$, welche ein Tetrahydro-ortho-Methyltolylketon ist und übrigens auch denselben Siedepunkt wie die para-Verbindung besitzt.

Bei der Reduction in ätherischer oder alkoholischer Lösung mit Natrium nimmt das hydrirte Keton nur zwei Wasserstoffatome auf und verwandelt sich in einen Alkohol $C_9H_{16}O$.

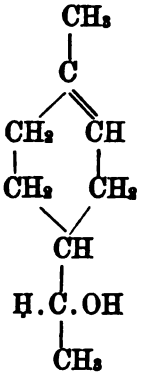
Diese Verbindung hat besonderes Interesse dadurch, daß sie

Digitized by Google

ein niederes Homologes des bei 35° schmelzenden Terpineols darstellt, wie folgende Formelzusammenstellung zeigt:



Terpineol Schmelzp. 35°



Neuer Alkohol.

Der Alkohol $C_9H_{15}OH$ hat folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 212—213°, d = 0.942, n_D = 1.4836 bei 19°

M = 42.49 (berechnet für $C_9H_{15}OH$ F = 42.55).

2) Ueber Ketone $C_9H_{14}O$ und $C_9H_{16}O$ aus Pulegensäure.

Wenn man das Oxylacton, $C_{10}H_{16}O_3$, welches bei der Oxydation der Pulegensäure mit Permanganat entsteht, mit concentrirter Schwefelsäure erwärmt, so entsteht ein Keton $C_9H_{16}O$ von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt 183°, d = 0.8925, n_D 1.44506 bei 21°.

Dieses Keton, welches Pulenon genannt werden soll, giebt bei der Reduction einen Alkohol, $C_9H_{18}O$, das Pulenol, von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt 187—189°, d = 0.8953, n_D = 1.4569 bei 20°.

Durch Wasserabspaltung giebt der Alkohol einen Kohlenwasserstoff C_9H_{16}, das Pulenen, der sich mit Nitrosylchlorid zu einer blau gefärbten Verbindung $C_9H_{16}NOCl$ vom Schmelzpunkt 88—89° vereinigt.

Das Oxim des Pulenons C_9H_{16}:NOH schmilzt bei 94—95°. Es läßt sich unter sehr vorsichtig zu wählenden Bedingungen in ein Isoxim umlagern, das bei 96—97 schmilzt. Das Isoxim läßt sich nicht zu einer Amidosäure aufspalten, sondern giebt beim Erwärmen mit Säuren eine Nonylensäure. Der Vorgang wird verständlich unter Berücksichtigung der Leichtigkeit, mit der Pulenon-Oxim und -Isoxim sich in Nonylensäurenitril, $C_9H_{15}N$, vom Siedepunkt 216—217° verwandeln lassen.

Digitized by Google

Das durch Kohlensäureabspaltung aus Pulegensäure leicht erhältliche Pulegen $C_{10}H_{16}$ habe ich in Gemeinschaft mit Herrn F. Colmann näher untersucht.

Der Kohlenwasserstoff vom Siedepunkt 138—139°, d = 0.791, n_D = 1.44 giebt bei der Oxydation eine bei 15 mm bei 164° unter gewöhnlichem Druck bei 265° siedende Ketonsäure $C_9H_{16}O_3$, deren Semicarbazon bei 164° schmilzt.

Mit Nitrosylchlorid vereinigt sich das Pulegen zu einem weißen, leicht löslichen Product $C_9H_{16}NOCl$, welches sich beim Erwärmen mit Piperidin in das bei 106—107° schmelzende Nitrolpiperidid $C_9H_{16}NO.NC_5H_{10}$ überführen läßt.

Durch Salzsäureabspaltung erhält man aus dem Nitrosochlorid das Oxim C_9H_{14}:NOH als eine bei 11 mm bei 120—125° siedende, dicke Flüssigkeit.

Säuren scheiden aus dem Oxim beim Erwärmen ein Keton $C_9H_{14}O$, das Pulegenon, ab. Diese Verbindung, welche ich im Begriff bin mit Herrn J. Thede näher zu studiren, hat folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 189—190°, d = 0.914, n_D = 1.4645.

Das Semicarbazon schmilzt bei 183—184°.

Bei der Reduction mit Natrium in alkoholischer Lösung nimmt das Pulegenon 4 Wasserstoffatome auf.

Der Alkohol $C_9H_{18}O$ siedet bei 15 mm zwischen 77—78°.

Durch Oxydation dieses Alkohols erhält man dann das Bihydro-Pulegenon $C_9H_{16}O$ von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt 188—189°, d = 0.8890, n_D = 1.4439 bei 20°.

M = 41,82 (berechnet für $C_9H_{16}O$ = 41.61).

Das Keton ist ganz beständig gegen kalte Permanganatlösungen. Sein sehr schwer in Alkohol lösliches Semicarbazon schmilzt bei 176—178°, das Oxim ist schwer zum Erstarren zu bringen.

3) Ueber ein Trimethylhexenon $C_9H_{14}O$ und ein Trimethylhexanon $C_9H_{16}O$ aus Geraniolen.

Die Aehnlichkeit, welche das Pulegen mit dem Cyklogeraniolen Tiemanns in den physikalischen Eigenschaften aufweist, ebenso wie die Aehnlichkeit der aus beiden Kohlenwasserstoffen bei der Oxydation entstehenden Ketonsäuren, machten einen eingehenderen Vergleich beider Verbindungen nöthig, durch welchen die vollkommene Verschiedenheit der Substanzen klar gelegt wurde.

Digitized by Google

Herr Scheunert hat das Cyklogeraniolen in größeren Mengen dargestellt und daraus sind folgende Abwandlungsprodukte erhalten worden. Der bei 138—139° siedende Kohlenwasserstoff (d = 0.8030, n_D = 1.44406) liefert sowohl ein Nitrosochlorid als auch besonders leicht ein schwer lösliches Nitrosat, $C_9H_{16}N_2O_4$. Diose Verbindungen setzen sich glatt mit Basen um. Das Nitrolpiperidid, $C_9H_{16}NONC_5H_{10}$ schmilzt bei 136—138°, das Nitrolbenzylamin, $C_9H_{16}NONHC_7H_7$ bei 106°. Beim Kochen mit alkoholischem Alkali bekommt man aus dem Nitrosochlorid oder Nitrosat das Trimethylcyklohexenonoxim $C_9H_{14}NOH$. Diese Verbindung siedet bei 15 mm bei 131—132° und schmilzt nach dem Umkrystallisiren aus einer Mischung von Aether und Ligroïn bei 128—129°. Bei der Zerlegung mit Säuren entsteht daraus das Trimethylcyklohexenon, $C_9H_{14}O$, von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt 195—196°, d = 0.9245, n_D = 1,4749 bei 25°.

	Berechnet für		
Keton $C_9H_{14}OF$	Alkohol $C_9H_{14}OF^2$	Gefunden
M = 41.22	42.16	42.02.

In seinem physikalischen Verhalten zeigt das Keton also dieselbe Anormalität wie Carvenon, Isothujon, Pulegon, d. h. es scheint in freiem Zustand nicht in der Keto- sondern in der Enol-Form vorzuliegen.

Das Semicarbazon des Ketons ist in kaltem Aether merklich löslich und schmilzt bei 158—159°.

Bei der Reduction in alkoholischer Lösung mit Natrium erhält man aus dem Keton $C_9H_{14}O$ neben einem bei 128—130° schmelzenden Pinakon einen Alkohol $C_9H_{18}O$, das Trimethylcyklohexanol, von folgenden Eigenschaften:

Dickes Oel von campherartigem Geruch. Siedepunkt 192—193°.

Bei der Oxydation entsteht daraus das Trimethylcyklohexanon, $C_9H_{16}O$.

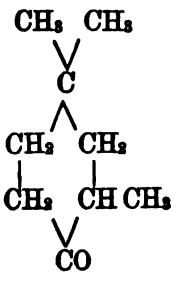
Siedepunkt 191°, d = 0,9, n_D = 1.4548.

Dies Keton giebt ein aus verdünntem Alkohol gut krystallisirendes, bei 108—109° schmelzendes Oxim.

Was die Constitution des zuletzt beschriebenen dreifach methylirten Hexanons anbetrifft, so kommen nur zwei Formeln in Betracht, nämlich:

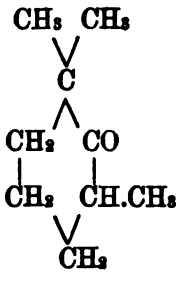
Digitized by Google

I



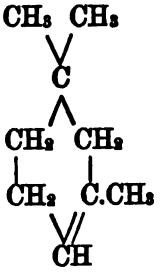
oder

II



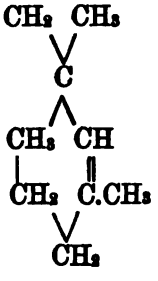
diese Formeln entsprechen den beiden möglichen Cyklogeraniolenen

I



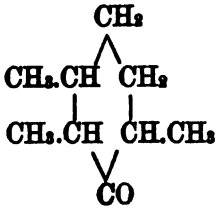
und

II



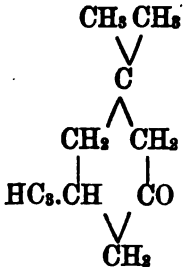
von welchen vermittelst der experimentell durchgeführten Reactionsfolge der Kohlenwasserstoff I das Keton I und der Kohlenwasserstoff II das Keton II liefern muß.

Die Versuche zur Entscheidung dieser Constitutionsfrage sind noch nicht abgeschlossen. Es mag darauf hingewiesen werden, daß schon zwei Trimethylhexanone mit anderer Vertheilung der Gruppen bekannt sind, nämlich erstens:



von Zelinsky und Reformatzky aus Trimethylpimelinsäure dargestellt (Ber. 28, 2945), von folgenden Eigenschaften: Siedepunkt: 190—191°, d = 0.9129 und zweitens

Digitized by Google



von Knövenagel (Ann. 297, 198) durch Hydrirung von Isophoron erhalten, mit folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt 188°,5—189°,5, d = 0.8923, n_D = 1.4455.

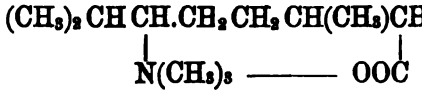
Oxim, Schmelzpunkt 58°, Semicarbazon, Schmelzpunkt 204°.

IV. Ueber die Bildung von ε-Betaïnen.

Nachdem von mir bewiesen worden war, daß die s. g. Isoxime cyklischer Ketone nichts anderes vorstellen als die inneren Anhydride von Amidosäuren und es damit als sichergestellt gelten muß, daß bei Fernstellung des Stickstoffatoms vom Carboxyl besonders leicht Ringschluß sich vollziehen kann, lag der Gedanke nahe, aus den Amidosäuren, welche NH_2 etwa in δ- oder ε-Stellung zum Carboxyl enthalten, auch Betaïne herzustellen. Das hat sich auch leicht verwirklichen lassen. Schon vor längerer Zeit hat Herr E. Kösch auf meine Veranlassung die Amidodecylsäure aus Menthonisoxim (Annal. d. Ch. 312. 197) esterificirt und den gewonnenen Amidoester dann alkylirt.

Es wurde bei Anwendung von Jodmethyl auf diese Weise ein quaternäres Jodid $C_9H_{18}\overset{N(CH_3)_3J}{\underset{CO_2C_2H_5}{}}$ gewonnen, das bei 117° schmolz, durch das Chlorid hindurch in ein gut characterisirtes Platin und Goldsalz und bei der Umsetznng mit feuchtem Silberoxyd in ein Betaïn übergeführt werden konnte, dessen schön krystallisirendes Chlorhydrat bei 191—192° schmilzt.

Diesem Betaïn darf man die Formel



zuschreiben.

Eine isomere Verbindung, nämlich das Betaïn

Digitized by Google

$$\begin{array}{l} CH_3CH.CH_2CH_2CH(C_3H_7)CH_2 \\ \quad | \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad | \\ \quad N(CH_3)_3 \text{———} OOC \end{array}$$

hat Herr L. Fresenius aus der Amidodecylsäure erhalten, welche durch Aufspaltung des Tetrahydrocarvonisoxims entsteht. Diese Verbindung ließ sich aber weniger leicht in gut characterisirte Derivate überführen, wie die isomere aus Menthon.

V. Ueber Phellandren.

Bei meiner letzten Untersuchung über das Phellandrennitrit gelangte ich zu der Auffassung, daß die Addition des N_2O_3 bei Bildung des Körpers an einer CH:CH Gruppe erfolge und daß dem Nitrit die Configuration — CH(NO) — CHO(NO) — zuzuschreiben sei. Zu dieser Annahme stand nun eine Angabe von Pesci im Widerspruch, nach der bei der Reduction von Phellandrennitrit mit Eisessig und Zink ein Diamin $C_{10}H_{16}(NH_2)_2$ entstehen sollte, das er Phellandrendiamin genannt hat und von dem er angiebt, daß es mit Wasserdampf flüchtig sei und einen Siedepunkt von 209—214° zeige.

Bei der Nachprüfung der Pesci'schen Versuche war es nun nie gelungen eine Verbindung von den eben erwähnten Eigenschaften zu erhalten, dagegen war das Auftreten von Tetrahydrocarvylamin und ferner die Bildung einer sehr viel höher siedenden flüchtigen[1]) und einer nicht flüchtigen Base beobachtet worden, die ich als Oxybase glaubte ansprechen zu müssen.

Herr Pesci war nun so freundlich mir nach Erscheinen meiner letzten Arbeit Präparate seines Phellandrendiamin zu übersenden und zwar das Carbonat und das von ihm beschriebene in kaltem Wasser kaum lösliche Platinsalz. Ich konnte mich somit leicht von der Richtigkeit der Angaben Pesci's bezüglich der Zusammensetzung dieser Verbindung überzeugen.

Um so auffallender ist es, daß bei Wiederholung der Pesci'schen Versuche, die ich gemeinsam mit Dr. Böcker ausgeführt habe, nun zwar neben andern Verbindungen auch ein wohl characterisirtes mit Wasser flüchtiges Diamin isolirt werden konnte, aber von ganz anderen Eigenschaften als sie der Pesci'schen Base zukommen.

Die ersten Versuche wurden mit einem Phellandrennitrit an-

1) H. Lauffer, Inauguraldissertation, Göttingen.

Digitized by Google

gestellt, das aus Phellandren des Eucalyptusöls dargestellt worden war.

Bei sehr vorsichtiger Reduction dieses Präparats mit Zink und Eisessig gelang es eine Base von folgenden Eigenschaften zu isoliren: Mit Wasserdampf schwer flüchtig, in Wasser sehr löslich.

Siedepunkt 251—253° bei gewöhnlichem Druck und 132—134° bei 17—18 mm. Die Base ist optisch activ und zwar linksdrehend. Sie ist ferner dadurch ausgezeichnet, daß sie mit 1 Mol. Salzsäure ein schön krystallisirendes, luftbeständiges, in kaltem Wasser nicht ganz leicht lösliches Chlorhydrat giebt. Das Salz ist auch in kaltem absolutem Alkohol ziemlich schwer löslich und wird aus alkoholischer Lösung durch Aether krystallinisch gefällt. Es schmilzt bei 209—210°. Das Carbonat der Base ist nicht characteristisch. Wenn man aber ihre ätherische Lösung mit Schwefelkohlenstoff versetzt, so fällt sofort eine weiße Verbindung aus.

Ueber die Natur der Base ließen die Analysen und das Verhalten keinen Zweifel. Sie ist ein Diamin. Dem beschriebenen Chlorhydrat kommt die Formel $C_{10}H_{16}(NH_2)_2.HCl$ oder $C_{10}H_{18}(NH_2)_2.HCl$ zu.

Versetzt man die sehr concentrirte Lösung dieses Salzes mit Platinchlorid, so fällt ein amorphes, schlecht characterisirtes Platinsalz aus. Dagegen giebt Platinchlorid auch mit concentrirten Lösungen der Base in 2 Mol. Salzsäure keine Fällung.

Die Zusammensetzung des Diamins stimmt also ganz mit der, welche auch Pesci für seine Base angiebt, aber die Eigenschaften sind ganz verschieden, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

	Siedepunkt	Chlorhydrat	Platinsalz
Pesci	209—214°	zerfließlich	wenig löslich in Wasser
Wallach	251—253°	luftbeständig	sehr löslich in Wasser.

Bei dieser großen Verschiedenheit des Befundes mußte der Gedanke aufkommen, daß das von Pesci und von uns verwandte Phellandren verschieden gewesen sei. Pesci hatte sein Phellandren aus Phellandrium aquaticum hergestellt, das diesseits verwendete stammte aus Eucalyptus amygdalina.

Durch die Gefälligkeit der Firma Schimmel & Co. haben wir uns daher mit Phellandren aus Phell. aquat. versorgt und daraus das Nitrit bereitet.

Es kann nun keinem Zweifel unterliegen, daß die Phellandrene verschiedener Herkunft nicht ganz identisch sind.

Digitized by Google

Die Phellandrene, welche ich früher in der Hand hatte und mit einander vergleichen konnte, verhielten sich chemisch ganz gleich und gaben ein Nitrit, dessen Schmelzpunkt ich auch bei sorgfältigster Reinigung nie über 105° bringen konnte. Aus einem jetzt bezogenen Phellandren aus Eucalyptusöl ließ sich leicht ein Nitrit vom Schmelzpunkt 112—113° isoliren. Schreiner will mehrere Nitrite des Phellandren, von denen das eine bei 105—106° das andere bei 120—121° schmilzt, ferner ein bei 97° schmelzendes beobachtet haben.

Mir ist ein bei 120° schmelzendes Nitrit noch nicht begegnet, dagegen zeigte das aus dem frisch bezogenen Wasserfenchelöl dargestellte Nitrit wieder ganz andere Eigenschaften, als ich sie bis dahin beobachten konnte. Die Verbindung war nur undeutlich krystallisirt, in Essigäther viel leichter löslich als das Nitrit aus Eucalyptusöl und zeigte einen Schmelzpunkt 89°. Dies Phellandrennitrit aus Wasserfenchelöl wurde nun gemäß den Angaben von Pesci reducirt. Es entstand auch in diesem Fall ein Diamin, dessen Siedepunkt mit dem bereits angegebenen zwar übereinstimmte, im übrigen in seinen Eigenschaften aber von dem Diamin aus Eucalyptusöl ganz abwich, dagegen abgesehen von dem viel höheren Siedepunkt die wichtigsten von Pesci für seine Base angegebenen Eigenschaften zeigte. Das Chlorhydrat besaß keine Neigung zu krystallisiren. Das krystallinische Platinsalz war schwer löslich und zeigte die normale Zusammensetzung $[C_{10}H_{16}(NH_2)_2.2HCl].PtCl_4$. Die Pescische Base ist auch linksdrehend.

Nachdem somit festgestellt war, daß man die Phellandrene verschiedenen Ursprungs nicht als identisch betrachten darf, ist zunächst die Untersuchung der Verbindungen aus Eucalyptus-Phellandren fortgeführt worden.

Das Phellandrendiamin $C_{10}H_{16}(NH_2)_2$ vom Siedepunkt 251—3° characterisirt sich seinem Verhalten nach als ein hydrirtes Diamin des Cymols. Wird nämlich das erst beschriebene Mono-Chlorhydrat der Base trocken erhitzt, so entsteht unter Salmiak- und Ammoniak-Abspaltung Cymol, welches durch seinen Siedepunkt und Ueberführung in die bei 156° schmelzende Oxypropylbenzoësäure mit Sicherheit identificirt wurde.

Die nahe Beziehung des Phellandrens zum Cymol ist damit von neuem erwiesen und beiläufig bemerkt letzthin auch durch Versuche, welche Herr Tenhaeff im hiesigen Laboratorium auszuführen im Begriff ist, weiterhin bestätigt. Es entsteht nämlich auch in reichlicher Menge Cymol (neben anderen Producten), wenn

Digitized by Google

reines Phellandrennitrit einige Zeit mit Mineralsäuren in der Kälte in Berührung bleibt.

Bei der Reduction des Phellandrennitrits nach Pesci entstehen, wie ich früher schon beobachtet hatte, bedeutende Mengen einer nicht flüchtigen Verbindung, die ich als Oxybase ansprach. Es hat sich gezeigt, daß diese bei der Destillation unter Auftreten von Wasser, Ammoniak und einer flüchtigen Base zerfällt.

Dies Product muß noch näher untersucht werden.

Die neuerdings gemachten Beobachtungen führen aber schon jetzt dazu, die von mir discutirte Formel für das Phellandrennitrit $\begin{matrix}.CH\,NO\\ |\\ .CH.ONO\end{matrix}$ etwas abzuändern.

Man wird jetzt eher die Vertheilung der Stickstoffatome in folgender Weise annehmen müssen:

$$\begin{matrix}.CH\,NO\\ |\\ .CH\,NO\end{matrix}\!\!> O.$$

Digitized by Google

Beitrag zur physiologischen Wirkung der organischen Ammonium-Jodide und Polyjodide.

Von

C. Jacobj.

Vorgelegt durch Herrn O. Wallach in der Sitzung vom 8. Februar 1902.

Die in der Chirurgie mit dem Jodoform und den ihm nahestehenden organischen Jodverbindungen bei der Wundbehandlung und sonstigen localisirten Krankheitsprocessen erzielten günstigen Resultate, führt man vor Allem auf die Wirkung des sich aus den unlöslichen Verbindungen unter dem Einfluß der Gewebe abspaltenden Jods zurück. Von der Ueberlegung ausgehend, daß unter diesen Umständen eine Verbindung um so geeigneter sein werde, die Jodoformwirkung hervorzurufen, je reicher sie an leicht abspaltbarem Jod ist, hat Herr Geheimrath Wallach im chem. Institut dahier das 83 %, zum Theil locker gebundenes Jod enthaltende, geruchlose Tetramethylammoniumtrijodid $(CH_3)_4NJ_3$, welches von Weltzien zwar 1856 bereits dargestellt aber bisher nicht auf sein physiologisches Verhalten untersucht war, zwecks Prüfung auf seine Wirksamkeit in entsprechenden Mengen hergestellt.

Herr Geheimrath Rosenbach übernahm es gerne, orientirende Versuche mit kleinen Mengen desselben in geeigneten chirurgischen Fällen anzustellen und es ergaben diese, daß das Präparat den gehegten Erwartungen in der That zu entsprechen schien. Herr Rosenbach theilt über seine bisherigen Erfahrungen mit demselben Folgendes mit:

„Als ich die therapeutischen Versuche mit dem Tetramethylammoniumtrijodid aufnahm, sagte ich mir von vornherein, daß dieser Körper wie auch die andern schwerlöslichen Jodabspaltenden Körper, z. B. das Jodoform, vorwiegend zu einer örtlichen Oberflächen-Einwirkung wirksam sein werde. Ich habe ihn daher bis

Digitized by Google

jetzt da angewandt wo der Sitz einer Infektion wesentlich nur die Oberfläche betraf. Der erste Theil der Versuche umfaßt ältere Wunden oder granulirende Stellen, welche nicht ordentlich granulirten und vernarbten, sondern mit einem schmierigen, weißlichen Belag bedeckt und von einem entzündlichen Hof umgeben waren.

Auf solche hatte der Körper meistens eine prompte Einwirkung insofern als nach 1 oder 2 Tagen frische Granulationen auftraten und die Entzündung verschwand. Sodann habe ich 2 mal Versuche bei Infektion mit Leichengift gemacht. In leichteren und anfänglichen Fällen der Art kommt es nicht selten nur zu örtlichen Geschwüren mit speckigem Belag, oft mit Lymphgefäßentzündung und Schmerzhaftigkeit der regionären Drüsen, aber ohne fortschreitende Phlegmone. In beiden Fällen genügte eine 2 malige Anwendung des Körpers in 24stündigen Zwischenräumen um die Infektion zu tilgen.

Ich habe ferner den Körper angewandt bei aktinomykotischen Fisteln, welche hartnäckig nach einer Bauchoperation zurückblieben. Hier führte das Präparat nach mehrfacher Applikation zur Heilung. Hier zeigten sich 2 mal nach Einbringung in die Fisteln in etwas erheblicherer Menge örtliche Schmerzen.

Ueberraschende Resultate erzielte ich mit dem Präparat bei Alveolarpyorrhoe. In chronischen Fällen mit sehr geringer Absonderung aber Schmerzen und Lockerung der Zähne, wurde das Präparat zwischen Zahn und Zahnfleisch, soweit dieses abgelöst war, gebracht. Die Schmerzen hörten oft schon nach der ersten Applikation auf und die Zähne wurden fester. Meist mußte ich die Applikation mit anfangs kürzeren Intervallen von einigen Tagen, später in längeren, wiederholen. In Fällen in denen sich incrustirende Beläge auf die Oberfläche der Zahnsubstanz niederschlagen, ist die genaue Entfernung dieser Bedingung für den Erfolg des Mittels."

Göttingen, 4. II. 02. J. Rosenbach.

Ehe man jedoch zur Anwendung größerer Mengen überging, erschien eine genauere Prüfung der Substanz auf etwaige ihr zukommenden allgemeinen Giftwirkungen angezeigt, zunächst schon wegen des hohen Gehaltes an offenbar leicht abspaltbarem Jod, das als solches wie bekannt nachtheilige Allgemeinwirkungen zu entfalten vermag.

Wie die von J. im pharmakolog. Institut dahin angestellten Untersuchungen, welche im Folgenden kurz wiedergegeben werden sollen, zeigen, kommen der Verbindung aber außerdem als Methylammoniumbase noch eine Reihe sehr wichtiger Wirkungen zu,

Digitized by Google

welche eine Verwendung desselben in größeren Dosen in der That gefährlich erscheinen lassen.

Entsprechend dem Aufbau der Verbindung als quaternärer Methylammoniumverbindung mußte zunächst von pharmakolog. Standpunkte jene, den meisten dieser Verbindungen eigene Wirkung erwartet werden, welche in einer Aufhebung des Leitungsvermögens des den Innervationsreiz vom Nerven auf den Muskel übertragenden Apparates besteht und damit die bekannte, dem Curare eigenartige Lähmung aller quergestreiften Muskeln bewirkt. Es zeigte sich, daß diese Wirkung am Frosch schon bei Einbringung von 5 mg des im Wasser unlöslichen Präparates in den Lymphsack in wenigen Minuten und nach Gaben von 0,1 gr.—0,15 gr. pro Kilo bei subcut. Inject. des in Glycerin suspendirten Pulvers bei Kaninchen und Katzen sich ausbildet und an den genannten Warmblütern durch Aufhebung der Bewegung der Athemmuskulatur unter Erstickung und damit eintretendem Blutdruckabfall den Tod bedingt, der indessen durch künstliche Athmung vermieden werden kann, unter deren Einfluß sich auch sofort ein normaler Blutdruck wieder herstellte.

Außerdem aber ergaben entsprechend angestellte Thierversuche, daß das Tetramethylammontrijodid auch die Wirkungen einer anderen Gruppe von Ammoniumverbindungen hervorruft, welche sich als Erregungen verschiedener Nervenendapparate darstellten. Als der pharmakolog. Repräsentant dieser Gruppe ist das von Schmiedeberg aus dem Fliegenschwamm isolirte Muscarin anzusehen, das als ein Trimethyldioxaethylammoniumhydroxyd $(CH_3)_3 . [(C_2H_3) . (OH)_2] . N.OH$ aufgefaßt wird und somit ebenfalls eine quarternäre Ammoniumbase darstellt.

Ebenso wie das Muscarin erregte das Tetramethylammoniumtrijodid die peripheren Endapparate des Vagus, jenes die Herzthätigkeit durch seinen Hemmungstonus regulierenden Nerven und bewirkte hierdurch am Frosch bereits in Gaben von 5 mg Herzstillstand in Diastole, welcher durch Atropin in Folge Lähmung der erregten Vagusenden, wie bei Muscarin sofort aufgehoben wurde. Desgleichen kam es bei Kaninchen und Katzen in Gaben von 0,05—0,1 gr. pro Kilo Körpergewicht zu sehr erheblicher Pulsverlangsamung mit der hierdurch bedingten Herabsetzung des Blutdruckes und ihren Folgen, und auch hier verschwand die Erscheinung sofort nach Injection von Atropin. An diesen Thieren konnte außerdem und zwar am charakteristischsten an Katzen, genau wie nach Muscarin der auf Erregung der Nervenendapparate der Drüsen beruhende heftige Speichelfluß, sowie die durch

Digitized by Google

Erregung des in der Wand des Verdauungstractus gelegenen nervösen Apparats bedingten energischen Contractionen des Magens und Darms, welche zu Erbrechen und Durchfällen führt, constatirt werden. Sogar ließ sich eine Verengerung der Pupille, wenn auch weniger prägnant wie beim Muscarin, nachweisen. Auch diese Erregungserscheinungen schwanden nach Atropin entsprechend der lähmenden Wirkung, welche dasselbe auf die erregten Nervenendapparate äußerte.

Man hat es somit in dem Tetramethylammoniumtrijodid mit einer Verbindung zu thun, welche die Curarewirkung mit der Muscarinwirkung und zwar, wie aus den Froschversuchen hervorgeht, in einer Gleichmäßigkeit vereinigt, wie sie bisher bei keiner anderen derartigen Verbindung constatirt sein dürfte. Wohl kommt eine solche Combination auch bei andern Ammoniumverbindungen vor, so findet sie sich, wie sich dies durch Versuche mit einem von Herrn Geheimrath Wallach gütigst zur Verfügung gestellten, schön chrystallisirten Präparat zeigen ließ, ebenfalls bei dem Tetramethylammoniumjodid. Indessen hier überwiegt die Curarewirkung so stark, daß bei der im Jahre 1873 von Rabuteau ausgeführten Untersuchung dieser Substanz nur diese bemerkt, die Muscarinwirkung aber übersehen wurde. Es tritt die letztere auch erst nach größeren Gaben hervor, denn es bewirken z. B. 20 mg des leicht löslichen Salzes erst nach $^1/_2$ Stunde eine Pulsverlangsamung von normal 28 auf 10 Pulse pro Min. beim Frosch, die aber auch hier in typischer Weise durch Atropin sogleich beseitigt wird. Ebenso überwog bei dem von Schmiedeberg, Harnack u. Jordan untersuchten Valearin und Amylarin (Valeryl u. Isoamyltrimethylammoniumchlorid) die Curarewirkung, während umgekehrt bei dem natürlichen und künstlichen Muscarin die Curarewirkung sich zwar noch nachweisen läßt, aber hier völlig in den Hintergrund des Vergiftungsbildes tritt, was ebenfalls wenigstens für das natürliche Muscarin durch erneute Controllversuche durchaus bestätigt gefunden wurde.

Die beschriebenen allgemeinen Giftwirkungen des Tetramethylammoniumtrijodids lassen somit selbst bei lokaler Applikation auf Wundflächen eine Anwendung etwas größerer Mengen als bedenklich erscheinen, zumal, da sich ergab, daß bei Application des trockenen Pulvers unter die Haut oder Injection einer Aufschwemmung desselben in Glycerin in das subcutane Bindegewebe, Kaninchen nur 0,015 gr. pro Kilo ohne Vergiftungserscheinungen ertragen, solche aber schon bei 0,05 pro Kilo, wenn auch noch nicht in einer das Leben bedrohenden Weise hervortreten und

Digitized by Google

bereits 0,1—0,15 gr. pro Kilo genügen, um den Tod bei diesen Thieren, wie bei Katzen in wenigen Stunden herbeizuführen.

Legt man diese Werthe zu Grunde und nimmt die Empfindlichkeit dieser Thiere gegen das Gift der beim Menschen als annähernd gleich an, so würde für einen 70 Kilo schweren Menschen bei ähnlicher Application nur eine Menge von 1—2 gr der Substanz als ungefährliche, 3—5 gr. bereits als giftig und 7—8 als tödtlichwirkende Dosis anzusetzen sein. Diese relativ beträchtliche Giftigkeit des an sich in seinen Localwirkungen praktisch brauchbar erscheinenden Präparats forderten nun zu der Frage auf, ob nicht andere Alkylgruppen an Stelle des Methyls enthaltende Ammoniumtrijodidverbindungen sich als weniger giftig und dabei local auf Grund einetretender Jodabspaltung therapeutisch doch ebenso wie die Methylverbindung brauchbar erweisen würden.

In diesem Sinne schienen die Aethylverbindungen vor Allem beachtenswerth, da Jordan seiner Zeit bei dem Tetraaethylammonjodid nur eine Curarewirkung hatte beobachten können und eine Nachprüfung seiner Versuche mit einem von Herrn Geheimrath Wallach gütigst zur Verfügung gestellten Präparat, nicht nur das Fehlen der Muscarinwirkung durchaus bestätigte, sondern auch ergab, daß dasselbe gleichfalls die Curarewirkung an Fröschen bei Gaben von 25—50 mg erst nach 1—2 Stunden völlig zu entfalten vermag, somit auch nach dieser Richtung erheblich weniger wirksam ist, als die analoge Methylverbindung. Auffallend war dabei, daß dasselbe am Frosch vor der Curarelähmung eine Erregung der musculomotirischen Nervenendapparate von ganz besonderer Heftigkeit und zwar wenige Minuten nach der Application des Giftes beginnend und bis zum Eintritt der Lähmung anhaltend bewirkte, welche zu ununterbrochenen heftigen Zuckungen am ganzen Körper führte. Daß es sich thatsächlich lediglich um eine Erregung der Nervenenden ohne Betheiligung des Centralnervensystems oder der Muskelsubstanz handelte, ging daraus hervor, daß die Zuckungen nach Durchschneidung der Nerven in dem von denselben innervirten Muskeln fortdauerten, nach Unterbindung der Beingefäße und curarisiren des Thieres am ganzen Körper sofort verschwanden, außer in dem von der Circulation ausgeschaltenen Beine, das die Zuckungen noch nach 24 Stunden zeigte. Auf Grund dieses Ergebnisses wurde nun auf Vorschlag von Herrn Geheimrath Wallach auch das Tetraaethylammontrijodid geprüft, das ebenso wie die Methylverbindung in Wasser ganz unlöslich ist. In der That zeigte sich, daß bei dieser Verbindung sowohl die Muscarin wie

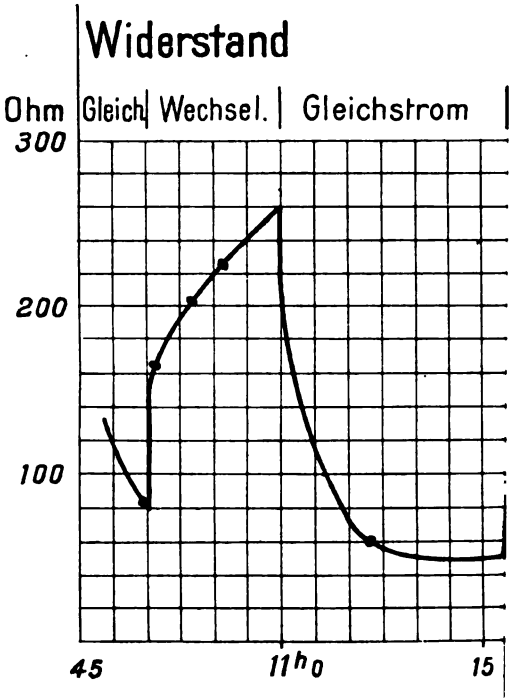
Digitized by Google

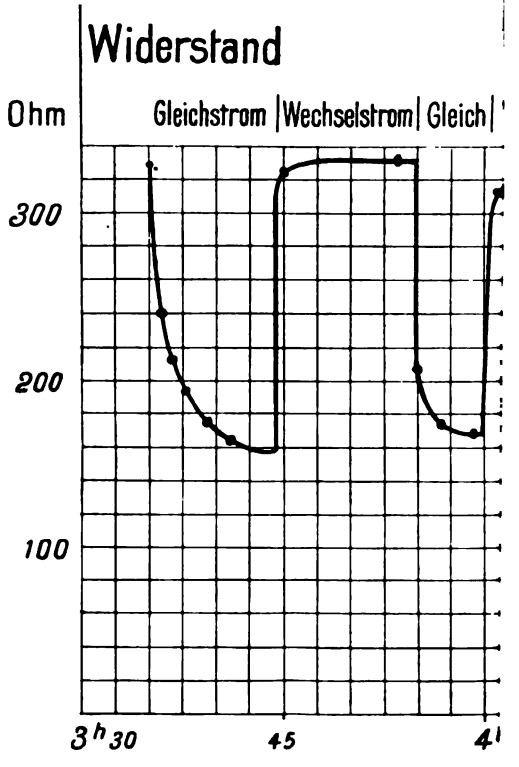
die Curarewirkung fehlten, denn selbst Gaben von 70 mg rufen am Frosch keinerlei, auch nicht einmal auf diese hinweisende Erscheinungen hervor, vielmehr sah man hier nur eine von den Aethylgruppen offenbar abhängige, narkotische Wirkung auf das Centralnervensystem, analog der des Aethylalkohols auftreten. An Katzen aber stellte sich selbst nach Gaben von 0,25 gr. pro Kilo nicht das geringste Unwohlsein ein, dagegen konnte hier im Harn der nächsten Tage Jod reichlich nachgewiesen werden, so daß eine umfänglichere Abspaltung desselben aus der Verbindung außer Frage steht.

Da somit das Tetraaethylammontrijodid auch bei Anwendung größerer Mengen, auf Grund des Ergebnisses an Katzen, zu etwa 15—17 gr. am Menschen, jene obenerwähnten gefährlichen Wirkungen der Methylverbindung nicht hervorrufen dürfte, in seiner, auf der Abspaltung des Jodes beruhenden, localen Wirkung aber jenem gleich zustehen, wenn nicht dasselbe noch zu übertreffen scheint, so dürfte dasselbe, so weit sich dies zur Zeit übersehen läßt, für die praktische Verwendung in der Chirurgie den gestellten Anforderungen wohl entsprechen. Herr Geheimrath Rosenbach hat deßhalb seine Versuche auch auf dieses Präparat ausgedehnt und werden die Ergebnisse derselben, sobald diese zu einem entsprechenden Abschluß gediehen sind, zur Veröffentlichung gelangen.

Digitized by Google

Digitized by Google





Digitized by Google

Digitized by Google

Zur Theorie der reellen Curvenintegrale.

Von

Lothar Heffter (Bonn).

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung vom 8. Februar 1902.

Wenn das Curvenintegral, wie es meist geschieht [1]), mit Hülfe einer durch den Integrationsweg gelieferten Transformation auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt und hierdurch definiert werden soll, so muß man (s. I. § 3) entweder die Differenzierbarkeit der den Weg definierenden Functionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ oder aber ihre wenigstens abteilungsweise vorhandene Monotonie voraussetzen. Deshalb war es für Herrn Jordan [2]), um das Integral für eine beliebige rektifizierbare Linie zu definieren, notwendig, es direkt als Grenzwert einer Summe zu erklären.

Auch hier soll ein beliebiger rektifizierbarer Integrationsweg zu Grund gelegt werden. Nur in dem Fall, daß er dem Bereich, in dem die Integrandenfunction gewisse Bedingungen erfüllt, als Begrenzung angehört, setzen wir voraus, daß $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, also die Integrationscurve selbst abteilungsweise monoton, d. h. eine solche speziellere rektifizierbare Curve sei, wie sie Herr Pringsheim (a. a. O.) überhaupt zu Grunde legt.

Müssen wir demnach wie Herr Jordan auf die Summenerklärung unmittelbar zurückgreifen, so unterscheidet sich dagegen ihre Begründung bei uns von der Jordan'schen dadurch, daß wir ohne Einführung der Länge der Integrationscurve direkt mit der „beschränkten Schwankung" der Functionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ arbeiten, der Eigenschaft also, aus der andererseits die Rek-

1) Vgl. z. B. Picard, Traité d'Anal. I (1891) S. 70 ff. — Pringsheim, Münch. Sitzungsber. 25. (1895) S. 39 ff., S. 295 ff., auf welche Abhandlung wir auch wegen Literatur und Geschichte der Theorie verweisen.

2) Cours d'Anal. 2me Éd. I. (1893) S. 181 ff.

Digitized by Google

tifizierbarkeit des Weges folgt[1]). Unsere Definition selbst unterscheidet sich aber noch in einem wesentlicheren Punkte von der citierten. Die Erwägung, daß bei allen wichtigeren Anwendungen der Curvenintegrale die für die Integrabilität der Function unter dem Zeichen erforderlichen Eigenschaften nicht nur auf der Integrationscurve selbst, sondern in einem Bereich bestehen, dem jene Kurve mindestens als Begrenzung angehört, veranlaßte zu der Erweiterung, daß die bei der Summenbildung benutzten Functionswerte in solchem Falle nur einer gewissen Nähe der Integrationscurve zu entstammen brauchen[2]).

Diese scheinbar unbedeutende Erweiterung der Definition wird nun in § 2 und 3 die gemeinsame und, wie ich glaube, sehr natürliche Quelle von Sätzen, die sonst erst als Folgerung des Cauchy'schen Satzes auftreten, oder speziellere Voraussetzungen erheischen, oder mindestens sehr viel mehr Mühe verursachen. Sie liefert auch beim Cauchy'schen Satz, dem der II. Abschnitt gewidmet ist[3]), die Zurückführung des Beweises auf den für ein Rechteck als unmittelbaren Ausfluß aus der Definition des Curvenintegrals.

Nunmehr schien es mir interessant, gewissermaßen die Genesis der notwendigen Bedingung, $f_2 = g_1$, für die Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes $\int (f\,dx + g\,dy) = 0$ zu verfolgen, wenn die Voraussetzungen über die Natur der Functionen f und g erst successive eingeführt werden (§ 2). Diesen verschiedenen Abstufungen der Voraussetzungen entsprechen die Beweise des Cauchy'schen Satzes: bei vorausgesetzter Integrabilität von f und g längs jeder Curve in einem Bereich G (§ 3), bei vorausgesetzter Stetigkeit von f, g, f_2, g_1 (§ 4), bei vorausgesetzter Stetigkeit von f und g und Existenz der vollständigen ersten Differentialien von f und g, also die Uebertragung des Cauchy-Goursat'schen Satzes[4]) auf reelle Integrale (§ 5).

1) Jordan, a. a. O. S. 105. — Study, Math. Ann. 47 (1896) S. 313.

2) Durch diesen Umstand besteht eine gewisse Verwandtschaft zwischen meiner Definition und der Dissertation des Herrn Noble, Eine neue Methode der Variationsrechnung, Göttingen 1901, s. besonders § 7.

3) Vgl. hierzu noch A. Hurwitz, Ueber die Entwicklung der allgem. Theorie der analyt. Functionen in neuerer Zeit. Verhandl. d. Math.-Congr. Zürich 1897. — Encyclop. d. math. Wissensch. II. B. 1 (Osgood) S. 14, 15. — Pringsheim, Münch. Sitzungsber. 29. (1899) S. 58 ff. — Osgood, Bull. of the Amer. Math. Soc. 2. Ser. 5. (1899) S. 84 ff.

4) Transactions of the Amer. Math. Soc. 1. (1900) S. 14—16. Vgl. hierzu auch Pringsheim, Bibl. Math. 3. Folge, 1. (1900) S. 477—479 und Transactions of the Amer. Math. Soc. 2. (1901) S. 413—421.

Digitized by Google

Die Beweise in § 3 und 4 beruhen eigentlich auf demselben Grundgedanken wie der Cauchy-Riemann'sche Doppelintegral-Beweis, ohne jedoch den Begriff des Doppelintegrals selbst einführen oder benutzen zu müssen. Dies ist in der That einfach deshalb möglich, weil jenes dort benutzte Doppelintegral nebst allen seinen Elementen den Wert Null hat. Der Beweis in § 5 bedient sich zum Teil desselben Gedankens wie der von Herrn Moore[1]), gestaltet sich aber dadurch noch einfacher, daß hier ein anderer Mittelwertsatz benutzt wird und der Beweis nicht wie der Moore'sche auf die Goursat'sche Betrachtung ausläuft.

In § 6 endlich werden noch einige Folgerungen aus dem Vorangehenden gezogen.

I. Definition und allgemeine Eigenschaften der Curvenintegrale.

§ 1.

Definition des Curvenintegrals.

Die reellen Functionen der reellen Variablen t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1}$$

seien in dem Intervall (t_0, T) eindeutig, mit Einschluß der Grenzen stetig und von beschränkter Schwankung[2]); d. h. wenn der arithmetischen Folge der Werte $t = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n (\equiv T)$ nach (1) die Werte $x = x_0 (\equiv a), x_1, x_2, \ldots x_n (\equiv b)$ und $y = y_0 (\equiv \alpha), y_1, y_2, \ldots, y_n (\equiv \beta)$ entsprechen, sei

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} |x_\varkappa - x_{\varkappa-1}| = M, \quad \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} |y_\varkappa - y_{\varkappa-1}| = N, \tag{2}$$

wo M und N bestimmte endliche positive Zahlen sind und mit wachsendem n die Differenzen $t_\varkappa - t_{\varkappa-1}$ sämtlich nach Null convergieren. Man sagt dann, die Gleichungen (1) stellen eine stetige rektifizierbare Curve C in der xy-Ebene dar mit dem Anfangspunkt $A(a, \alpha)$, dem Endpunkt $B(b, \beta)$[3]). Wenn im Folgenden von einer beliebigen Curve die Rede ist, soll darunter immer eine solche stetige rektifizierbare Curve verstanden werden. Nur in besonderen Fällen werden wir spezieller voraussetzen, daß $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ abteilungsweise monoton sind, d. h. daß das

1) Transactions of the Amer. Math. Soc. 1 (1900) S. 499—506.
2) Vgl. Jordan, a. a. O. S. 55. — Study, a. a. O. S. 298 ff.
3) „ „ „ S. 105. — „ „ S. 313.

Digitized by Google

Intervall $(t_0 T)$ sich in eine endliche Anzahl solcher Intervalle zerlegen läßt, in deren jedem φ sowohl wie ψ entweder nur wächst oder nur abnimmt oder nur constant bleibt. Wir nennen dann auch die Curve C selbst abteilungsweise monoton.

Sei ferner $f(xy)$ eine längs der Curve C von A bis B eindeutige und mit Einschluß der Grenzen stetige reelle Function der beiden reellen Variabeln x, y; d. h. (wenn $x_0 y_0$) irgend ein Punkt auf C ist, so soll $f(xy)$ die Bedingung erfüllen

$$(3) \qquad |f(xy)-f(x_0 y_0)| < \gamma \quad \text{für} \quad |x-x_0| < \varepsilon, \quad |y-y_0| < \varepsilon,$$

wo γ eine beliebig kleine, ε eine hinlänglich kleine positive Zahl bedeutet.

Ist die Bedingung (3) ohne weitere Beschränkung für (xy) erfüllt, so sagen wir auch, $f(xy)$ sei längs C beiderseitig stetig oder, — denn das folgt daraus, — C verlaufe im Innern eines Gebietes der Stetigkeit von $f(xy)$.

Gilt (3) nur mit dem beschränkenden Zusatz a), daß (xy) außer auf der Curve selbst nur auf einer bestimmten Seite von ihr liegen darf[1]), so sagen wir $f(xy)$ sei längs C einseitig stetig oder C gehöre einem Gebiete der Stetigkeit von $f(xy)$ als Begrenzung an.

Gilt (3) endlich nur mit dem Zusatz b), daß (xy) nur auf der Curve C selbst liegen darf, also mit dem Zusatz

$$(3b) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

so sagen wir, $f(xy)$ sei stetig nur längs C selbst oder C sei eine isolierte Curve der Stetigkeit von $f(xy)$.

Aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(xy)$ längs C mit Einschluß der Endpunkte folgt die gleichmäßige Stetigkeit längs

---

1) Falls nämlich die Curve C die Eigenschaft hat, die ihr hinlänglich nahe liegenden Punkte in solche, die auf der einen und solche, die auf der andern Seite liegen, zu trennen! Nach Herrn Jordan muß das schon für jede stetige Curve gelten, da jede geschlossene stetige Curve nach ihm die Ebene in zwei getrennte Continua teilt (a. a. O. S. 91 ff.). Für stetige Curven mit bestimmter und wenigstens abteilungsweise sich stetig und monoton ändernder Tangente hat Herr Schoenflies denselben Satz bewiesen (Gött. Nachr. 1896 S. 1 ff.). Auch eine stetige und abteilungsweise monotone Curve teilt die ihr hinlänglich nahen Punkte in zwei getrennte Gruppen, nämlich in die Punkte $x = \varphi(t)$, $y < \psi(t)$ und $x = \varphi(t)$, $y > \psi(t)$, bezw, — wenn in dem betrachteten Curvenstück $\varphi(t)$ constant sein sollte, — in die Punkte $y = \psi(t)$, $x < \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$, $x > \varphi(t)$.

Digitized by Google

C, d. h. man kann nach (3) jeden Punkt auf C zum Mittelpunkt eines parallel den Axen liegenden Quadrates mit derselben Seitenlänge 2ε machen, sodaß die Function $f(xy)$ innerhalb dieses Quadrates um weniger als die ein für alle Mal festgesetzte, beliebig kleine Zahl 2γ schwankt, — im Falle (3a) innerhalb eines der Teile, in die das Quadrat durch C zerfällt, — im Falle (3b) auf der Curve C selbst, soweit sie innerhalb des Quadrates verläuft.

Aus der Stetigkeit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ in $(t_0\, T)$ mit Einschluß der Grenzen folgt auch für jede dieser Functionen die gleichmäßige Stetigkeit in $(t_0\, T)$. Man kann also die Bedingungen

$$(4) \qquad \begin{cases} |\varphi(t)-\varphi(t_c)| < \varepsilon & \text{für} \quad |t-t_c| < \delta, \\ |\psi(t)-\psi(t_c)| < \varepsilon & \text{„} \quad |t-t_c| < \delta, \end{cases}$$

wo auch t_c in $(t_0\, T)$ liegt, durch dieselbe Zahl δ erfüllen.

Wählt man daher die Teilpunkte $t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}, t_n \equiv T$ so, daß alle Differenzen $|t_\varkappa - t_{\varkappa-1}| < 2\delta$, so verläuft nach (4) die Curve C von $(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})$ bis $(x_\varkappa y_\varkappa)$ ganz innerhalb des den Axen parallelen Quadrates mit der Seite 2ε und dem Mittelpunkt $x = \varphi\left(\frac{t_\varkappa - t_{\varkappa-1}}{2}\right)$, $y = \psi\left(\frac{t_\varkappa - t_{\varkappa-1}}{2}\right)$, und nach (3) schwankt innerhalb dieses Quadrates die Function $f(xy)$ um weniger als 2γ.

Sei nunmehr

$$x_{\varkappa-1} \lesseqgtr \xi_\varkappa \lesseqgtr x_\varkappa, \quad y_{\varkappa-1} \lesseqgtr \eta_\varkappa \lesseqgtr y_\varkappa,$$

also $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$ ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rand des Rechtecks mit den Ecken $(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})$, $(x_\varkappa y_\varkappa)$, das den Axen parallel ist, das wir auch kurz durch $[(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1}), (x_\varkappa y_\varkappa)]$ bezeichnen wollen, und das ganz innerhalb jenes Quadrates liegt. Bei nur einseitiger Stetigkeit von f längs C muß $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$ auch noch der Bedingung (3a), bei Stetigkeit von f nur längs C selbst, der Bedingung (3b) genügen. Dann bilden wir die Summe

$$(5) \qquad S \equiv \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}).$$

Um zu zeigen, daß diese gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert convergiert, wenn n in's Unendliche wächst, die Intervalle $(t_{\varkappa-1} t_\varkappa)$ aber sämtlich nach Null convergieren, teilen wir jedes Intervall, z. B. $(t_{\varkappa-1} t_\varkappa)$, durch neue Teilpunkte $t'_1 t'_2 \ldots t'_{n'-1}$ und bilden mit der Gesamtheit der jetzt vorhandenen Teilpunkte wie vorher die Summe

Digitized by Google

$$(5') \qquad S' \equiv \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=n'} f(\xi'_{\varkappa\varkappa'}, \eta'_{\varkappa\varkappa'})(x_{\varkappa\varkappa'} - x_{\varkappa\varkappa'-1}),$$

wobei $x_{\varkappa\varkappa'} = \varphi(t'_{\varkappa\varkappa'})$, $x_{\varkappa 0} \equiv x_{\varkappa-1}$, $x_{\varkappa n'} \equiv x_\varkappa$ ist und alle $(\xi'_{\varkappa\varkappa'}, \eta'_{\varkappa\varkappa'})$ entsprechend gewählt sind wie bei S die $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$. Da sie hiernach sämtlich in dem oben bezeichneten Quadrat liegen, ist

$$(6) \qquad f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa) - 2\gamma < f(\xi'_{\varkappa\varkappa'}, \eta'_{\varkappa\varkappa'}) < f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa) + 2\gamma$$

oder

$$f(\xi'_{\varkappa\varkappa'}, \eta'_{\varkappa\varkappa'}) = f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa) + \vartheta_{\varkappa\varkappa'} \cdot 2\gamma, \quad \text{wo } -1 < \vartheta_{\varkappa\varkappa'} < +1.$$

Also ist

$$(7) \qquad \sum_{\varkappa'} f(\xi'_{\varkappa\varkappa'}, \eta'_{\varkappa\varkappa'})(x_{\varkappa\varkappa'} - x_{\varkappa\varkappa'-1}) = f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + 2\gamma \sum_{\varkappa'} \vartheta_{\varkappa\varkappa'}(x_{\varkappa\varkappa'} - x_{\varkappa\varkappa'-1})$$

und

$$(8) \qquad S' = S + 2\gamma \sum_{\varkappa} \sum_{\varkappa'} \vartheta_{\varkappa\varkappa'}(x_{\varkappa\varkappa'} - x_{\varkappa\varkappa'-1})$$

oder

$$(9) \qquad |S' - S| < 2\gamma \sum_{\varkappa, \varkappa'} |x_{\varkappa\varkappa'} - x_{\varkappa\varkappa'-1}|,$$

d. h. nach (2)

$$(10) \qquad |S' - S| < 2\gamma . M,$$

womit der gewünschte Beweis erbracht ist, da M endlich und γ beliebig klein ist.

Wir bemerken gleich an dieser Stelle, daß die Stetigkeit von f längs C für dieses Resultat nicht notwendig war. Bleibt nämlich $|f|$ nur stets unter angebbarer oberer Grenze längs C, bezw. auf C und in gewisser Nähe von C und bezeichnet $2\gamma_\varkappa$ die Maximalschwankung von f in jenem zu $(t_{\varkappa-1} t_\varkappa)$ gehörigen Quadrat, so erkennt man aus (6), (7), (8), (9) sofort, daß $|S' - S|$ stets dann beliebig klein ist, wenn

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \gamma_\varkappa |x_\varkappa - x_{\varkappa-1}| = 0$$

ist. Sobald diese Bedingung erfüllt ist, wollen wir deshalb $f(xy)$ längs C integrabel nennen. Auch braucht in diesem Falle bei der Summenbildung $f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$ gar nicht Functionswert für einen Punkt $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$ des Rechtecks $[(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})(x_\varkappa y_\varkappa)]$, sondern nur eine Zahl zwischen der oberen und unteren Grenze der Functionswerte in diesem Rechteck zu sein[1]).

1) Aehnlich für gewöhnliche bestimmte Integrale bei Herrn Ascoli, Ann. r. 23. (1895) S. 68.

Digitized by Google

Den als vorhanden erkannten Grenzwert der Summe S nennen wir das in Bezug auf x längs C von A bis B oder von (a, α) bis (b, β) erstreckte Curvenintegral von $f(xy)$ und schreiben

$$(12)\quad (C)\int_A^B f(xy)\,dx \equiv (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta} f(xy)\,dx \equiv \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}).$$

Für eine spätere Anwendnng machen wir noch folgende Bemerkung. Wenn

$$(13)\qquad f(xy) \equiv f_1(xy)\cdot f_2(xy),$$

und jede der Functionen f, f_1, f_2 längs C integrabel ist, so ist nach dem Vorangehenden direkt zu übersehen, daß bei der Summenbildung

$$(14)\qquad \sum f_1(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)\cdot f_2(\xi'_\varkappa \eta'_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$$

in f_1 und f_2 je ein beliebiges der erlaubten Wertenpaare $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$ und $(\xi'_\varkappa \eta'_\varkappa)$, nicht notwendig beide Mal dasselbe, benutzt werden darf, um beim Grenzübergang das Integral

$$(15)\qquad (C)\int_A^B f_1(xy)\cdot f_2(xy)\,dx$$

zu erhalten.

Nach der Definitionsformel (12) ist speziell, wenn x längs C constant $= a$, C also parallel der y-Axe ist,

$$(16)\qquad (C)\int_{a,\alpha}^{a,\beta} f(xy)\,dx \equiv (C)\int_{a,\alpha}^{a,\beta} f(ay)\,dx = 0,$$

und wenn y längs C constant $= \alpha$, also C parallel der x-Axe ist,

$$(17)\qquad (C)\int_{a,\alpha}^{b,\alpha} f(xy)\,dx \equiv \int_a^b f(x\alpha)\,dx,$$

ein gewöhnliches bestimmtes Integral.

Analog definieren wir unter denselben Voraussetzungen über $g(xy)$ wie bisher über $f(xy)$ das Integral

$$(18)\qquad (C)\int_A^B g(xy)\,dx \equiv \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} g(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1})$$

und stellen weiter die Definition auf

$$(19)\qquad (C)\int_A^B (f\,dx + g\,dy) \equiv (C)\int_A^B f\,dx + (C)\int_A^B g\,dy.$$

Digitized by Google

Aus der Summendefinition des Curvenintegrals ergiebt sich bei beliebigem Wege C unmittelbar

$$(20) \qquad (C)\int_A^B (f\,dx+g\,dy) = -(C)\int_B^A (f\,dx+g\,dy),$$

$$(21) \qquad (C)\int_A^B (f\,dx+g\,dy) = (C)\int_A^M (f\,dx+g\,dy)+(C)\int_M^B (f\,dx+g\,dy),$$

wo A, B, M drei beliebige Punkte auf der Curve C sind, und

$$(22) \qquad (C)\int_A^B (f\,dx+g\,dy) = (C)\int_A^B (f_1\,dx+g_1\,dy)+(C)\int_A^B (f_2\,dx+g_2\,dy),$$

wenn $f=f_1+f_2$, $g=g_1+g_2$ und f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 längs C integrabel sind.

Genau wie für gewöhnliche Integrale ergiebt sich endlich für die Curvenintegrale bei monotonem Integrationsweg C (dies bedeutet hier in etwas weiterem Sinn als oben: wenn $\varphi(t)$ sowohl wie $\psi(t)$ im Intervall $(t_0\,T)$ entweder nie abnimmt oder nie zunimmt) der Mittelwertsatz (Satz vom Mittelwert der Integrandenfunction), den wir gleich für das zusammengefaßte Integral (19) aussprechen,

$$23) \qquad (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta} (f\,dx+g\,dy) = f(XY)\,(b-a)+g\,(X'\,Y')\,(\beta-\alpha),$$

wobei $f(XY)$ und $g(X'\,Y')$ die Mittelwerte der Functionen f und g längs C sind. Hierbei kann es, wenn f und g längs C integrabel, aber nicht durchweg stetig sind, eintreten, daß diese Functionsmittelwerte gar nicht Functionswerte für ein Mittelwertsystem auf C sind.

Wir bemerken noch ausdrücklich, daß bisher die Voraussetzung der Stetigkeit oder auch nur Integrabilität der auftretenden Functionen f und g außerhalb der Curve C nicht notwendig war. Wenn sie bestand, ergab sich nur eine größere Freiheit bei der zum Integral führenden Summenbildung.

§ 2.

Fundamentalsatz der Integralrechnung für Curvenintegrale.

Ist $F(xy)$ mit ihren ersten Ableitungen

$$F_1(xy) \equiv \frac{\partial F(xy)}{\partial x}, \quad F_2(xy) \equiv \frac{\partial F(xy)}{\partial y}$$

Digitized by Google

längs der Curve C von A bis B eindeutig und stetig und zwar, falls C nur rektifizierbar ist, beiderseitig, falls C abteilungsweise monoton ist[1]), wenigstens einseitig, falls C der x- oder y-Axe parallel ist, wenigstens längs C selbst stetig, so ist

$$(1) \qquad (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta} dF(xy) \equiv (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta}(F_1 dx + F_2 dy) = F(b\beta) - F(a\alpha)^2).$$

Beweis: Nach Definition ist

$$(2) \quad (C)\int_A^B (F_1 dx + F_2 dy) \equiv \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [F_1(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + F_2(\xi'_\varkappa \eta'_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1})],$$

wo $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$, $(\xi'_\varkappa \eta'_\varkappa)$ je ein beliebiges der bei der Summenbildung erlaubten Wertenpaare ist. Bei unsern Voraussetzungen ist wenigstens einer der Punkte $P_{\varkappa-1,\varkappa} \equiv (x_{\varkappa-1}, y_\varkappa)$ und $P_{\varkappa,\varkappa-1} \equiv (x_\varkappa y_{\varkappa-1})$ von $P_{\varkappa\varkappa} \equiv (x_\varkappa y_\varkappa)$ verschieden und liegt bei schon hinlänglich großem n in dem Bereich, in dem F, F_1, F_2 stetig sind. Sei dies etwa $P_{\varkappa-1,\varkappa}$; dann liegen auch die Strecken $P_{\varkappa-1,\varkappa-1} P_{\varkappa-1,\varkappa}$ und $P_{\varkappa-1,\varkappa} P_{\varkappa\varkappa}$ in diesem Bereich. Also ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewandt auf die im Intervall $(x_{\varkappa-1} x_\varkappa)$ mit ihrer Ableitung stetige Function $F(x, y_\varkappa)$ von x allein,

$$(3) \qquad \frac{F(x_\varkappa y_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1} y_\varkappa)}{x_\varkappa - x_{\varkappa-1}} = F_1(\xi_\varkappa y_\varkappa),$$

wo $\xi_\varkappa$ ein bestimmter Wert des Intervalls $(x_{\varkappa-1} x_\varkappa)$ oder ein beliebiger von mehreren bestimmten ist. Ebenso ist

$$(4) \qquad \frac{F(x_{\varkappa-1} y_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})}{y_\varkappa - y_{\varkappa-1}} = F_2(x_{\varkappa-1} \eta'_\varkappa)$$

für einen bestimmten Wert $\eta'_\varkappa$ des Intervalls $(y_{\varkappa-1} y_\varkappa)$. Wählt man also in (2) das dort noch beliebige Wertenpaar $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$

---

1) Bei dieser Annahme kann man hier auch die ganze Curve C als monoton betrachten, da aus dem Beweis für die einzelnen monotonen Stücke der Satz für die ganze Curve C folgt.

2) Dieser Satz erscheint sonst erst als eine Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. z. B. Pringsheim a. a. O. S. 72) oder sein Beweis erforderte mindestens die Differenzierbarkeit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$. (Vgl. z. B. Stolz, Grundzüge der Diff.- u. Int.-R. II (1896) S. 182 ff.). — Da Herr Bôcher (Bull. of the Amer. Math. Soc. 2. Ser. 2. (1896) S. 146) den Fundamentalsatz zum Beweis des Cauchy'schen Satzes benutzt, so muß bei ihm entweder die Differenzierbarkeit von φ und ψ vorausgesetzt oder etwa der hier gegebene Beweis zur Ergänzung seiner Deduction benutzt werden.

Digitized by Google

gleich dem durch (3) bestimmten $(\xi_\varkappa y_\varkappa)$ und ebenso $(\xi'_\varkappa \eta'_\varkappa)$ gleich dem durch (4) bestimmten $(x_{\varkappa-1}\eta'_\varkappa)$, die auf Grund der Voraussetzungen zu den erlaubten gehören, so folgt

$$(5) \qquad (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta}(F_1 dx + F_2 dy) =$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [F(x_\varkappa y_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1} y_\varkappa) + F(x_{\varkappa-1} y_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})]$$

$$= F(b\beta) - F(a\alpha), \quad \text{q. e. d.}$$

Folgerungen: 1) Ist die Curve C des Fundamentalsatzes geschlossen, so ist

$$(6) \qquad (C)\int dF(xy) = 0$$

nach (5), ob dabei die Integration längs C in dem einen oder andern Sinn erfolgt, da ja F längs C eindeutig vorausgesetzt war.

2) Sind F, F_1, F_2 in einem zusammenhängenden Bereich G überall eindeutig und stetig, so ist das Integral

$$(7) \qquad (C)\int_{a,\alpha}^{x,y} dF(xy)$$

unabhängig vom Integrationsweg C, solange dieser das Gebiet G nirgends verläßt; denn es hat ja nach (5) den Wert $F(xy) - F(a\alpha)$, und F ist in G eindeutig.

Die Function $F(xy) \equiv xy$ z. B. ist mit ihren ersten Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x$$

überall eindeutig und stetig. Also ist nach dem Fundamentalsatz bei beliebiger Curve C

$$(8) \qquad (C)\int_A^B y dx + (C)\int_A^B x dy = b\beta - a\alpha.$$

Hieraus werden wir im nächsten Paragraphen einen einfachen Satz für gewöhnliche Integrale herleiten.

Auch der Satz von der partiellen Integration folgt natürlich unmittelbar aus dem Fundamentalsatz.

Digitized by Google

§ 3.

Transformation des Curvenintegrals.

Um die Transformation eines längs beliebiger Curve C erstreckten Integrals

$$(1) \qquad (C)\int_{P_0}^{P} f(xy)\,dx, \quad (C)\int_{P_0}^{P} g(xy)\,dy$$

durch Einführung neuer Variabeln u, v an Stelle von x, y zu vollziehen, wo f und g wenigstens längs C selbst stetig seien, sollen die reellen Functionen von zwei reellen Variabeln u, v

$$(2) \qquad x = r(uv), \quad y = s(uv)$$

folgende Eigenschaften haben:

1. Es giebt zwei im Intervall $(t_0 T)$ eindeutige und stetige Functionen mit beschränkter Schwankung

$$(3) \qquad u = \overline{\varphi}(t), \quad v = \overline{\psi}(t),$$

die also einen rektifizierbaren Weg Γ in der uv-Ebene bestimmen, sodaß durch Substitution von (3) für u, v und von $\varphi(t), \psi(t)$ für x, y die Gleichungen (2) zu Identitäten werden.

2. Die Functionen (2) sind nebst ihren ersten Ableitungen

$$(4) \qquad \begin{cases} r_1(uv) = \dfrac{\partial r}{\partial u}, & r_2(uv) = \dfrac{\partial r}{\partial v} \\ s_1(uv) = \dfrac{\partial s}{\partial u}, & s_2(uv) = \dfrac{\partial s}{\partial v} \end{cases}$$

längs Γ eindeutig und stetig und zwar, je nach der Art der Curve Γ, mit denselben näheren Bestimmungen wie F, F_1, F_2 beim Fundamentalsatz (s. § 2).

Bezeichnen wir entsprechende Punkte auf C und Γ durch gleiche Indices, so wird die das erste der Integrale (1) erzeugende Summe

$$(5) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(x_\varkappa y_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) =$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(r(u_\varkappa v_\varkappa), s(u_\varkappa v_\varkappa))\,[r(u_\varkappa v_\varkappa) - r(u_{\varkappa-1} v_{\varkappa-1})].$$

Durch genau dieselben Schlüsse wie beim Beweise des Fundamentalsatzes[1]) folgt nun

1) Oder auch indem man auf die Differenz in (6) links den Fundamentalsatz anwendet und das resultierende Integral durch den Mittelwertsatz (23) § 1 umformt.

Digitized by Google

$$(6)\quad r(u_\varkappa v_\varkappa)-r(u_{\varkappa-1}v_{\varkappa-1}) \equiv r(u_\varkappa v_\varkappa)-r(u_{\varkappa-1}v_\varkappa)+r(u_{\varkappa-1}v_\varkappa)-r(u_{\varkappa-1}v_{\varkappa-1})$$
$$= r_1(u'_\varkappa v_\varkappa)(u_\varkappa-u_{\varkappa-1})+r_2(u_{\varkappa-1}v'_\varkappa)(v_\varkappa-v_{\varkappa-1}),$$

wo $u'_\varkappa$ im Intervall $(u_{\varkappa-1}u_\varkappa)$, $v'_\varkappa$ im Intervall $(v_{\varkappa-1}v_\varkappa)$ liegt. Also wird die rechte Seite von (5)

$$(7)\quad = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(r(u_\varkappa v_\varkappa), s(u_\varkappa v_\varkappa))\, r_1(u'_\varkappa v_\varkappa)(u_\varkappa-u_{\varkappa-1})$$
$$+ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(r(u_\varkappa v_\varkappa), s(u_\varkappa v_\varkappa))\, r_2(u_{\varkappa-1}v'_\varkappa)(v_\varkappa-v_{\varkappa-1}).$$

Nun ist f als Function von u, v längs Γ eindeutig und stetig, ebenso $r_1(uv)$, $r_2(uv)$. Ferner sind sowohl $(u_\varkappa v_\varkappa)$ als $(u'_\varkappa v_\varkappa)$ und $(u_{\varkappa-1}v'_\varkappa)$ bei der Summenbildung für die Functionen $f\cdot r_1$ und $f\cdot r_2$ von u, v erlaubte Wertenpaare (s. § 1 (14)). Somit ergiebt sich bei dem Grenzübergang $\lim n = \infty$

$$(8)\quad (C)\int_{P_0}^{P} f(xy)\,dx = (\Gamma)\int_{\Pi_0}^{\Pi} f(r(uv), s(uv))\left[\frac{\partial r}{\partial u}\,du+\frac{\partial r}{\partial v}\,dv\right],$$

die gesuchte Transformationsgleichung. Sie schließt diejenige für gewöhnliche bestimmte Integrale als Spezialfall ein.

Entsprechendes gilt natürlich für das zweite der Integrale (1).

Ein erster Spezialfall der Transformation ist

$$(9)\quad x = \varphi(u, v) \equiv \varphi(u), \quad y = \psi(u, v) \equiv \psi(u),$$

wenn $\varphi'(u)$ und $\psi'(u)$ im Intervall $(t_0\,T)$ stetig sind; denn durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ und $u = t$, $v = 0$ werden die Gleichungen (9) zu Identitäten, und alle Bedingungen sind erfüllt. Die Curve Γ ist das Intervall $(t_0\,T)$ der u-Axe. Also hat man, wenn die Integrationsvariable des transformierten Integrals wieder t statt u genannt wird,

$$(10)\quad (C)\int_{x_0 y_0}^{xy}(f\,dx+g\,dy) = \int_{t_0}^{T}[f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)+g(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt.$$

Um einen zweiten Spezialfall aufzustellen, folge aus $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$$(11)\quad y = h(x), \quad x = l(y),$$

sodaß

$$(12)\quad \psi(t) \equiv h(\varphi(t)), \quad \varphi(t) \equiv l(\psi(t)).$$

Dann genügen die Transformationsgleichungen

Digitized by Google

(13) $x = u,\ y = h(u)$ für das Integral $(C)\int_{P_0}^{P} f\,dx$

(14) $x = l(u),\ y = u$ „ „ „ $(C)\int_{P_0}^{P} g\,dy$

abermals den Bedingungen, und man hat, wenn die Integrationsvariable statt u wieder x, bezw. y genannt wird,

$$(15)\quad (C)\int_{P_0}^{P}(f\,dx+g\,dy) = (\Gamma_x)\int_{x_0}^{X} f(x, h(x))\,dx + (\Gamma_y)\int_{y_0}^{Y} g(l(y), y)\,dy.$$

Hierbei ist Γ_x die Projektion von C auf die x-Axe, Γ_y die von C auf die y-Axe. Falls also $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ speziell monotone Functionen in $(t_0\ T)$ sind, und nur dann, ist Γ_x das Intervall $(x_0\ X)$ der x-Axe und Γ_y das Intervall $(y_0\ Y)$ der y-Axe, und die Angabe des Integrationsweges kann in (15) rechts fortfallen. Sind φ und ψ wenigstens abteilungsweise monoton, so lassen sich die Integrale in (15) rechts in eine endliche Anzahl gewöhnlicher Integrale zerlegen.

Man wird also auch mittelst einer Transformation von dem Curvenintegral zu einem gewöhnlichen Integral zurückgeführt, und gerade dieser Umstand wurde bisher meist[1]) zur Definition des Curvenintegrals benutzt, speziell die Transformation (13), (14) von Herrn Pringsheim (a. a. O.). Sie ist in der That, wie Formel (15) zeigt, vor der andern (9) dadurch ausgezeichnet, daß bei ihr allein nicht auch noch die Ableitung einer der transformierenden Functionen unter dem Integralzeichen auftritt. Dafür erfordert sie aber die wenigstens abteilungsweise vorhandene Monotonie, nicht nur die Rektifizierbarkeit des Integrationsweges C.

Um die Transformationen (13), (14) auf Gl. (8) des vorigen Paragraphen anzuwenden, sei die dort noch beliebige Curve C also abteilungsweise monoton. Dann folgt nach (15)

$$(16)\quad (\Gamma_x)\int_a^b h(x)\,dx + (\Gamma_y)\int_\alpha^\beta h(y)\,dy = b\beta - a\alpha,$$

wo Γ_x, Γ_y die Projektionen von C (d. h. der Curve $y = h(x)$, oder, w. d. i., $x = l(y)$) auf die x- bezw. y-Axe sind. Bei Eindeutigkeit von $h(x)$ im Intervall (ab) kann die rechte Seite von (16) auch lauten

$$(17)\quad = bh(b) - ah(a),$$

1) Vgl. die Einleitung.

Digitized by Google

bei Eindeutigkeit von $l(y)$ im Intervall $(\alpha\beta)$

$$= \beta l(\beta) - \alpha l(\alpha). \tag{18}$$

Dies ist ein außerordentlich einfacher, geometrisch evidenter und doch anscheinend kaum beachteter[1]) Integralsatz, der die Integration einer Function auf die ihrer inversen zurückführt. Er läßt sich natürlich auch auf mehrfache andere Art herleiten.

§ 4.

Das Curvenintegral als Function der (oberen) Grenze bei vorausgesetzter Eindeutigkeit.

Ausgehend von einer mit ihren ersten Ableitungen in einem Bereich G eindeutigen und stetigen Function sind wir in § 2 (7) zu einem Curvenintegral gelangt, das abgesehen von einer Constanten gleich dieser Function war, also eine im Bereich G eindeutige und stetige Function seiner oberen Grenze x, y darstellte.

Umgekehrt gelangt man, sobald die Eindeutigkeit des Integrals als Function seiner oberen Grenze vorausgesetzt wird, in bekannter Weise[2]) zu dem Resultat:

Sind $f(xy)$ und $g(xy)$ in dem zusammenhängenden Bereich G eindeutig und stetig und ist das Integral

$$(C)\int_{a,\alpha}^{x,y}(f dx + g dy) \equiv F(xy) \tag{1}$$

in diesem Bereich unabhängig vom Wege (m. a. W. eine in G eindeutige Function von x, y), so ist dieses Integral in G eine stetige Function von x, y mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(xy), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g(xy). \tag{2}$$

Auch dieser Satz enthält für den Fall, daß x oder y längs C constant ist, einen fundamentalen Satz der gewöhnlichen Integral-

---

1) Dieser Satz ist der thatsächliche Inhalt einer Bemerkung von Herrn Netto, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. 40 (1895) S. 185, obwohl es dort nicht ausgesprochen wird, daß der auftretende Summengrenzwert nichts anderes als das Integral der inversen Function ist. Als Spezialfall ist er freilich in einem Satz von Herrn Stolz (a. a. O. I (1893) S. 376, 377 Satz 10) enthalten, den wir natürlich auf dieselbe Weise erhalten könnten.

2) Vgl. z. B. Pringsheim, a. a. O. S. 69. 70. — Böcher, a. a. O. S. 147.

Digitized by Google

rechnung. Es scheint mir zweckmäßig, ihn schon an dieser Stelle einzuführen.

II. Der Cauchy'sche Integralsatz.

§ 1.

Zurückführung des Beweises auf den für ein Rechteck.

Bei den bisher behandelten Eigenschaften des Curvenintegrals kam seine Abhängigkeit oder Unabhängigkeit vom Wege entweder nicht in Frage, oder die letztere wurde vorausgesetzt. Der Cauchy'sche Satz giebt nun die Bedingungen dafür, daß das Curvenintegral in einem einfach zusammenhängenden Bereich G unabhängig vom Weg, m. a. W. dafür, daß das Integral

$$(1) \qquad (C)\int (f dx + g dy)$$

erstreckt über eine einfach geschlossene rektifizierbare Curve C im Bereich G stets den Wert Null hat.

Ist nun das Integral (1) jedes Mal Null, wenn es längs der Peripherie irgend eines Rechtecks in G erstreckt wird, das parallel zu den Axen liegt, so ist es auch Null längs jeder geschlossenen Linie, deren Stücke abwechselnd der x- und y-Axe parallel sind, weil die von ihr begrenzte Fläche sich in lauter Rechtecke jener Art zerlegen läßt. Andererseits hat man den Satz:

Liegt die stetige rektifizierbare Curve C ganz im Innern eines Bereiches G, in dem $f(xy)$ und $g(xy)$ längs jeder rektifizierbaren Linie integrabel sind, so ist

$$(2) \quad (C)\int_A^B (f dx + g dy) = \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left[\int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} f(x y_{\varkappa-1})\, dx + \int_{y_{\varkappa-1}}^{y_\varkappa} g(x_\varkappa y)\, dy\right]^{1}),$$

wenn mit wachsendem n alle Differenzen $t_\varkappa - t_{\varkappa-1}$ gegen Null convergieren und die $(x_\varkappa y_\varkappa)$ Zwischenpunkte auf C zwischen A und B sind.

Nach dem Mittelwertsatz I § 1 (23) ist nämlich, sobald die Differenzen $t_\varkappa - t_{\varkappa-1}$ schon so klein sind, daß die Rechtecke $[(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})(x_\varkappa y_\varkappa)]$ ganz innerhalb G liegen,

1) Vgl. hierzu Pringsheim, a. a. O. § 2. — Der Beweis auch dieses Satzes ist hier ein unmittelbarer Ausfluß der Definition des Curvenintegrals. Wir hätten ihn auch benutzen können, um den Fundamentalsatz I § 2 abzuleiten.

Digitized by Google

$$(3)\qquad \begin{cases} \int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} f(xy_{\varkappa-1})\,dx = f(\xi_\varkappa y_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) \\ \int_{y_{\varkappa-1}}^{y_\varkappa} g(x_\varkappa y)\,dy = g(x_\varkappa \eta_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1}), \end{cases}$$

wo $f(\xi_\varkappa y_{\varkappa-1})$ einen Wert zwischen der unteren und oberen Grenze der Functionswerte $f(xy_{\varkappa-1})$ im Intervall $(x_{\varkappa-1}x_\varkappa)$ bedeutet, entsprechend $g(x_\varkappa \eta_\varkappa)$. Also wird die rechte Seite von (2)

$$(4)\qquad = \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [f(\xi_\varkappa y_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + g(x_\varkappa \eta_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1})].$$

Bildet man aber das Integral auf der linken Seite der behaupteten Gleichung (2), so erhält man dieselbe Summe (4); denn die Werte $f(\xi_\varkappa y_{\varkappa-1})$, $g(x_\varkappa \eta_\varkappa)$ gehören zu den jeweils für die Summenbildung erlaubten (s. I § 1 Gl. (11)). Also ist Gleichung (1) verifiziert.

Ebenso gilt unter denselben Voraussetzungen die Gleichung

$$(5)\qquad (C)\int_A^B (f\,dx + g\,dy) = \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \Big[\int_{y_{\varkappa-1}}^{y_\varkappa} g(x_{\varkappa-1}y)\,dy + \int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} f(xy_\varkappa)\,dx\Big].$$

Gehört nun die Curve C dem Bereich G, in dem f und g längs jeder Curve integrabel sind, nur als Begrenzung an und ist C überdies abteilungsweise monoton, so gilt für jedes monotone Stück von C eine der Gleichungen (2) und (5). Denn alsdann gehört entweder die mit den Punkten $(x_{\varkappa-1}y_\varkappa)$ oder die mit den Punkten $(x_\varkappa y_{\varkappa-1})$ gebaute „Treppenlinie“ (um mit Herrn Pringsheim, a. a. O., zu reden) ganz zum Bereich G, und die Ableitung der einen oder andern Gleichung bleibt unverändert bestehen. (Ist längs eines Curvenstückes speziell x oder y constant, so werden die Gleichungen (2) und (5) miteinander identisch, und das Integral links ist selbst schon ein gewöhnliches).

Ist nun das Integral $\int (f\,dx + g\,dy)$ längs der geschlossenen Treppenlinie, die der geschlossenen Curve C zugeordnet wird, Null, so gilt das nach (2) bezw. (5) auch von dem Integral (1) selbst.

Gilt also der Cauchy'sche Satz für jedes den Axen parallel gestellte Rechteck im Bereich G, in dem nur die Integrabilität der Functionen f und g auf jedem Wege vorausgesetzt war, so gilt er für jede einfach geschlossene rektifizierbare Curve, die im Innern von G liegt und einen Teil von G vollständig begrenzt, für die Begrenzung von

Digitized by Google

G selbst sicher dann, wenn sie abteilungsweise monoton und G einfach zusammenhängend ist.

Die Zurückführung des Satzes für die Begrenzung eines mehrfach zusammenhängenden Bereiches auf den für eine einzige einfach geschlossene Curve ist bekannt.

§ 2.

Die notwendige Bedingung.

Wir nehmen jetzt an, der Cauchy'sche Satz gelte für jedes Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ in gewissem Bereich G, und leiten daraus eine notwendige Bedingung für seine Gültigkeit in mehreren Abstufungen her, indem wir successive die Voraussetzungen über die Natur der Functionen f und g in jenem Bereich erweitern.

A. Zunächst seien f und g in G nur eindeutig und längs jeder Curve integrabel vorausgesetzt.

Die angenommene Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes für jedes Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ besagt

$$(1) \qquad \int_a^b f(x\alpha)\,dx + \int_\alpha^\beta g(by)\,dy + \int_b^a f(x\beta)\,dx + \int_\beta^\alpha g(ay)\,dy = 0$$

oder

$$(2) \qquad \int_a^b [f(x\beta) - f(x\alpha)]\,dx = \int_\alpha^\beta [g(by) - g(ay)]\,dy.$$

Bezeichnen wir

den Mittelwert von $f(x\beta) - f(x\alpha)$ im Intervall (ab) mit

$$M_{ab}(f(x\beta) - f(x\alpha))$$

den Mittelwert von $g(by) - g(ay)$ im Intervall $(\alpha\beta)$ mit

$$M_{\alpha\beta}(g(by) - g(ay)),$$

so erhalten wir also die notwendige Bedingung in der Gestalt

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{M_{ab}[f(x\beta) - f(x\alpha)]}{\beta - \alpha} = \frac{M_{\alpha\beta}[g(by) - g(ay)]}{b - a};$$

d. h. für jedes Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ in G muß der Mittelwert des Differenzenquotienten von $f(x\beta)$ und $f(x\alpha)$ im Intervall (ab) gleich dem Mittelwert des Differenzenquotienten von $g(by)$ und $g(ay)$ im Intervall $(\alpha\beta)$ sein.

Daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, ist evident; denn aus $(\mathfrak{A})$ folgt wieder (2), und (2) ist nur eine Umformung der den Cauchy'schen Satz für $[(a\alpha)(b\beta)]$ ausdrückenden Gleichung (1).

Digitized by Google

B. *f* und *g* seien im Bereich *G* eindeutig und stetig in beiden Variabeln.

Dann giebt es im Intervall (ab) mindestens einen Wert $x = \xi$ und im Intervall $(\alpha\beta)$ mindestens einen Wert $y = \eta$, für den bezw.

$$(3) \qquad \begin{cases} f(\xi\beta) - f(\xi\alpha) = M_{ab}[f(x\beta) - f(x\alpha)] \\ g(b\eta) - g(a\eta) = M_{\alpha\beta}[g(by) - g(ay)] \end{cases}$$

wird. Mithin lautet die notwendige Bedingung jetzt

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{f(\xi\beta) - f(\xi\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{g(b\eta) - g(a\eta)}{b - a};$$

d. h. für jedes Rechteck $[(a\alpha), (b\beta)]$ in *G* muß im Intervall (ab) ein Mittelwert ξ und im Intervall $(\alpha\beta)$ ein Mittelwert η existieren, sodaß der Differenzenquotient von $f(\xi\beta)$ und $f(\xi\alpha)$ gleich dem von $g(b\eta)$ und $g(a\eta)$ ist.

Daß auch die Bedingung $(\mathfrak{B})$ bei den Voraussetzungen B hinreichend ist, ergiebt sich genau wie oben, wenn wir die Kenntnis benutzen, daß für $x = \xi$ die Differenz $f(x\beta) - f(x\alpha)$ ihren Mittelwert im Intervall (ab) annimmt und entsprechend die andere. Wir werden aber im nächsten Paragraphen zeigen, daß der Beweis der Umkehrung auch ohne jene Kenntnis geführt werden kann.

Ca. Die Functionen *f* und *g* seien in *G* überall eindeutig und stetig in beiden Variabeln, und die partiellen Ableitungen von *f* nach *y* und von *g* nach *x*

$$(4) \qquad f_2(xy) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, \quad g_1(xy) \equiv \frac{\partial g}{\partial x}$$

sollen in *G* überall einwertig existieren und ebenfalls stetig in beiden Variabeln sein.

Läßt man in $(\mathfrak{B})$ einmal zuerst β gegen α convergieren (wobei also auch η nach α convergiert), dann b gegen a (wobei also auch ξ gegen a convergiert), und vollzieht man ein anderes Mal diese Grenzübergänge in umgekehrter Folge, so erhält man, sobald die Existenz von f_2 und g_1 feststeht, die beiden Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\xi = a} f_2(\xi\alpha) = g_1(a\alpha) \\ f_2(a\alpha) = \lim\limits_{\eta = \alpha} g_1(a\eta)^1). \end{cases}$$

1) Einen einwandsfreien Beweis des Cauchy'schen Satzes nur aus der Stetigkeit von *f* und *g* und der Existenz von f_2 und g_1 zusammen mit den

Digitized by Google

Nimmt man jetzt noch die Stetigkeit von f_2 und g_1 hinzu, — es genügt hierfür sogar die Stetigkeit von f_2 in x bei jedem y oder die von g_1 in y bei jedem Wert von x, — so gehen beide Gleichungen (5) in die Gleichung über:

$$(\mathfrak{C}) \qquad f_2(a\alpha) = g_1(a\alpha)^1),$$

wo $(a\alpha)$ ein beliebiger Punkt in G ist; d. h. bei den Voraussetzungen Ca ist die für jeden Punkt in G geltende Bedingung ($\mathfrak{C}$) für die Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes notwendig.

Daß sie auch hinreichend ist, zeigen wir in § 4.

Statt der Voraussetzungen Ca können wir nun auch andere aufnehmen, die wieder zu ($\mathfrak{C}$) führen, und bei denen ($\mathfrak{C}$) dann abermals als hinreichend darzuthun ist (§ 5), nämlich:

Cb. Die Functionen f und g seien in G überall eindeutig und stetig in beiden Variabeln und haben daselbst überall ein vollständiges erstes Differential, d. h. wenn $(x_0 y_0)$ ein beliebiger Punkt in G ist, so ist[2])

$$(6) \quad \begin{cases} |f(xy)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(x-x_0)-f_2(x_0y_0)(y-y_0)| < \varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \\ |g(xy)-g(x_0y_0)-g_1(x_0y_0)(x-x_0)-g_2(x_0y_0)(y-y_0)| < \varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \end{cases}$$

$$\text{für } |x-x_0| < \delta, \quad |y-y_0| < \delta,$$

wo ε eine beliebig kleine, δ eine hinlänglich kleine positive Zahl ist. Ueber die Stetigkeit von f_1, f_2, g_1, g_2 wird hierbei nichts vorausgesetzt.

Sei nun $[(a\alpha), (b\beta)]$ ein den Punkt $(x_0 y_0)$ umschließendes Quadrat, das ganz innerhalb des ebenfalls den Axen parallel gestellten Quadrates mit dem Mittelpunkt $(x_0 y_0)$ und der Seite 2δ liegt, so ist nach ($\mathfrak{B}$), da $b-a = \beta-\alpha$,

$$(7) \qquad f(\xi\beta)-f(\xi\alpha) = g(b\eta)-g(a\eta).$$

Gl. (5) (oder selbst der Stetigkeit von f_2 und g_1 in jeder einzelnen der Variabeln zusammen mit ($\mathfrak{C}$)) abzuleiten, ist mir nicht gelungen. Die Voraussetzungen Ca und Cb enthalten eben sehr viel mehr.

1) Daß bei Ca die Bedingung ($\mathfrak{C}$) notwendig ist, ergiebt sich auch unmittelbar aus I § 4; denn gilt der Cauchy'sche Satz, so hat das Integral $\int_{x_0 y_0}^{xy}(f\,dx+g\,dy) = F(xy)$ nach I § 4 auch die partiellen Ableitungen f, g. Da aber $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = f_2$ und $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = g_1$ nach Ca existieren und stetig sind, so ist nach bekanntem Satze $f_2 = g_1$.

2) Vgl. z. B. Stolz, a. a. O. I S. 133.

Digitized by Google

Andererseits ist nach (6)

$$|f(\xi\beta)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi-x_0)-f_2(x_0y_0)(\beta-y_0)|<\varepsilon\{|\xi-x_0|+|\beta-y_0|\}$$
$$|f(\xi\alpha)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi-x_0)-f_2(x_0y_0)(\alpha-y_0)|<\varepsilon\{|\xi-x_0|+|\alpha-y_0|\}$$

Also folgt, da $|\xi-x_0|$, $|\beta-y_0|$, $|\alpha-y_0|<|\beta-\alpha|$ sind,

$$|f(\xi\beta)-f(\xi\alpha)-f_2(x_0y_0)(\beta-\alpha)|<4\varepsilon|\beta-\alpha|. \tag{8}$$

Ebenso ergiebt sich

$$|g(b\eta)-g(a\eta)-g_1(x_0y_0)(b-a)|<4\varepsilon|b-a|. \tag{9}$$

Also folgt endlich nach (7) und, da $b-a=\beta-\alpha$, aus (8) und (9)

$$|f_2(x_0y_0)-g_1(x_0y_0)|<8\varepsilon, \tag{10}$$

wo ε beliebig klein ist, d. h.

$$f_2(x_0y_0)=g_1(x_0y_0). \tag{$\mathfrak{C}$}$$

Auch bei den Voraussetzungen Cb ist die Bedingung ($\mathfrak{C}$) für den Cauchy'schen Satz notwendig.

§ 3.

Der Cauchy'sche Satz bei vorausgesetzter Stetigkeit von f und g.

Durch die beiden vorigen Paragraphen ist der Cauchy'sche Satz bereits in der ersten Fassung bewiesen:

A. **Sind f und g in dem einfach zusammenhängenden Bereich G längs jeder Curve integrabel (Voraussetzung A), so ist die für jedes zu G gehörige Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ geltende Bedingung**

$$\frac{M_{\alpha\beta}(f(x\beta)-f(x\alpha))}{\beta-\alpha}=\frac{M_{\alpha\beta}(g(by)-g(ay))}{b-a} \tag{$\mathfrak{A}$}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß

$$(C)\int(fdx+gdy)=0 \tag{1}$$

ist, falls C eine einfach geschlossene stetige Curve ist, die nur rektifizierbar zu sein braucht, wenn sie ganz im Innern von G liegt, und abteilungsweise monoton vorausgesetzt wird, wenn sie G als Begrenzung angehört.

Bei den Voraussetzungen B lautet der Satz:

B. **Sind f und g im Bereich G überall eindeutig**

Digitized by Google

und stetig in beiden Variabeln (Voraussetzung B), so ist die für jedes zu G gehörige Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ und irgend zwei Zahlen ξ, η im Intervall (ab), bezw. $(\alpha\beta)$ geltende Bedingung

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{f(\xi\beta)-f(\xi\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{g(b\eta)-g(a\eta)}{b-a}$$

notwendig (s. § 2) und hinreichend für das Bestehen der Gleichung (1)[1]).

Beweis: Durch die Geraden $x = x_0 (\equiv a), x_1, \ldots, x_m (\equiv b)$, $y = y_0 (\equiv \alpha), y_1, \ldots, y_n (\equiv \beta)$ teilen wir das Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ in lauter kleine Teilrechtecke $[(x_\mu y_\nu)(x_{\mu+1} y_{\nu+1})]$. Für jedes solche existieren nach $(\mathfrak{B})$ zwei Zahlen $\xi_{\mu\nu}$ $\eta_{\mu\nu}$ im Intervall $(x_\mu x_{\mu+1})$ bezw. $(y_\nu y_{\nu+1})$, sodass

$$(2) \quad R_{\mu\nu} \equiv f(\xi_{\mu\nu} y_\nu)(x_{\mu+1}-x_\mu)+g(x_{\mu+1}\eta_{\mu\nu})(y_{\nu+1}-y_\nu)+f(\xi_{\mu\nu} y_{\nu+1})(x_\mu-x_{\mu+1}) + g(x_\mu \eta_{\mu\nu})(y_\nu-y_{\nu+1}) = 0.$$

Folglich ist auch

$$(3) \qquad \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = 0$$

und ebenso

$$(4) \qquad \lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = 0.$$

Läßt man aber m und n in's Unendliche wachsen und gleichzeitig alle Differenzen $x_{\mu+1}-x_\mu$ und $y_{\nu+1}-y_\nu$ gegen Null convergieren, so wird andererseits $\sum R_{\mu\nu}$ nach der Definition des Integrals gleich der Summe aller Integrale von $f dx + g dy$ längs der Linien $y = y_\nu$ und $x = x_\mu$, über jede innere einmal in der einen, einmal in der

---

1) Es ist vielleicht nicht uninteressant, daß bei dieser Fassung, also stets sobald f und g stetig sind, der Cauchy'sche Satz sich mit der Existenz von Zahlen ξ, η deckt, die gewissen Bedingungsgleichungen genügen müssen. Man kann diese Ausdrucksform des Cauchy'schen Satzes noch etwas vereinfachen: Nimmt man schon in § 2 (1) ein Quadrat statt eines Rechtecks, also $b-a = \beta-\alpha$, setzt im ersten und dritten Integral $x = x' + a$, im zweiten und vierten $y = y' + \alpha$ und bezeichnet die Integrationsvariable bei allen vier Integralen, die nun sämtlich dieselben Grenzen 0 und $b-a$ haben, mit z, so kann man alle vier Integrale unter demselben Zeichen zusammenfassen und nun erst den Mittelwertsatz anwenden. Dann tritt an die Stelle der mit dem Cauchyschen Satz äquivalenten Gleichung $(\mathfrak{B})$ die andere

$$(\mathfrak{B}') \qquad f(\zeta+a, \beta)-f(\zeta+a, \alpha) = g(b, \zeta+\alpha)-g(a, \zeta+\alpha),$$

wo ζ im Intervall $(0, b-a)$ oder — w. d. i. — im Intervall $(0, \beta-\alpha)$ liegt.

Digitized by Google

anderen Richtung erstreckt. Folglich fallen die Integrale über alle inneren Linien fort, und es bleibt nur das Integral über den Rand von $[(a\alpha)(b\beta)]$ mit dem Wert Null zurück.

§ 4.

Der Cauchy'sche Satz bei vorausgesetzter Stetigkeit von f, g, f_2, g_1.

Γa. Sind f, g, f_2, g_1 im Bereich G überall eindeutig und stetig (Voraussetzungen Ca), so ist die überall in G geltende Bedingung

$$f_2(xy) = g_1(xy) \tag{\mathfrak{C}}$$

notwendig (s. § 2) und hinreichend für den Cauchyschen Satz (s. das Nähere § 3 bei *A*).

Beweis: Wir teilen das Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen, wobei aber nun alle Differenzen

$$x_{\mu+1}-x_\mu = \frac{b-a}{m}, \quad y_{\nu+1}-y_\nu = \frac{\beta-\alpha}{n} \tag{1}$$

sein sollen. Um zu dem über dieses Rechteck erstreckten Integral

$$\int (f\,dx + g\,dy) \tag{2}$$

zu gelangen, bilden wir ähnlich wie in § 3 (2) die Summe

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} \equiv \sum_{\mu,\nu}\{&[f(\xi_\mu y_\nu)-f(\xi_\mu y_{\nu+1})](x_{\mu+1}-x_\mu)\\ &+[g(x_{\mu+1}\eta_\nu)-g(x_\mu\eta_\nu)](y_{\nu+1}-y_\nu)\},\end{aligned} \tag{3}$$

wo aber jetzt speziell

$$\xi_\mu = \frac{x_{\mu+1}-x_\mu}{2}, \quad \eta_\nu = \frac{y_{\nu+1}-y_\nu}{2} \tag{4}$$

sein soll. Folglich heben sich in (3) alle über die inneren Teilstrecken gebildeten Glieder heraus, und es bleibt

$$\sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = \frac{b-a}{m}\sum_\mu [f(\xi_\mu\alpha)-f(\xi_\mu\beta)] + \frac{\beta-\alpha}{n}\sum_\nu [g(b\eta_\nu)-g(a\eta_\nu)], \tag{5}$$

eine Summe, die für $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$ in das Integral (2) übergeht.

Andererseits ist in (3) nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Digitized by Google

$$(6)\qquad \begin{cases} f(\xi_\mu y_{\nu+1}) - f(\xi_\mu y_\nu) = f_2(\xi_\mu \eta_{\mu\nu}) \dfrac{\beta-\alpha}{n} \\ g(x_{\mu+1}\eta_\nu) - g(x_\mu \eta_\nu) = g_1(\xi_{\mu\nu}\eta_\nu) \dfrac{b-a}{m}, \end{cases}$$

wo die $\xi_{\mu\nu}$ im Intervall $(x_\mu x_{\mu+1})$, die $\eta_{\mu\nu}$ im Intervall $(y_\nu y_{\nu+1})$ liegen. Also wird

$$(7)\qquad \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = \frac{b-a}{m} \cdot \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{\mu\nu} [g_1(\xi_{\mu\nu}\eta_\nu) - f_2(\xi_\mu \eta_{\mu\nu})].$$

Da nun nach Voraussetzung die Bedingung (𝔈) überall in G erfüllt ist, kann man in (7) das Zeichen g_1 durch f_2 ersetzen. Da ferner f_2 stetig im Innern und auf dem Rande von $[(a\alpha)(b\beta)]$, also auch gleichmäßig stetig in diesem Bereich ist, so ist jedes Glied der Summe in (7) für hinlänglich großes m und n absolut genommen $< \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl ist. Demnach ist

$$(8)\qquad |\sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu}| < \frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{mn} \cdot mn\varepsilon = (b-a)(\beta-\alpha)\varepsilon,$$

d. h. beliebig klein, d. h. das Integral (2) erstreckt über das Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ hat den Wert Null.

§ 5.

Der Cauchy(-Goursat-)sche Satz bei vorausgesetzter Stetigkeit von f, g und Existenz von df, dg.

Γb. Sind f, g im Bereich G überall eindeutig und stetig und besitzen beide in G überall ein vollständiges erstes Differential (Voraussetzungen Cb), so ist die überall in G geltende Bedingung

$$(\mathfrak{E})\qquad f_2(xy) = g_1(xy)$$

abermals notwendig (s. § 2) und hinreichend für den Cauchy'schen Satz (s. d. Nähere § 3 bei *A*) [1]).

Beweis: Da man jedes Rechteck in Quadrate zerlegen kann, so genügt es, den Satz für ein den Axen parallel gestelltes Quadrat $[(a\alpha)(b\beta)]$ zu beweisen, wo also $b-a = \beta-\alpha$ ist. Das Integral über dessen Peripherie erstreckt, hat den Wert

$$(1)\qquad [f(\xi\alpha) - f(\xi\beta) + g(b\eta) - g(a\eta)](b-a),$$

1) Dies ist, auf reelle Curvenintegrale übertragen, der von Herrn Goursat aufgefundene Satz. Vgl. hierzu die Citate unserer Einleitung.

Digitized by Google

wo ξ ein gewisser Wert im Intervall (ab), η ein solcher im Intervall $(\alpha\beta)$ ist. Wir müssen also zeigen, daß

$$(2) \qquad |f(\xi\beta)-f(\xi\alpha)-g(b\eta)+g(a\eta)| \equiv d$$

den Wert Null hat.

Zerlegt man das Quadrat $[(a\alpha)(b\beta)]$ in vier kleinere durch Parallele zu den Axen, die die Seiten halbieren, so muß, da das Integral über das große Quadrat gleich der Summe der Integrale über die vier kleineren ist (bei gleichem Integrationssinn), bei mindestens einem von ihnen, das wir $[(a_1\alpha_1)(b_1\beta_1)]$ nennen wollen, das Integral absolut genommen $\geqq \frac{d}{4}(b-a)$ sein. Also, da $b_1-a_1 = \beta_1-\alpha_1 = \frac{b-a}{2}$ ist,

$$(2') \qquad |f(\xi_1\beta_1)-f(\xi_1\alpha_1)-g(b_1\eta_1)+g(a_1\eta_1)| \geqq \frac{d}{2},$$

wo ξ_1, η_1 gewisse Werte im Intervall (a_1b_1) bezw. $(\alpha_1\beta_1)$ sind. Wiederholt man diesen Schluß n Mal, so ist also:

$$(2^{(n)}) \qquad |f(\xi_n\beta_n)-f(\xi_n\alpha_n)-g(b_n\eta_n)+g(a_n\eta_n)| \geqq \frac{d}{2^n}.$$

Da nun von den Quadraten $[(a\alpha)(b\beta)]$, $[(a_1\alpha_1)(b_1\beta_1)]$, ... jedes ganz im vorhergehenden liegt und die Seiten der Quadrate gegen Null convergieren, so schränkt diese Serie von Quadraten einen bestimmten Punkt (x_0y_0) ein. Diesem kommt in Bezug auf eine beliebig kleine positive Zahl ε nach der Voraussetzung Cb eine bestimmte Umgebung zu, sodaß

$$(3) \quad \begin{cases} |f(xy)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(x-x_0)-f_2(x_0y_0)(y-y_0)| < \varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \\ |g(xy)-g(x_0y_0)-g_1(x_0y_0)(x-x_0)-g_2(x_0y_0)(y-y_0)| < \varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \end{cases}$$

$$\text{für } |x-x_0| < \delta, \quad |y-y_0| < \delta,$$

wo δ eine bestimmte hinlänglich kleine positive Zahl ist.

Bei hinlänglich großem n liegt das Quadrat $[(a_n\alpha_n)(b_n\beta_n)]$ ganz innerhalb dieser Umgebung des Punktes (x_0y_0), d. h. ganz innerhalb des Quadrates $[(x_0-\delta, y_0-\delta), (x_0+\delta, y_0+\delta)]$. Also ist dann nach (3)

$$(4) \quad \begin{cases} |f(\xi_n\beta_n)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi_n-x_0)-f_2(x_0y_0)(\beta_n-y_0)| < \varepsilon\{|\xi_n-x_0|+|\beta_n-y_0|\} \\ |f(\xi_n\alpha_n)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi_n-x_0)-f_2(x_0y_0)(\alpha_n-y_0)| < \varepsilon\{|\xi_n-x_0|+|\alpha_n-y_0|\}. \end{cases}$$

Also weiter, da $|\xi_n-x_0|$, $|\beta_n-y_0|$, $|\alpha_n-y_0| < |\beta_n-\alpha_n|$ sind,

$$(5) \qquad |f(\xi_n\beta_n)-f(\xi_n\alpha_n)-f_2(x_0y_0)(\beta_n-\alpha_n)| < 4\varepsilon|\beta_n-\alpha_n|.$$

Digitized by Google

Ebenso ergiebt sich

$$(6) \qquad |g(b_n \eta_n) - g(a_n \eta_n) - g_1(x_0 y_0)(b_n - a_n)| < 4 \cdot \varepsilon \cdot |b_n - a_n|.$$

Nach (5) und da $b_n - a_n = \beta_n - \alpha_n$ folgt endlich aus (5) und (6)

$$(7) \quad |f(\xi_n \beta_n) - f(\xi_n \alpha_n) - g(b_n \eta_n) + g(a_n \eta_n)| < 8 \cdot \varepsilon \cdot |b_n - a_n| = \frac{8 \cdot \varepsilon |b-a|}{2^n}.$$

Somit liefern ($2^{(n)}$) und (7) das Ergebnis

$$(8) \qquad d < 8\varepsilon |b-a|,$$

d. h.

$$(9) \qquad d = 0.$$

§ 6.

Folgerungen.

Es sei gestattet, schließlich noch einige Folgerungen aus dem Vorangehenden zu ziehen.

Zunächst sprechen wir über die Gleichheit der zweiten partiellen Differentialquotienten F_{12}, F_{21}, einer Function $F(xy)$ zwei Sätze aus, für die sich uns mittelbar Beweise ergeben haben, und die nicht bekannt zu sein scheinen [1]), übrigens vielleicht auch um dieser Beweisart willen hier Platz finden dürfen.

I. Sind $F(xy)$, $F_1(xy)$, $F_2(xy)$ in einem Bereich G eindeutig und stetig, existieren dort überall F_{12} und F_{21} und ist F_{12} stetig in x oder F_{21} in y bei jedem in Betracht kommenden Wert der andern Variabeln, so ist $F_{12} = F_{21}$.

Sind nämlich F, F_1, F_2 eindeutig und stetig in G, so gilt dort nach I § 2 der Cauchy'sche Satz für das Differential $F_1 dx + F_2 dy$. Also muß die bei diesen Voraussetzungen notwendige Bedingung erfüllt sein. Diese lautet aber, wenn noch F_{12} und F_{21} existieren, nach II § 2 (5)

$$(1) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\xi = a} F_{12}(\xi\alpha) = F_{21}(a\alpha) \\ F_{12}(a\alpha) = \lim\limits_{\eta = \alpha} F_{21}(a\eta) \end{cases}$$

für jeden Punkt $(a\alpha)$ in G. Ist also noch F_{12} stetig in x oder F_{21} stetig in y, so gehen diese Gleichungen in $F_{12}(a\alpha) = F_{21}(a\alpha)$ über.

1) Vgl. Encyclop. d. math. Wiss. II. A. 2 (Voss) S. 73. — Stolz, a. a. O. I S. 146 ff.

Digitized by Google

II. Sind F, F_1, F_2 im Bereich G eindeutig und stetig in beiden Variabeln, und besitzen F_1 und F_2 dort überall ein bestimmtes vollständiges erstes Differential, so ist in G $F_{12} = F_{21}$.

Denn nach I § 2 gilt wieder der Cauchy'sche Satz für das Differential $F_1 dx + F_2 dy$. Da aber jetzt die Voraussetzungen Cb bestehen (s. II § 2), so ist die notwendige Bedingung (C), $F_{12} = F_{21}$, erfüllt.

Nach ganz anderer Richtung hin liegt eine Folgerung, die wir jetzt noch hervorheben wollen.

Mit § 5 (II) ist zugleich ein neuer Beweis des Cauchy-Goursat'schen Satzes (a. a. O.) für eine in G eindeutige und stetige Function einer complexen Variablen $f(z)$, die überall in G einen eindeutig bestimmten Differentialquotienten $f'(z)$ besitzt, gegeben. Da für solche Function $f(z)$ also $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ vom Wege unabhängig ist, so ist $F(z)$ nach I § 4 eine stetige Function mit der stetigen Ableitung $f(z)$. Folglich gilt für $F(z)$ auch der Cauchy'sche Satz und die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe bei jedem Wert $z = \zeta$ in G, woraus die Stetigkeit von $f'(z)$ folgt[1]). Daß hiernach die Voraussetzung der eindeutigen Existenz von $f'(z)$ in G die Stetigkeit von $f'(z)$ schon impliciert, beeinträchtigt natürlich nicht die große theoretische Bedeutung des Goursat'schen Satzes. Aus der Stetigkeit von $f(z)$ und $f'(z)$ in G folgt aber nach Herrn Pringsheim[2]) die gleichmäßige Annäherung des Differenzenquotienten von $f(z)$ an den Differentialquotienten $f'(z)$ im ganzen Bereich G. Also hat man schließlich den einem bekannten Satz über Stetigkeit in einem Bereich analogen Satz:

Nähert sich im Bereich G der Differenzenquotient einer in G eindeutigen und stetigen Function $f(z)$ überall einem bestimmten endlichen Grenzwert $f'(z)$, so ist diese Annäherung im ganzen Bereich G gleichmäßig.

Ich hoffe, bei anderer Gelegenheit einen direkten Beweis dieses Satzes geben zu können.

---

1) Vgl. für diesen Schluß auch Morera, Rend. R. Ist. Lomb. 2. Ser. 19 (1886) S. 304 ff., sowie Encyclop. d. math. Wiss. II. B. 1 (Osgood) S. 15.

2) a. a. O. S. 295 ff.

Bonn, 24. Januar 1902.

Digitized by Google

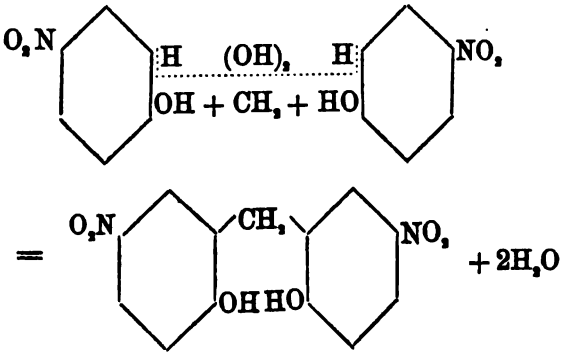
Ueber Xanthenderivate aus *p*-Nitrophenol.

Von

Walther Borsche.

Vorgelegt von Herrn O. Wallach in der Sitzung vom 8. Februar 1902.

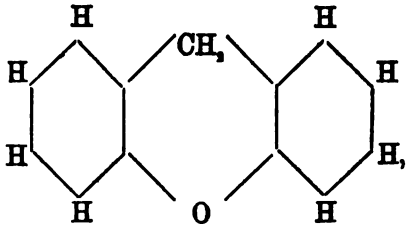
Wenn man concentrirte Schwefelsäure auf ein Gemenge von *p*-Nitrophenol und Formaldehyd einwirken lässt, entsteht nach den Angaben des D. P. 73946 vom 26. Februar 1893 [1]) 3,3'-dinitro-6,6'-dioxydiphenylmethan, entsprechend der Gleichung



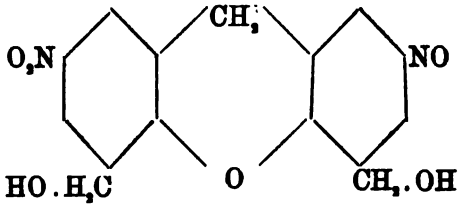
In diesem Sinne scheint die Reaktion aber nur bei genauer Innehaltung der im Patent vorgeschriebenen Bedingungen zu verlaufen. Denn als ich, zusammen mit Herrn A. D. Berkhout auf obigem Wege Dinitrodioxydiphenylmethan darzustellen versuchte, bildete sich bei einer geringfügigen Variation des Verfahrens ein Produkt, das ganz andere Eigenschaften wie die gewünschte Verbindung besass. Da es sich leicht in beliebigen Quantitäten gewinnen lässt, haben wir es etwas eingehender untersucht. Es stellte sich dabei heraus, dass in der neuen Substanz, die der Formel $C_{15}H_{12}O_7N_2$ entsprechend zusammengesetzt ist, ein Substitutionsprodukt des Xanthens,

1) Ber. chem. Ges. 27c,481 [1894].

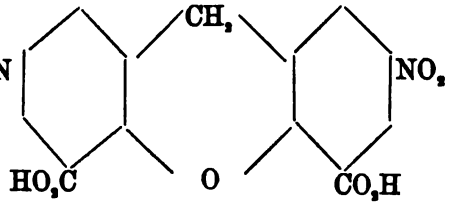
Digitized by Google

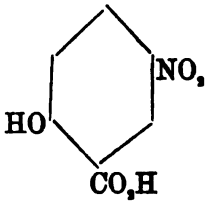


4,5-Di-oxymethyl-2,7-Dinitroxanthen

I. 

vorlag. Durch Chromsäure wird sie nämlich zu einer Säure $C_{15}H_8O_9N_2$ oxydirt, die sich beim Kochen mit Alkalilauge glatt in Formaldehyd und 5-Nitrosalicylsäure [III]

II. 

III. 

spaltet:

$$C_{15}H_8O_9N_2 + 2H_2O = CH_2O + 2C_7H_5O_5N$$

Daraus folgt, dass der Säure $C_{15}H_8O_9N_2$ die durch die Formel [II.] ausgedrückte Constitution zukommt, und daß in der Verbindung $C_{15}H_{12}O_7N_2$ der zu dieser Säure gehörige, zweiwertige Alkohol [I.] vorliegt.

Zur Ausführung des Versuches wurden 5,4 g reinstes p-Nitrophenol in 4,5 g käuflicher 40prozentiger Formaldehydlösung gelöst [zwei Moleküle Nitrophenol auf drei Moleküle Fomaldehyd, entsprechend der Gleichung

$$2C_6H_5O_3N + 3CH_2(OH)_2 = C_{15}H_{12}O_7N_2 + 5H_2O]$$

und eine Mischung von 12 cm³ Schwefelsäure und 3 cm³ Wasser hinzugefügt; das Ganze wurde einige Stunden bei einer Temperatur von etwa 40° sich selbst überlassen. Nach dieser Zeit war es zu einer festen, weissen Masse erstarrt, die scharf abgesaugt, mit Wasser ausgewaschen und durch Krystallisation aus Alkohol gereinigt wurde.

Digitized by Google

Dioxymethyldinitroxanthen, das so beinahe in der theoretisch zu erwartenden Menge erhalten wurde, bildet farblose, bei 148° schmelzende Krystalle, die bei vorsichtigem Erhitzen unzersetzt sublimiren. Ihre Zusammensetzung entsprach der angegebenen Formel.

$C_{15}H_{12}O_7N_2$	Ber.	C 54,19;		H 3,64;		N 8,45.
	Gef.	53,84;	54,13;	3,61;	3,90;	8,28. 8,36.

In Alkalien ist die Verbindung nicht löslich. Durch Oxydationsmittel wird sie leicht angegriffen; beim Erwärmen mit Salpetersäure entsteht überwiegend Pikrinsäure, Kaliumpermanganat liefert Nitrosalicylsäure, Chromtrioxyd nicht, wie wir eigentlich erwarteten, ein Xanthon, sondern 2,7-Dinitroxanthen-4,5-dicarbonsäure $C_{15}H_8O_9N_2$ [II.]. Bei ihrer Bereitung verfuhren wir folgendermassen: 2,4 g des Kondensationsproduktes wurden in 24 cm³ Eisessig gelöst, mit einer Lösung von 2,4 g CrO_3 versetzt und aufgekocht. Nach dem Erkalten gab die Flüssigkeit, mit viel Wasser ausgefällt, einen krystallinischen Niederschlag, der neben der Säure unverändertes Ausgangsmaterial und geringe Quantitäten eines hochschmelzenden, schwerlöslichen Körpers enthielt. Durch häufiges Umkrystallisiren aus Alkohol isolirten wir aus diesem Gemisch die reine Säure in langen, schwach gelblichen, bei 110° schmelzenden Nadeln.

$C_{15}H_8O_9N_2$	Ber.	C 49,99;		H 2,24;		N 7,79.
	Gef.	49,87;	50,16;	2,76;	2,50;	7,89.

Wenn man die Säure in ätzenden oder kohlensauren Alkalien zu lösen versucht, entweicht Formaldehyd. Aus der klaren, gelben Flüssigkeit scheidet Schwefelsäure eine neue Verbindung ab, die aus sehr verdünntem Alkohol in feinen, farblosen Nadeln vom Schmelzpunkt 228° krystallisirt. Die Analyse ergab dafür die Zusammensetzung $C_7H_7O_5N$:

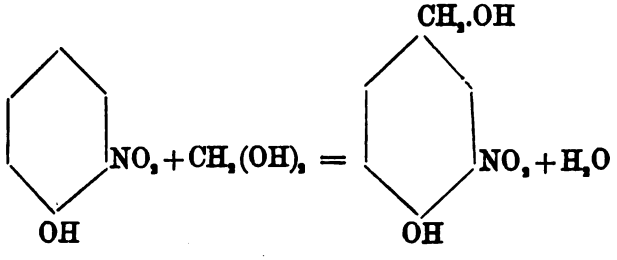
$C_7H_7O_5N$	Ber.	C 45,89;	H 2,75;	N 7,67.	
	Gef.	45,99;	2,63;	7,91.	

Waren die Ansichten, die wir uns über die Constitution der Dicarbonsäure und des zugehörigen Alkohols gebildet hatten, zutreffend, so musste in der neuen Säure die 5-Nitrosalicylsäure [III.] vorliegen. In der That stimmte unsere Substanz in allen Eigenschaften mit einem, aus Salicylsäure nach den Angaben von Hübner[1]) dargestellten, Vergleichspräparat überein.

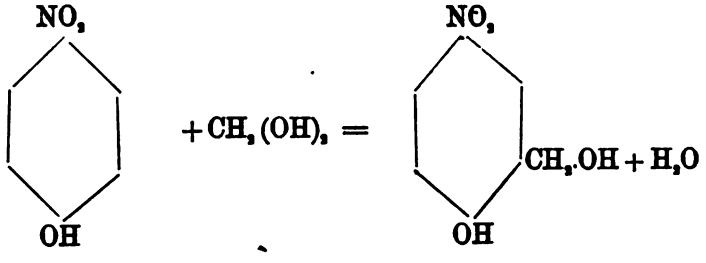
1) Annal. d. Chem. 195,7. [1879]

Digitized by Google

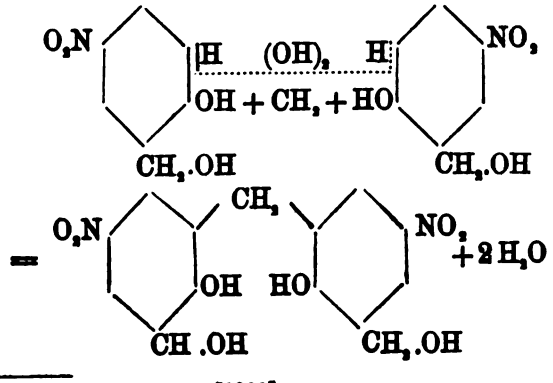
In der von uns aufgefundenen Synthese substituirter Xanthene liegt eine bisher noch nicht beobachtete Vereinigung zweier bekannter Reaktionen vor; sie enthält sowohl die in zahlreichen Abänderungen ausgeführte Darstellung von Diphenylmethanderivaten aus Formaldehyd und Substitutionsprodukten des Benzols, wie auch die neuerdings von Störmer[1]) beschriebene Gewinnung aromatischer Oxyalkohole aus Formaldehyd und Phenolen. Nach Störmer entsteht aus o-Nitrophenol und Formaldehyd beim Kochen mit Salzsäure 3-Nitro-4-oxybenzylalkohol:



In ähnlicher Weise wird die Reaktion auch im vorliegenden Fall zunächst verlaufen:



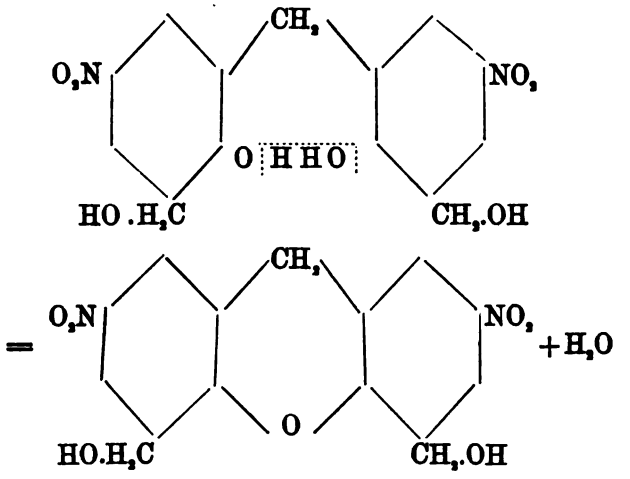
Aber der Prozess bleibt nicht in dieser Phase stehen. Vielmehr reagiren zwei Moleküle des 3-Nitro-6-oxybenzylalkohols von neuem mit einem Molekül Formaldehyd:



1) Ber. chem. Ges. 34,2455 [1901].

Digitized by Google

Und diese Verbindung geht, wie alle 2,2′-Dioxydiphenylmethane, durch Wasserabspaltung leicht in das cyklische Anhydrid, den von uns isolirten Körper, über:



Ob auch substituirte p-Nitrophenole sich nach dem vorstehend beschriebenen Verfahren in Xanthene überführen lassen, müssen weitere Versuche lehren, mit denen wir zur Zeit beschäftigt sind. Auf das o-Nitrophenol läßt sich, wie wir bereits festgestellt haben, die Reaktion nicht übertragen.

Digitized by Google

Ueber die Wanderung galvanischer Polarisation durch Platin- und Palladiumplatten.

(Mit 1 Figur.)

(Aus dem Universitätsinstitut für physikalische Chemie zu Göttingen.)

Von

W. Nernst und A. Lessing.

Vorgelegt von Herrn W. Nernst in der Sitzung am 22. Februar 1902.

Ueber den Mechanismus der Stromerzeugung in den Oxydations- und Reduktionsketten hat der eine von uns [1]) folgende Anschauungen entwickelt.

Oxydationsmittel vermögen eine Platinelektrode mit Sauerstoff, Reduktionsmittel mit Wasserstoff zu beladen; die erwähnten Ketten sind also im Grunde Knallgasketten. Je nach der Stärke des benutzten Oxydations- und Reduktionsmittels variirt auch die Stärke der Gasbeladungen und damit auch nach den bekannten Formeln die elektromotorische Kraft.

Herr stud. F. Krüger äußerte vor einiger Zeit gesprächsweise die Vermuthung, daß vielleicht bei der obigen Auffassung der erwähnten chemischen Agentien ein Reduktionsmittel durch eine dünne Platinwand hindurch reduzierende Wirkung ausüben könnte, indem der vom Reduktionsmittel abgegebene Wasserstoff durch die Platinwand hindurchwanderte. Bei der Langsamkeit der Diffusion in Metallen dürften diese Effekte wegen ihrer Kleinheit sich dem chemischen Nachweise entziehen; wohl aber war zu hoffen, daß der hindurchdiffundierende Wasserstoff sich durch seine elektromotorische Wirksamkeit werde nachweisen lassen, auch wenn es

1) Nernst, Theoret. Chemie III. Aufl. S. 673.

Digitized by Google

sich um auf gewöhnlichem chemischen Wege nicht nachweisbare Quantitäten handeln sollte.

In der That hat ja Helmholtz[1]) nach Versuchen von Root schon 1876 mitgetheilt, daß auf der einen Seite einer 0,02 mm dicken Platinplatte elektrolytisch abgeschiedener Wasserstoff oder Sauerstoff in sehr kurzer Zeit auf der andern Seite der Platte Wasserstoff- bez. Sauerstoffpolarisation ertheilen. Gewöhnlicher an die eine Seite der Platte geleiteter Wasserstoff oder Sauerstoff hatten diese Wirkung nicht, was Helmholtz dadurch erklärte, daß „in diesem Falle die elektrische Kraft fehle, die das Gas in die Platte hineintreibe".

Diese Auffassung ist jedoch im Sinne der osmotischen Theorie der galvanischen Kette nicht mehr aufrecht zu erhalten; das Potential einer Gaselektrode hängt nur von den Konzentrationsverhältnissen in und an der Elektrode ab, gleichgültig ob es sich um elektrolytisch entwickelte oder gewöhnliche Gase handelt, und man kann dementsprechend Platin ebensogut durch daran geleitete Gase wie galvanisch polarisieren. Nur muß man im ersteren Falle, um rasch stärkere Beladungen zu erzielen, dem Platin eine große Oberfläche verleihen, d. h. es platinirt anwenden.

Zur näheren Prüfung dieser Auffassung und der Frage nach der Diffusion der Gase überhaupt erschien zunächst eine Vervollständigung der wenigen Versuche Root's wünschenswerth. —

Die im Nachfolgenden angegebenen elektrolytischen Potentiale beziehen sich sämtlich auf die Wasserstoffelektrode in saurer (bezüglich der Wasserstoffionen normalen) Lösung als Nullpunkt; bei dieser Zählung ist, wie zur leichtern Orientierung bemerkt sei, das Potential eines Zinkstabes in verdünntem Zinksulfat ca. +0,8, eine Sauerstoffelektrode in saurer Lösung −1,1 und eine Bleihyperoxydelektrode in Schwefelsäure ca. −1,6 Volt.

Versuche über die Diffusion elektrolytisch abgeschiedener Gase durch Platin.

Zur Prüfung der Frage, ob es sich thatsächlich bei den von Helmholtz beschriebenen Versuchen um eine Diffusion handelt, wurde zunächst die Diffusionsgeschwindigkeit durch Platinplatten verschiedener Dicke untersucht.

Für die Zeit, die verstreicht, bis eine gewisse kleine Quantität des Gases zur andern Seite der Platte gewandert ist, ergiebt eine einfache Dimensionsbetrachtung, die wir Herrn Dr. Zermelo verdanken, Folgendes:

1) Ges. Abh. I S. 884.

Digitized by Google

Die eine Seite der Platte sei andauernd auf konstantem Potential und damit auch auf konstanter Gaskonzentration γ erhalten; die Beobachtung, daß das Potential einer längere Zeit schwach polarisirten Elektrode auch nach Aufhören des polarisirenden Stromes sich nur sehr langsam ändert, berechtigt uns, für die Konzentration u an der andern Seite der Platte von der Dicke c

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x = c$$

zu setzen, wo x die Richtung des Diffusionsstroms bezeichnet. Für $x = 0$ ist also $u = \gamma$. Ferner ist noch für $t = 0$ überall $u = 0$ und schließlich gehorcht u der bekannten Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Führen wir anstatt x und t

$$\xi = \frac{x}{c} \text{ und } \tau = \frac{t}{c^2}$$

ein, so bekommen wir die Bedingungen

$$\text{für } \xi = 0 \text{ wird } u = \gamma,$$

$$\text{für } \xi = 1 \text{ wird } \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

$$\text{für } \tau = 0 \text{ wird } u = 0$$

und schließlich

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Sei

$$u = F(\xi, \tau)$$

das gesuchte Integral, so ist der Werth von τ, der an der Stelle $\xi = 1$ gilt, eindeutig durch u bestimmt, d. h. es wird

$$\tau = f(u)$$

oder auch

$$\frac{t}{c^2} = f(u).$$

Somit ist die Zeit, die verstreicht, bis an der andern Seite der Platte die Konzentration einen bestimmten Werth u angenommen hat, dem Quadrat der Dicke proportional.

Was für die Konzentration u gilt, trifft natürlich auch für das dadurch eindeutig bestimmte Potential an der andern Seite der Platte zu.

Digitized by Google

Helmholtz und Root untersuchten ihre Platinplatten, indem sie ein U-Rohr in der Mitte auseinanderschnitten und die Platte als Scheidewand dazwischen kitteten. Um solche Kittstellen, die leicht Anlaß zu Versuchsfehlern geben können, zu vermeiden, benutzten wir „Reagenzgläschen" aus Platin von 4,2 cm Länge und 1,5 cm Durchmesser. Dieselben wurden etwa 3 cm tief in verdünnte Schwefelsäure getaucht und konnten so als Kathode oder Anode dienen. Soweit wie die Tiegel eingetaucht wurden, waren sie platiniert. Der Tiegel wurde dann durch eine Hartgummischeibe gesteckt und mit Marineleim luftdicht eingekittet und oben mit einem ebenfalls eingekitteten Gummipfropfen verschlossen. Die Hartgummischeibe diente als Deckel des Gefäßes, in dem die Elektrolyse vor sich ging und sollte insbesondere verhindern, daß Tröpfchen, die ja bei Gasentwickelung immer emporspritzen, bis an den Tiegelrand spritzen könnten. In das Innere des Tiegels wurde nicht, wie bei Helmholtz, ein einfacher Platindraht, dessen Potential ja ziemlich unbestimmt ist, gebracht, sondern eine Quecksilberelektrode, die in normale Schwefelsäure, die mit Mersurosulfat gesättigt war, tauchte.

Eine solche Elektrode hat nach Wilsmore ein Potential von $-0{,}695$ Volt bezogen auf Wasserstoff in normal saurer Lösung.

Der Tiegel wurde innen nur soweit mit der Lösung gefüllt, wie außen die Platinierung reichte, damit eine hindurch wandernde Polarisation nicht von den Wandteilen, die daran nicht beteiligt wären, depolarisiert würden. Im Uebrigen wurde der Tiegel luftleer gemacht.

Die Quecksilberelektrode erwies sich jedoch auch nicht als praktisch, indem das Platin, jedenfalls in Folge der depolarisierenden Wirkung des gelösten Quecksilbersalzes, spontan das Potential der Quecksilberelektrode annahm. Es wurde darum das Innere mit normaler Schwefelsäure gefüllt und durch einen 15 cm langen capillaren Heber mit einem Gefäß verbunden, in das ein Cadmiumstab getaucht wurde. Eine solche Cadmiumnormalelektrode hat nach Wilsmore[1]) ein Potential von $+0{,}457$ Volt.

Um die Wirkung der atmosphärischen Luft auf das Innere des Tiegels auszuschließen, mußte nun allerdings der Tiegel gänzlich gefüllt werden. Die Depolarisation durch die Tiegelwände, die unbeladen sind, kann ja aber die Erscheinung nicht verwischen, sondern, wenn etwa die Oberflächen, die beladen und die unbeladen sind, gleichgroß wären, würden im äußersten Falle in gleichen

1) Wilsmore, Z. ph. Ch. 35 S. 300 (1900).

Digitized by Google

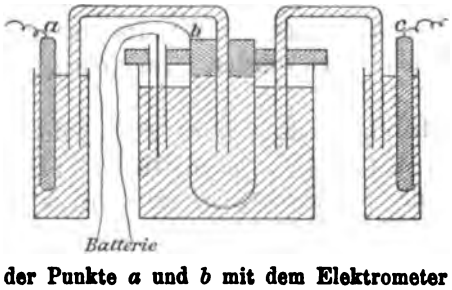
Zeiten nur die halben Concentrationen beobachtbar sein, wie sonst. Bei der Größe der zu erwartenden Wirkungen würde selbst dieser äußerste Fall unschädlich sein.

Um aber ganz sicher zu gehen, wurde auch einmal die Helmholtzsche Anordnung mit dem *U*-Rohr und einer Platinscheibe reproduciert. Hier ist natürlich die Wandoberfläche auf der Seite, wo elektrolysiert wird, ebenso groß wie auf der Seite, an der die Durchwanderung beobachtet werden soll.

Die letztere, dem Inneren der Tiegel entsprechende Hälfte des *U*-Rohrs wurde ebenso wie der Tiegel sorgfältig ohne Luftblase gefüllt und durch den Heber mit der Cadmiumelektrode verbunden.

Im folgenden sei nun, gleichgiltig, ob es sich um Tiegel oder Platte handelt, immer die Seite, auf der elektrolysiert wird, mit „außen" und die Seite, auf der die Diffusion elektromotorisch nachgewiesen werden soll, mit „innen" bezeichnet.

Die Versuche wurden analog den Helmholtzschen so ausgeführt, daß das Potential innen gemessen, dann außen polarisiert und wieder innen gemessen wurde, ob eine Veränderung des Potentials stattgefunden hatte. Außen konnte durch eine Vergleichselektrode kontrolliert werden, welche Potentiale die Wand annahm (vgl. Figur).



Durch Verbindung der Punkte *a* und *b* mit dem Elektrometer wird das Potential der inneren Tiegelwand, durch Verbindung von *b* und *c* mit dem Elektrometer, das Potential der äußeren Tiegelwand gemessen.

Die Potentialmessungen wurden durchweg mit dem neuen Dolecalekschen Quadrantelektrometer [1]) vorgenommen, welches sich außerordentlich bewährte. Eine Depolarisation durch die Messung selbst war so völlig vermieden. Die Nadel wurde durch die städtische Centrale auf 220 Volt gehalten und dann das Elektrometer mittels eines Weston-Elements geaicht; ein Skalentheil war rund 0,008 Volt; die Zehntel der Skalentheile konnten noch be-

1) Zeitschrift für die Instrumentenkunde. 21. 345 (1901).

Digitized by Google

quem abgelesen werden, so daß also $^1/_{1000}$ Volt mit Leichtigkeit gemessen werden konnte. Die Empfindlichkeit blieb über ein Vierteljahr konstant, wurde aber trotzdem häufig nachgemessen.

Die Wandstärke der drei untersuchten Platintiegel, sowie die Dicke der Platinscheibe betrug 0,3 mm.

Nach Helmholtz ist nach fünf Minuten bei der 0,02 mm dicken Platte auf der „Innen"seite eine Potentialänderung um ca. 0,02 Volt bemerkbar, wenn außen kathodisch polarisiert wird; bei einer Dicke von 0,3 mm sollte also nach etwa 19 Stunden dieselbe Wirkung eintreten.

Tiegel I wurde in der angegebenen Weise mit einer Cadmiumelektrode gemessen.

Potential { Außen −0,938 V. / Innen −0,660 V.

Jetzt wurde außen kathodisch polarisiert mit 0,025 A; das Potential war nach 2 Minuten

Außen +0,004 V.
Innen −0,660 V.

Nach 21 Tagen, während welcher das Verfahren dauernd kontrolliert wurde, war das Potential

Außen +0,022 V.
Innen −0,675 V.

Tiegel II wurde ebenso hergerichtet und mit 0,05 A. anodisch polarisiert.

Vor dem Versuch waren die Potentiale

Außen −0,976 V.
Innen −0,704 V.

Nachdem zwei Minuten anodisch polarisiert war, waren die Potentiale

Außen −1,893 V.
Innen −0,804 V.

Nach 17 Tagen

Außen −2,110 V.
Innen −0,793 V.

Tiegel III war mit einer Quecksilberelektrode innen versehen und luftleer gemacht.

Digitized by Google

Das Potential war

Außen $-0{,}950$ V.
Innen $-0{,}763$ V.

Nachdem 48 Stunden mit 0,08 A kathodisch polarisirt war, waren die Potentiale

Außen $+0{,}025$ V.
Innen $-0{,}760$ V.;

auf den letzten Versuch legen wir wegen der oben geäußerten Bedenken weniger Werth.

Die Platinplatte wurde gleichfalls kathodisch mit 0,05 A polarisirt. Die Platte war nicht platiniert, hatte einen Durchmesser von 2 cm und war in ein *U*-Rohr von 0,8 cm lichter Weite eingekittet. Vor Beginn des Versuches waren die Potentiale

Außen $-0{,}920$ V.
Innen $-0{,}806$ V.

Nachdem 46 Stunden kathodisch polarisiert war, waren die Potentiale

Außen $+0{,}1$ V.
Innen $-0{,}798$ V.

Bei dieser Anordnung (*U*-Rohr) ließ sich das Potential „außen", während der polarisierende Strom floß, wegen des Potentialgefälles im Rohre nicht sicher messen; die Messung fand also am Schluß des ganzen Versuches statt, nachdem der polarisierende Strom gerade unterbrochen war.

Obige vier Versuche zeigen deutlich, daß Diffusionserscheinungen in der Stärke, wie sie nach den Helmholtzschen Versuchen zu erwarten waren, nicht eintreten. Trotzdem ließen sich die Helmholtzschen Versuche selbst, also Versuche mit Platinfolie, auch mit unserer Anordnung leicht verifizieren. Durch Platinieren der Folie kamen wir sogar zu weit deutlicheren Erscheinungen.

Eine Platinfolie von 0,036 mm Dicke wurde auf ein ca. 1 cm weites Glasrohr als Verschluß aufgekittet, wobei die Ränder der Folie an das Glas angebogen und äußerst sorgfältig verkittet wurden.

Das Rohr wurde in verdünnte Schwefelsäure nur soweit getaucht, daß die Flüssigkeit eben das Platin benetzte. Das Rohr war innen mit einer Quecksilberelektrode in analoger Weise wie früher ausgestattet.

Digitized by Google

Aus einer großen Anzahl von Versuchen seien hier einige charakteristische angegeben.

Die unplatinierte Platte wurde außen kathodisch polarisiert.

Stromstärke 0,07 A.

Anfangspotential innen:	−0,851 V.
nach fünf Minuten	−0,750 V.
„ elf „	−0,672 V.
nach drei Stunden	−0,054 V.

Jetzt wurde die Platte anodisch polarisiert.

Stromstärke 0,07 A.

nach fünf Stunden innen	−1,235 V.

Jetzt wurde außen zu der Schwefelsäure $KMnO_4$ zugesetzt und der elektrische Strom unterbrochen.

Anfangspotential:	Außen	Innen
	−1,235 V.	−1,235 V.
Nach 1′	.....	−1,336 V.
15′	.....	−1,353 V.
1h	−1,401 V.	−1,383 V.
5h 20′	−1,540 V.	−1,538 V.

Versuche, mit gegen die Platte geleitetem Wasserstoff oder Sauerstoff Potentialänderungen innen zu erhalten, erwiesen sich, wie bei Helmholtz und Root, erfolglos; die Außenseite nahm eben, da sie unplatiniert war, nachweislich durch einfaches Gegenleiten weder Wasserstoff-, noch Sauerstoffpotential an.

Mit einer platinierten Folie von 0,036 mm Stärke erhält man dagegen folgende Resultate:

Es wurde zunächst Wasserstoff außen gegengeleitet:

Potential		Zeit	
Außen	Innen		
−1,048	−1,046	0′	0″
−0,976	.....		20″
−0,897	.....	1′	0″
.....	−0,890	2′	
−0,302	.....	2′	35″
−0,206	.....	3′	20″
.....	−0,148	4′	45″
−0,130	.....	6′	50″
.....	−0,136	8′	55″
.....	−0,123	19′	
−0,115	.....	20′.	

Digitized by Google

Jetzt wurde der Wasserstoffstrom unterbrochen und der Apparat vier Stunden sich selbst überlassen. Dann wurde atmosphärische Luft außen angeleitet.

Anfangspotential

Außen	−0,130
Innen	−0,134

Nach 13 Minuten

Außen	−0,825
Innen	−0,771

Aus diesen Versuchen geht nun deutlich hervor, daß es sich um eine wirkliche Diffusion des Wasserstoffs oder Sauerstoffs durch die Platinfolie nicht handeln kann, es wäre sonst unerklärlich, warum bei stärkeren Platten die Erscheinung völlig verschwindet. Man wird annehmen müssen, daß immer in dünner Platinfolie Poren vorhanden sind, die Stromlinien hindurchtreten lassen.

Ein Versuch, solche Poren direkt nachzuweisen, mislang, wahrscheinlich, weil es sich um äußerst enge Poren handelte. Das Rohr mit der Platinfolie wurde nämlich in ein Gefäß mit einer Lösung von Eisenchlorid getaucht. Nach drei Wochen wurde versucht, im Inneren des Rohres Eisen chemisch nachzuweisen, was aber nicht möglich war.

Versuche mit Palladium.

Eine wirkliche Diffusion, deren Dauer nach dem vorigen dem Quadrat der Plattendicke proportional ist, wurde an Palladiumplatten nachgewiesen.

Untersucht wurden drei Platten von 0,2 mm, 0,6 mm und 1,0 mm Dicke. Auch ein Palladiumtiegel, dessen Wandstärke etwa 0,2 mm betrug, wurde zur Messung verwendet.

1) Platte von 0,2 mm.

Die Platte wird kathodisch polarisiert.

Stromstärke 0,02 A.

Potential Außen	Innen	Zeit	
−0,560 V.	−0,560 V.	0′	0″
	−0,560 V.	1′	
	−0,544 V.	1′	15″
	−0,220 V.	2′	
	−0,143 V.	3′	
	−0,092 V.	6′	
	−0,065 V.	10′	
−0,050 V.	−0,050 V.	35′.	

Digitized by Google

Der Strom wurde unterbrochen und der Apparat sich selbst überlassen, um auf eine etwaige Depolarisation des Luftsauerstoffs zu prüfen; eine Aenderung des Potentials konnte jedoch in einer Stunde nicht konstatiert werden.

Jetzt wurde anodisch polarisiert

Potential		
Außen	Innen	Zeit
−0,050	−0,050	0′ 0″
	−0,073	2′
	−0,110	20′
−1,560	. . . . .	21′
	−0,359	3ʰ 0′
	−0,410	5ʰ 0′

---

2) Platte von 0,6 mm.

Die Platte wird kathodisch mit 0,05 A. polarisiert.

Potential		
Außen	Innen	Zeit
−0,710 V.	−0,710 V.	0ʰ 0′ 0″
	−0,710 V.	12′ 0″
	−0,640 V.	12′ 20″
	−0,413 V.	13′
	−0,168 V.	26′.

Strom unterbrochen und 30 Stunden stehen gelassen:

−0,262 V. −0,126 V.

Jetzt wird außen eine saure Eisenchloridlösung eingefüllt

−0,636 V.	−0,126 V.	0ʰ 0′ 0″
	−0,151 V.	5ʰ 20′
	−0,193 V.	12ʰ
−0,667 V.	−0,217 V.	17ʰ
	−0,281 V.	41ʰ
	−0,393 V.	100ʰ

---

3) Platte von 1,0 mm Dicke.

Dieselbe wird kathodisch mit 0,07 A polarisiert.

Digitized by Google

Potential Außen	Innen	Zeit
−0,720 V.	−0,720 V.	0ʰ 0′ 0″
	−0,720 V.	36′
	−0,620 V.	38′
	−0,495 V.	39′
	−0,426 V.	40′
	−0,203 V.	50′
	−0,116 V.	1ʰ 4′.

Strom unterbrochen und 24 Stunden stehen gelassen.
Potential innen −0,079 V.

Nun wird außen mit 0,05 A anodisch polarisiert. Nach 1ʰ 30′ ist das

Potential innen −0,092 V.

Da das Palladium bei starker anodischer Polarisation sich auflöst, wurde der Versuch abgebrochen.

Stellen wir aus den drei obigen Versuchen die Zeiten zusammen, die bei den drei Platten erforderlich sind, um 0,1 Volt Spannungsveränderung „innen“ zu bewirken, und berechnen wir aus dem dritten Versuch nach dem Diffusionsgesetz die entsprechenden Werte, so ergiebt sich:

	beob.	ber.
I	1′ 13″	1′ 31″
II	12′ 30″	13′ 39″
III	38′ 0″	38′ 0″.

Wie man sieht, kann man diesen vorläufigen Zahlen (genauere Messungen sind bereits im Gange) das Resultat entnehmen, daß die Wanderung des Wasserstoffs durch Palladium wenigstens in erster Annäherung den Diffusionsgesetzen gehorcht [1]).

Anders steht es mit dem Sauerstoff; anodische Polarisation vernichtet zwar ein Wasserstoffpotential, sie vermag jedoch kein merkliches Sauerstoffpotential auf der andern Seite der Platte zu erzeugen.

1) Herr Dr. Coehn machte darauf aufmerksam, daß dieses Ergebnis in Uebereinstimmung steht mit der von Coehn und Dannenberg (Zeitschr. f. phys. Chem. 38 p. 609 1901) festgestellten Thatsache, daß der Wasserstoff an Palladium, entsprechend seiner großen Diffusionsfähigkeit in diesem Metalle, um 0,26 V. früher in merklichen Mengen entladen wird als am Platin. Diese Differenz nimmt ab mit zunehmender Sättigung des Palladiums, so daß am wasserstoffgesättigten Palladium der Entladungspunkt für Wasserstoff sogar höher liegt, als am Platin.

Digitized by Google

So wurde die dünnste Platte drei Stunden lang anodisch polarisiert und blieb auf ihrem Anfangspotential −0,77 Volt; als der Strom kommutiert wurde, war nach 1½ Minuten −0,67 Volt erreicht, ein Beweis, daß am Apparat keine Störung eingetreten war.

Die Wirkung der anodischen Polarisation durch die Palladiumwand hindurch hat man sich also nur als Zurückwandern des Wasserstoffs vorzustellen. Diese Wirkung kann, wie aus Versuch 2 hervorgeht, auch durch ein Oxydationsmittel, wie Eisenchlorid hervorgebracht werden, obwohl dasselbe keineswegs spontan Sauerstoff entwickelt, sondern nur ein Potential von −0,667 Volt der Platte erteilt.

Untersuchung von Reduktionsmitteln.

Das Hauptproblem dieser Arbeit, auf das wir nun experimentell kommen können, lautet also jetzt specieller:

Diffundiert nur das durch elektrolytisch abgeschiedenen Wasserstoff bewirkte Potential durch Palladium oder diffundiert jedes Wasserstoffpotential, sei es nun hervorgebracht durch elektrolytisch abgeschiedenen Wasserstoff, durch gasförmig dagegen geleiteten oder durch ein Reduktionsmittel?

1) Versuch mit dem Tiegel.

Wasserstoff wird gegengeleitet:

Potential		
Außen	Innen	Zeit
−0,719 V.	−0,710 V.	0h 0′ 0″
	−0,426 V.	2′
−0,150 V.		3′
	−0,300 V.	10′.

Nachdem 1 Stunde lang Luft gegengeleitet wurde, war das Potential

−0,640 V. −0,628 V.

2) Versuch mit der Platte von 0,6 mm Dicke.

Wasserstoff wird gegengeleitet.

Bei dieser Anordnung nahm die Platte außen das Wasserstoffpotential langsamer an, als der Tiegel, weil die Wasserstoffblasen an der senkrecht stehenden Platte nicht so lange hafteten, wie an dem Boden des Tiegels.

Digitized by Google

Potential		
Außen	Innen	Zeit
−0,501 V.	−0,491 V.	0h 0′
−0,352 V.	. . . . .	30′
−0,170 V.	−0,321 V.	3h
−0,150 V.	−0,294 V.	5h.

Nach 48 Stunden langem Gegenleiten von Luft waren die Potentiale:

−0,557 V. −0,491 V.

Die Wasserstoffpotentiale ließen sich, wie früher, ebenso leicht durch ein Oxydationsmittel, wie Eisenchlorid oder übermangansaures Kali, vernichten.

Es blieb nur noch übrig zu zeigen, daß auch der Wasserstoff, mit dem ein Reduktionsmittel das Palladium belädt, diffundiert, auch wenn das Reduktionsmittel nicht spontan Wasserstoff entwickelt, oder was dasselbe ist, wenn das Wasserstoffpotential unter 0 Volt bleibt. Ein Reduktionsmittel, das für diese Versuche geeignet war, war $K_4 Co CN_6$ in alkalischer Lösung.

1) Die Platte von 0,2 mm Dicke wird außen mit $K_4 Co CN_6$ behandelt.

Potential		
Außen	Innen	Zeit
−0,800 V.	−0,802 V.	0h 0′ 0″
. . . . .	−0,705 V.	10′
−0,315 V.	. . . . .	12′
. . . . .	−0,689 V.	15′
	−0,612 V.	20′
−0,456 V.	−0,555 V.	20h.

2) Die Platte von 0,6 mm Dicke wird außen mit $K_4 Co CN_6$ behandelt.

Potential		
Außen	Innen	Zeit
−0,77 V.	−0,750 V.	0h 0′ 0″
−0,365 V.	. . . . .	3′
. . . . .	−0,726 V.	20′
−0,367 V.	−0,499 V.	23h.

Durch Behandeln mit $KMnO_4$ konnte eine deutliche Umkehr im Gange des Potentials innen nachgewiesen werden.

3) Mit dem Tiegel wurden auch derartige Versuche angestellt. Der Tiegel wird mit $K_4 Co Cn_6$ behandelt:

Digitized by Google

Potential		
Außen	Innen	Zeit
−0,772	−0,772	0
−0,3	−0,614	15′.

Nach Zusatz von $KMnO_4$:

−1,495	−0,748	30′;

nach Zusatz von $K_4Co(CN)_6$:

−0,35	−0,628	15′;

nach Zusatz von $KMnO_4$

−1,5	−0,644	15′.

Zum Schluß seien noch zwei Versuche erwähnt, die zeigen, daß Sauerstoff selbst nicht diffundiert, auch wenn mit $KMnO_4$ der Platte ein starkes Sauerstoffpotential erteilt wird.

1) Die Platte von 0,6 mm Dicke stand Anfangs auf einem Potential

Außen	−0,77 V.
Innen	−0,77 V.

Nach 24stündiger Behandlung mit $KMnO_4$ waren die Potentiale

Außen	−1,560 V.
Innen	−0,77 V.

2) Die Platte von 0,2 mm Dicke stand anfangs auf

Außen −0,800 V. Innen −0,802 V.

Nach 24stündiger Behandlung mit $KMnO_4$ waren die Potentiale

Außen −1,482 V. Innen −0,802 V.

Diese Versuche lehren, daß im Sinne der eingangs erwähnten Theorie der Reduktionsmittel die durch letztere erzeugten Potentiale sich bezüglich der Diffusionsfähigkeit wie direkt durch Wasserstoff hevorgerufene Potentiale verhalten.

Digitized by Google

Resultate.

1) Wenn einer Palladiumplatte auf einer Seite ein Reduktionspotential durch Elektrolyse erteilt wird, so wandert der Wasserstoff, mit dem die Platte beladen wird, durch dieselbe. Für diese Wanderung ist die Uebereinstimmung mit den Diffusionsgesetzen nachgewiesen.

2) Für Sauerstoff war eine solche Diffusion nicht nachweisbar.

3) Bei Platin war eine Diffusion weder für Wasserstoff noch für Sauerstoff nachweisbar.

4) Das durch gasförmigen Wasserstoff oder durch Reduktionsmittel hervorgebrachte Potential diffundierte wie durch Elektrolyse erzeugtes Potential; dies ist nur so zu deuten, daß auch die Reduktionsmittel das Palladium durch Abgabe von Wasserstoff polarisieren.

Digitized by Google

Versuche über den elektrokalorischen Effekt beim Turmalin.

Von **R. Straubel.**

Vorgelegt durch W. Voigt in der Sitzung vom 21. Februar 1902.

Wie zuerst von W. Thomson im Jahre 1877 auf thermodynamischem Wege bewiesen wurde, entspricht der pyroelektrischen Erscheinung d. h. der elektrischen Erregung bei gleichförmiger Temperaturänderung ein reciproker Vorgang, nämlich eine Temperaturänderung bei Variation des elektrischen Zustandes. Bringt man einen pyroelektrischen Krystall so in ein elektrisches Feld, daß die Kraftlinien vom analogen zum antilogen Pole laufen, so wird er sich erwärmen; ist die Orientierung des Krystalles zum Felde die umgekehrte, so wird er sich abkühlen.

Ueber diesen von der Theorie vorausgesehenen Effekt habe ich vor zwei Jahren an einem brasilianischen Turmalin einige Versuche gemacht, die in dem folgenden, obwohl sie nur qualitativer Natur sind, kurz dargestellt werden sollen.

Von dem Turmalin wurden vier zur Axe senkrechte Platten von 0,2 cm Dicke abgeschnitten. Je zwei Platten wurden übereinander gelegt und zwar das eine Paar mit den analogen, das andere mit den antilogen Polen nach oben. Zwischen die Platten des einen Paares wurden die ungeraden, zwischen die des anderen die geraden Lötstellen einer selbstgefertigten, feindrähtigen aus 10 Elementen bestehenden Thermosäule aus Constantan und Eisen gebracht. Die Thermosäule war durch (hydraulisches) Pressen zwischen zwei ebenen gehärteten Stahlplatten flachgedrückt und zum Zwecke der Isolation der dicht bei einander liegenden Drähte leicht mit Schellack überzogen. Platten und Thermosäule befanden sich in einer zwischen zwei horizontalen Condensatorplatten stehenden Hartgummidose von 1 cm Höhe und 12 cm Durchmesser, deren Mantelfläche die Enden der Thermosäule durchsetzten.

Bei dem benutzten d'Arsonval-Galvanometer entsprach ein Skalenteil der Spiegelablesung $1{,}83.10^{-8}$ Ampère, oder, da der Widerstand von Galvanometer plus Thermosäule 8,59 Ohm betrug, $1{,}57.10^{-7}$ Volt. Rechnet man die thermoelektrische Kraft der

Digitized by Google

Combination Eisen-Constantan zu 53.10^{-6} Volt, so entspricht also ein Skalenteil einer Temperaturdifferenz der Lötstellengruppen von $0{,}3.10^{-3}$ Celsius.

Die benutzte kleine einscheibige Influenzmaschine arbeitete entweder „offen" oder durch einen Holzstab geschlossen. Zwischen Influenzmaschine und Condensatorplatten war ein Paraffincommutator eingeschaltet, der auch erlaubte, die Condensatorplatten kurz zu schließen. Die Potentialdifferenz zwischen den 1,35 cm von einander entfernten Condensatorplatten wurde so hoch gehalten, als es ohne Störung gieng; für die Mehrzahl der Beobachtungen wurde sie zu ungefähr 30,000 Volt geschätzt; sie kann aber auch nicht unbeträchtlich davon abgewichen haben, da die Schätzungen — auf grund von Funkenlängen zwischen Kugeln von 2 cm Durchmesser — nur *vor* und *nach* den eigentlichen Beobachtungen vorgenommen wurden.

Die Beobachtung verlief nun folgendermaßen. Sobald das elektrische Feld hergestellt wurde, begann ein Ausschlag des Galvanometerrahmens, der *je nach der Feldrichtung die eine oder andere Richtung* hatte. Dieser Ausschlag erreichte in ungefähr einer halben Minute sein Maximum, um weiterhin in ungefähr vier Minuten wieder auf Null herabzusinken. War dies eingetreten d. h. war keine merkliche Wanderung der Bilder mehr zu bemerken, so wurde commutiert, das Maximum des nach der anderen Seite erfolgenden Ausschlags beobachtet u. s. w. Im folgenden wird eine solche Beobachtungsreihe gegeben; die Skalenteile waren Doppelmillimeter.

Umkehrp.	Nullp.	Umkehrp.	Maximalausschlag.	
	239,4			
		245,0		+ 5,6
	239,4			
235,0			— 4,4	
	239,0			
		243,6		+ 4,6
	238,0			
232,7			— 5,3	
	236,3			
		240,6		+ 4,3
	236,6			
231,7			— 4,9	
	235,0			
		240,7		+ 5,7
	237,0			
232,1			— 4,9	
	237,1			
		241,4		+ 4,3
			M. — 4,9	+ 4,9.

Digitized by Google

Die beiden Columnen rechts sind die durch Subtraktion des letzten Nullpunktes gewonnenen Ausschläge.

Nachdem ein solcher Beobachtungssatz gemacht war, wurde das eine oder andere Plattenpaar herumgedreht, so daß also jetzt alle Platten ihre analogen Pole nach derselben Seite richteten. Unter diesen Umständen durfte sich bei Felderregung kein Ausschlag zeigen, da jetzt für beide Gruppen von Lötstellen eine Temparaturänderung von gleichem Sinne und gleichem Betrag eintreten mußte. Von den Beobachtungen führe ich die auf die vorhin gegebene folgende an.

Umkehrp.	Nullp.	Umkehrp.	Ausschlag.	
	234,0			
		234,4		+ 0,4
	233,7			
234,0			+ 0,3	
	234,0			
		234,2		+ 0,2
	234,0			
233,7			— 0,3	
	234,0			
		234,5		+ 0,5
	234,4			
234,6			+ 0,2	
	234,8			
		234,8		+ 0,0
	234,0			
234,0			0,0	
	234,8			
		234,3		— 0,5
	234,6			
235,0			+ 0,4	
		M.	+ 0,1	+ 0,1.

Aehnliche Resultate ergaben sich auch, wenn die Platten durch Neigen der Hartgummidose so bei Seite geschoben wurden, daß sie die Lötstellen der Thermosäule nicht mehr zwischen sich enthielten. Dies war aus dem Grunde bequemer, weil man hierbei die Platten nicht zu berühren und deshalb auf den thermischen Gleichgewichtszustand nicht lange zu warten brauchte.

Bezüglich der Interpretation der Beobachtungen möchte ich folgendes bemerken. Es scheint mir keinem Zweifel zu unterliegen, daß wir es hier wirklich mit dem gesuchten electrocalorischen Effekt zu thun haben. Dafür spricht erstens die Regelmäßigkeit, mit der die Wirkung mit der Feldumkehrung ihr Zeichen wechselte. In keiner der Beobachtungen ist der Zeichen-

Digitized by Google

wechsel ausgeblieben. Ferner sind, wo keine Wirkungen zu erwarten waren, auch keine oder nur unbedeutende, unregelmäßige eingetreten. Und schließlich sind die Beträge, so lange es sich um annähernd gleiche Feldstärken handelte, von nahezu gleicher Größe. Drei größere, relativ störungsfreie d. h. ohne stärkere Nullpunktsschwankungen verlaufende Beobachtungsreihen ergaben die Mittelwerte 4,3, 4,5, 4,1 Skalenteile (Doppelmillimeter).

Das langsame Abfallen der Maximalausschläge — bei constanter Potentialdifferenz der Condensatorplatten erfolgend — ist offenbar und in Uebereinstimmung mit von anderer Seite vertretenen Anschauungen in folgender Weise zu erklären. Mit der Herstellung eines elektrischen Feldes tritt gleichzeitig die Temperaturänderung in den Turmalinpaaren auf und zwar in dem einen Paare Temperatursteigerung, in dem anderen Temperaturerniedrigung. Die Lötstellen fangen an, den Temperaturänderungen ihrer Umgebung zu folgen und der Galvanometerrahmen beginnt zu wandern. Aber die elektrische Oberflächenleitung des Turmalins tritt mit dem Moment der Felderregung ins Spiel und compensiert durch Oberflächenschichten die elektrische Wirkung des Feldes auf den Turmalin. In dem Maße, als dies geschieht, wird aber natürlich auch die Temperaturänderung rückgängig gemacht. Der überwiegende Teil des thatsächlich auftretenden Temperaturausgleichs wird also wahrscheinlich nicht durch Strahlung oder Leitung (obgleich die metallische Verbindung beider Platten durch die Thermokette eine merkliche Wirkung üben dürfte), sondern durch den Rückgang der elektrischen Erregung bewirkt.

Was die Größe der beobachteten elektrischen Temperaturänderung anbelangt, so ist schließlich folgendes zu bemerken. Da das d'Arsonval-Galvanometer aperiodisch gedämpft war, so genügt es für den vorliegenden Zweck, die Ausschläge mit der halben oben für den Skalenteil angegebenen Gradzahl zu multiplicieren. Dies liefert für das gegebene Beispiel für jedes Plattenpaar eine Temperaturänderung von $0{,}74.10^{-8}$ Celsius, welche Zahl der Größenordnung nach hinreichend mit dem von der Theorie geforderten Werte übereinstimmt.

Jena, den 20. Februar 1902.

Digitized by Google

Zur Theorie der Integralgleichung

$$A(s,t) - \mathrm{A}(s,t) = \mu \int_0^1 A(s,r)\,\mathrm{A}(r,t)\,dr.$$

Von

O. Kellogg in Göttingen.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert am 8. Februar 1902.

Die Lösung der genannten Integralgleichung nach der Neumann'schen Methode lautet:

$$\mathrm{A}(s,t) = \mathrm{A}(\mu;s;t) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\mu + \mathrm{A}_2\mu^2 + \cdots$$

wo

$$1)\quad \mathrm{A}_k(s,t) = (-1)^k \int_{(k)}^{0} A(s,s_1)A(s_1,s_2)A(s_2,s_3)\ldots A(s_{k-1},s_k)A(s_k,t)\,ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$$\mathrm{A}_0(s,t) = A(s,t)$$

ist; nach der Fredholm'schen[1]) Methode dagegen wird dieselbe Function dargestellt als Quotient zweier ganzen transcendenten Functionen;

$$\mathrm{A}(\mu;s,t) = \frac{\Gamma(\mu;s,t)}{\delta(\mu)}$$

wo

$$\Gamma(\mu;s,t) = \Gamma_0 + \Gamma_1\mu + \Gamma_2\mu^2 + \cdots$$

$$\delta(\mu;s,t = 1 + d_1\mu + d_2\mu^2 + \cdots$$

sind.

---

1) J. Fredholm, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900 Stockholm.

Digitized by Google

$$2)\qquad d_h = \frac{1}{h!}\int_{(h)}^{1} \begin{vmatrix} A(s_1,s_1), & A(s_1,s_2) & \dots & A(s_1,s_h) \\ A(s_2,s_1), & A(s_2,s_2) & \dots & A(s_2,s_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(s_h,s_1), & A(s_h,s_2) & \dots & A(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \dots ds_h$$

$$3)\qquad \Gamma_h = \frac{1}{h!}\int_{(h)}^{1} \begin{vmatrix} A(s_1,s_1), & A(s_1,s_2) \dots & A(s_1,s_h), & A(s_1,t) \\ A(s_2,s_1), & A(s_2,s_2) \dots & A(s_2,s_h), & A(s_2,t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(s_h,s_1), & A(s_h,s_2) \dots & A(s_h,s_h), & A(s_h,t) \\ A(s,s_1), & A(s,s_2) \dots & A(s,s_h), & A(s,t) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \dots ds_h$$

Die Vergleichung beider Formeln liefert:

$$4)\qquad \Gamma_h = A_h + A_{h-1}d_1 + A_{h-2}d_2 + \dots + A_0 d_h \quad (h = 1, 2, 3 \dots).$$

Diese Formel wollen wir nun direkt verificiren, womit ein neuer Beweis der Fredholmschen Formel erbracht wird.

Da nun Γ_h ein h-faches Integral (wie durch das (h) angedeutet wird) über eine Determinante $(h+1)^{ter}$ Ordnung ist, so ist natürlich zu versuchen, die h-fachen Integrale A_h, $A_{h-1}d_1$, $\dots$ $A_0 d_h$ als Integrale über Determinanten $(h+1)^{ter}$ Ordnung zu schreiben, die sich so zusammenziehen, daß gerade Γ_h sich daraus ergiebt. In dieser Absicht werden alle folgende Umformungen ausgeführt werden.

§ 1. Man kann A_h gleich ansehen als Integral über einer Determinante $(h+1)^{ter}$ Ordnung [1]:

$$A_h = (-1)_h \int \begin{vmatrix} A(s,s_1), & 0 & \dots & 0, & 0 \\ 0 & , A(s_1,s_2), & \dots & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & , 0 & , \dots & 0, & A(s_h,t) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h$$

und wenn wir die von null verschiedenen Elemente an dieselbe Stelle bringen wollen, die sie in Γ_h einnehmen, so müssen wir die erste Zeile zur letzten machen, was durch h-Vertauschungen geschieht. Es wird dann

---

1) Da im Folgenden wir meistens nur mit h-fachen Integralen von 0 bis 1 zu thun haben werden, können wir in diesen Fällen die Grenzen und das Zeichen (h) weglassen.

Digitized by Google

$$5)\quad \mathrm{A}_h = \int \begin{vmatrix} 0 & A(s_1,s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(s_2,s_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A(s_{h-1},s_h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_h,t) \\ A(s,s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h$$

Das zweite Glied der Formel (2) ist:

$$\mathrm{A}_{h-1} d_1 = (-1)^{h-1} \int_{(h-1)} A(s,s_1)A(s_1,s_2)\dots A(s_{h-1},t)\,ds_1 ds_2 \dots ds_{h-1} \times \int A(s_h,s_h)\,ds_h$$

und wenn man den Integranden wieder als Hauptdiagonalglied einer Determinante schreibt und $h-1$ Vertauschungen macht, so erhält man:

$$\mathrm{A}_{h-1} d_1 = \int \begin{vmatrix} 0 & A(s_1,s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(s_2,s_3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A(s_{h-2},s_{h-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A(s_{h-1},t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_h,s_h) & 0 \\ A(s,s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h$$

und das können wir mit A_h, (5) gleich zusammenziehen, denn die zwei Determinanten sind gleich bis auf die zwei Unterdeterminanten $\begin{vmatrix} A(s_{h-1},s_h) & 0 \\ 0 & A(s_h,t) \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 0 & A(s_{h-1},t) \\ A(s_h,s_h) & 0 \end{vmatrix}$ die dieselben Stellungen haben. Also addieren wir indem wir diese zwei Unterdeterminanten addieren. Die Summe ist:

$$S_1 = \mathrm{A}_h + \mathrm{A}_{h-1} d_1 =$$

$$6)\quad \int \begin{vmatrix} 0 & A(s_1,s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(s_2,s_3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A(s_{h-2},s_{h-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_{h-1},s_h) & A(s_{h-1},t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_h,s_h) & A(s_h,t) \\ A(s,s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h$$

§ 2. Aehnlich wie vorher findet man

Digitized by Google

$$A_{h-2}d_2 =$$

$$7)\quad \frac{1}{2!}\int \begin{vmatrix} 0 & A(s_1,s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(s_2,s_3) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A(s_{h-3},s_{h-2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & A(s_{h-2},t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_{h-1},s_{h-1}) & A(s_{h-1},s_h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_h, s_{h-1}) & A(s_h, s_h) & 0 \\ A(s,s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h \cdot$$

Wenn wir jetzt dieses Integral zu (6) addieren wollen, so müssen wir beachten, daß in den zwei Determinanten, die folgende zwei Unterdeterminanten 3. Ordnung:

$$8)\quad \begin{vmatrix} A(s_{h-2},s_{h-1}) & 0 & 0 \\ 0 & A(s_{h-1},s_h) & A(s_{h-1},t) \\ 0 & A(s_h, s_h) & A(s_h,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(s_{h-2},s_{h-1}) & 0 & 0 \\ A(s_{h-1},s_{h-1}) & A(s_{h-1},s_h) & A(s_{h-1},t) \\ A(s_h, s_{h-1}) & A(s_h, s_h) & A(s_h,t) \end{vmatrix}$$

$$9)\quad \tfrac{1}{2}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & A(s_{h-2},t) \\ A(s_{h-1},s_{h-1}) & A(s_{h-1},s_h) & 0 \\ A(s_h, s_{h-1}) & A(s_h, s_h) & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & A(s_{h-2},t) \\ A(s_{h-1},s_{h-1}) & A(s_{h-1},s_h) & A(s_{h-1},t) \\ A(s_h,s_{h-1}) & A(s_h,s_h) & A(s_h,t) \end{vmatrix}$$

denselben Factor, $A(s,s_1)A(s_1,s_2)\dots A(s_{h-3},s_{h-2})$, den wir mit $f(s,s_1\dots s_{h-2})$ bezeichnen, haben. Es kommt daher darauf an, diese Unterdeterminanten auf geeignete Weise zu addieren. Hierbei wollen wir erreichen, daß kein Element in der so entstehenden Determinante gleich null ist (vergl. Γ_h) und auch, daß die Determinante (8) den Factor $\frac{1}{2}$ erhält. Also fügen wir zu (8) hinzu

$$9)\quad \begin{vmatrix} 0 & A(s_{h-2},s_h) & 0 \\ A(s_{h-1},s_{h-1}) & A(s_{h-1},s_h) & A(s_{h-1},t) \\ A(s_h, s_{h-1}) & A(s_h, s_h) & A(s_h,t) \end{vmatrix}.$$

Die Lücke wird dabei ausgefüllt, und der Werth von (8) verdoppelt, weil (9) genau gleich (8) ist, abgesehen von der Benennung der Integrationsvariabeln. Um dies einzusehen, braucht man nur die zwei ersten Reihen und die zwei letzten Zeilen zu vertauschen und s_{h-1} mit s_h zu vertauschen, was nichts an die Werthe der Integralen ausmacht, da $f(s,s_2\dots s_{h-2})$ s_{h-1} und s_h nicht enthält. Wir bekommen also

Digitized by Google

$$S_2 = A_h + A_{h-1} d_1 + A_{h-2} d_2 =$$

$$\frac{1}{2!}\int \begin{vmatrix} 0 & A(s_1,s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(s_2,s_3) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A(s_{h-3},s_{h-2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_{h-2},s_{h-1}) & A(s_{h-2},s_h) & A(s_{h-2},t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_{h-1},s_{h-1}) & A(s_{h-1},s_h) & A(s_{h-1},t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_h,s_{h-1}) & A(s_h,s_h) & A(s_h,t) \\ A(s,s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h .$$

§ 4. Man sieht jetzt ein, wie man schrittweise Γ_h aufbaut aus den Gliedern der Reihe $A_h + A_{h-1} d_1 + \dots + A_0 d_h$. Der Vollständigkeit des Beweises wegen aber wollen wir durch „vollständige Induction" die Richtigkeit des allgemeinen Schrittes darthun. Sei also die Summe S_n bereits aufgebaut:

$$S_n = \frac{1}{n!}\int \begin{vmatrix} 0 & A(s_1,s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A(s_2,s_3) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A(s_{h-n-1},s_{h-n}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_{h-n},s_{h-n+1}) & \dots & A(s_{h-n},t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_h,s_{h-n+1}) & \dots & A(s_h,t) \\ A(s,s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h .$$

10)

Dann addieren wir hinzu

$$A_{h-n-1} d_{n+1} =$$

$$(-1)^{h-n-1} \int_{(h-n-1)} \begin{vmatrix} A(s,s_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(s_1,s_2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A(s_{h-n-2},s_{h-n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_{h-n-1},t) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_{h-n-1} \times$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \int_{(n+1)} \begin{vmatrix} A(s_{h-n},s_{h-n}) & A(s_{h-n},s_{h-n+1}) & \dots & A(s_{h-n},s_h) \\ A(s_{h-n+1},s_{h-n}) & A(s_{h-n+1},s_{h-n+1}) & \dots & A(s_{h-n+1},s_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(s_h,s_{h-n}) & A(s_h,s_{h-n+1}) & \dots & A(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_{h-n} ds_{h-n+1} \dots ds_h .$$

Digitized by Google

Denken wir dies nun in eine Determinante zusammengezogen, indem wir die zweite unter und neben dem letzten Element des Hauptdiagonals der ersten, d. h. als $(h-n+1)^{te}$ bis $(h+1)^{te}$ Zeilen und Reihen schreiben, und die übrigen Stellen mit Nullen ausfüllen. Wir wollen aber dies $A_{h-n-1}\,d_{n+1}$ in der Form haben

$$A_{h-n-1}\,d_{n+1} =$$

11)
$$\frac{1}{(n+1)!}\int \begin{vmatrix} 0 & A(s_1,s_2) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(s_2,s_3) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A(s_{h-n-2},s_{h-n-1}) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_{h-n-1},t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_{h-n},s_{h-n}) & \dots & A(s_{h-n},s_h) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A(s_h,s_{h-n}) & \dots & A(s_h,s_h) & 0 \\ A(s,s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} ds_1\,ds_1 \dots ds_h .$$

wo die Elemente geordnet sind wie in Γ_h. Um diese Anordnung zu bekommen mußten wir

1) die $(h-n)^{te}$ Reihe zur $(h+1)^{ten}$ machen;

$$h+1-(h-n) = n+1 \quad \text{Zeichenwechsel} -$$

2) die 1te Zeile zur letzten, $(h+1)^{ten}$, machen;

$$h+1-1 = h \quad \text{Zeichenwechsel.}$$

Im ganzen also haben wir die Determinante mit $(-1)^{h+n+1}$ multipliciert. Da aber das Vorzeichen schon $(-1)^{h-n-1}$ war, so ist es $+$ geworden, und die Richtigkeit der Formel (1) ist erkannt.

Nun wollen wir $S_n + A_{h-n+1}\,d_{n+1}$ bilden, und zeigen, daß dies genau die Form von s_n hat wo wir überall $n+1$ statt n haben. Dazu bemerken wir, daß die Integrande in S_n und $A_{h-n-1}\,d_{n+1}$ bis auf eine gewisse Unterdeterminante $(n+1)^{ter}$ Ordnung und den Factor $\frac{1}{n+1}$, gleich sind:

Integrand $S_n = f(s, s_1 \dots s_{h-n-1}) \times$

12)
$$\begin{vmatrix} A(s_{h-n-1},s_{h-n}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(s_{h-n},s_{h-n+1}) & \dots & A(s_{h-n},t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A(s_h,s_{h-n+1}) & \dots & A(s_h,t) \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Integrand $A_{h-n-1} d_{n+1} =$

$$\frac{1}{(n+1)} f(s, s_1 \ldots s_{h-n-1}) \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & , A(s_{h-n-1}, t) \\ A(s_{h-n}, s_{h-n}) & \ldots & A(s_{h-n}, s_h), & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A(s_h, s_{h-n}) & \ldots & A(s_h, s_h) & , 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} f(s, s_1 \ldots s_{h-n-1}) \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & , A(s_{h-n-1}, t) \\ A(s_{h-n}, s_{h-n}) & \ldots & A(s_{h-n}, s_h), & A(s_{h-n}, t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A(s_h, s_{h-n}) & \ldots & A(s_h, s_h & , A(s_h, t) \end{vmatrix} \quad 13)$$

Wie in dem Falle $n = 1$ wollen wir die zwei Determinanten, die in (12) und (13) vorkommen, so addieren, daß die entstehende Determinante lauter von null verschiedene Elemente besitzt und, daß die Determinante in (12) den Factor $\frac{1}{n+1}$ erhält. Wir ersetzen daher die erste Reihe dieser Determinante mit

$$\begin{cases} A(s_{h-n-1}, s_{h-n}) \\ A(s_{h-n}, s_{h-n}) \\ \ldots \\ A(s_h, s_{h-n}) \end{cases}$$

wobei wir ihren Werth nicht ändern. Wollen wir aber die erste Zeile $A(s_{h-n-1}, s_{h-n}), 0, \ldots 0, 0$ durch $A(s_{h-n-1}, s_{h-n}), A(s_{h-n-1}, s_{h-n+1}) \ldots A(s_{h-n-1}, s_h), 0$ ersetzen, so wird der Werth der Determinante mit $(n+1)$ multipliciert. Denn die Determinante (12) ist von der $(n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Also haben wir $(n+2)-2$ Elemente, die Null waren, durch von null verschiedene Elemente ersetzt, d. h. wir haben n-Determinanten vom folgenden Typus addiert:

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & , A(s_{h-n-1}, s_{h-n+m}), & 0 & \ldots & 0 \\ A(s_{h-n}, s_{h-n}) & \ldots & A(s_{h-n}, s_{h-n+m-1}), & 0 & , A(s_{h-n}, s_{h-n+m+1}) & \ldots & A(s_{h-n}\ t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & , \ldots & \ldots & \ldots \\ A(s_h, s_{h-n}) & \ldots & A(s_h, s_{h-n+m-1}), & 0 & , A(s_h, s_{h-n+m+1}) & \ldots & A(s_h, t) \end{vmatrix}$$

Wenn man nun beachtet, daß die $s_{h-n} \ldots s_h$ Integrationsveränderliche sind, die nicht in $f(s, s_1 \ldots s_{h-n-1})$ vorkommen, so sieht man, daß diese Determinante der ursprünglichen genau aequivalent ist, denn man braucht nur die erste Reihe mit der $(m+1)^{\text{ten}}$ zu ver-

Digitized by Google

tauschen, s_{h-n+m} und s_{h-n} zu vertauschen, und die zweite Zeile mit der $(m+2)^{\text{ten}}$, um vollständige Uebereinstimmung zu haben. Es ist also geworden

$$\text{Integrand } s_n = \frac{1}{(n+1)} f(s, s_1 \dots s_{h-n+1}) \times$$

14)
$$\begin{vmatrix} A(s_{h-n-1}, s_{h-n}), & A(s_{h-n-n}, s_{h-n+1}) & \dots. & A(s_{h-n-1}, s_h), & 0 \\ A(s_{h-n}, s_{h-n}), & A(s_{h-n}, s_{h-n+1}) & \dots. & A(s_{h-n}, s_h), & A(s_{h-n}, t) \\ \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots \\ A(s_h, s_{h-n}), & A(s_h, s_{h-n+1}) & \dots. & A(s_h, s_h), & A(s_h, t) \end{vmatrix}.$$

Wir können nun die Formeln (13) und (14) addieren und integrieren:

$$S_n + A_{h-n-1} d_{n+1} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\int \begin{vmatrix} 0, A(s_1,s_2), 0 & \dots. & 0, 0 & \dots. & 0 \\ 0, 0, A(s_2,s_3). & \dots & 0, 0 & \dots. & 0 \\ \dots \dots \dots & \dots. & \dots \dots & \dots. & \dots \\ 0, 0, 0 & \dots. & A(s_{h-n-2}, s_{h-n-1}), 0 & \dots. & 0 \\ 0, 0, 0 & \dots. & 0, A(s_{h-n-1}, s_{h-n}) & \dots. & A(s_{h-n-1}, t) \\ \dots \dots \dots & \dots. & \dots \dots & \dots. & \dots \\ 0, 0, 0 & \dots. & 0, A(s_h, s_{h-n}) & \dots. & A(s_h, t) \\ A(s,s_1), 0, 0 & \dots. & 0, 0 & \dots. & 0 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h.$$

Da dieser Ausdruck aus S_n durch Vertauschung von n mit $n+1$ erwächst, so ergiebt sich

$$S_n + A_{h-(n+1)} d_{n+1} = S_{n+1},$$

die zu beweisende Recursionsformel.

§ 4. Um den Beweis vollständig zu Ende zu bringen, setzen wir in S_n, $n = h-1$. Alsdann erhalten wir

$$S_{h-1} = A_h + A_{h-1} d_1 \dots A_1 d_{h-1} =$$

15)
$$\frac{1}{(h+1)!}\int \begin{vmatrix} 0, A(s_1,s_2), A(s_1,s_2) & \dots. & A(s_1,s_h), A(s_1,t) \\ 0, A(s_2,s_2), A(s_2,s_2) & \dots. & A(s_2,s_h), A(s_2,t) \\ \dots \dots \dots & \dots. & \dots \dots \\ 0, A(s_h,s_2), A(s_h,s_2) & \dots. & A(s_h,s_h), A(s_h,t) \\ A(s,s_1), 0, 0 & \dots. & 0, 0 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_h.$$

Digitized by Google

Hierzu wollen wir addieren:

$$\mathrm{A}_0 d_h =$$

$$16) \quad \frac{1}{h!}\int \begin{vmatrix} A(s_1,s_1), A(s_1,s_2) \ldots A(s_1,s_h), & 0 \\ A(s_2,s_1), A(s_2,s_2) \ldots A(s_2,s_h), & 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ A(s_h,s_1), A(s_h,s_2) \ldots A(s_h,s_h), & 0 \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & , A(s,t) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_h .$$

Zu diesem Zwecke schreiben wir die geeigneten Elemente in die erste Reihe der ersten Determinante, und in die letzte Reihe der zweiten Determinante. Dies ändert die Werthe beider nicht. Wollen wir aber die letzte Zeile der ersten Determinante durch

$$A(s,s_1),\ A(s,s_2) \ldots A(s,s_h), 0$$

ersetzen, so müssen wir beachten, daß wir dabei den Werth des Integrals mit h multiplicieren, denn die so hinzugefügte Determinanten sind, nach der Integration, der ursprünglichen genau gleich, denn sie unterscheiden sich von ihr nur durch die Benennung der Integrationsveränderlichen. Alsdann können wir die veränderten Determinanten in (15) und (16) addieren, indem wir ihre letzten beiden Zeilen addieren. Es kommt dabei heraus

$$\mathrm{A}_h + \mathrm{A}_{h-1} d_1 + \cdots \mathrm{A}_0 d_h =$$

$$\frac{1}{h!}\int \begin{vmatrix} A(s_1,s_1), A(s_1,s_2) \ldots A(s_1,s_h), A(s_1,t) \\ A(s_2,s_1), A(s_2,s_2) \ldots A(s_2,s_h), A(s_2,t) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ A(s_h,s_1), A(s_h,s_2) \ldots A(s_h,s_h), A(s_h,t) \\ A(s,s_1), A(s,s_2) \ldots A(s,s_h), A(s,t) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_h$$

$\equiv \Gamma_h$ wie wir zeigen wollten.

---

§ 5.

Eine nützliche Anwendung des Vorgehenden bezieht sich auf den Fall wo $A(s,t)$ eine logarithmische Unstetigkeit längs der Linie $s = t$ hat, also die Form hat: $A(s,t) = \log|s-t| +$ stetige Function von s und t. Hier verlieren die Formeln (2) und (3) für die Coefficienten des Γ- und s-Reihen ihren Sinn, weil in den

Digitized by Google

Hauptdiagonalgliedern die Argumenten von $A(s,t)$ gleich sind. Diese Unannehmlichkeit kann man vermeiden, wie durch einfache functionstheoretische Ueberlegungen gezeigt wird, indem man eine neue A-Function definiert:

$$A^*(s,t) = A(s,t) \text{ für } t = s$$
$$A(s,s) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

und die Γ- und δ-Reihen gerade wie vorher bildet. Bezeichnen wir diese neue Functionen mit Γ^* und δ^*, so sind Γ^* und δ^* zwar von Γ und δ verschieden (z. B. δ^* fehlt das Glied in μ), der Quotient $\frac{\Gamma^*}{\delta^*}$ aber ist genau gleich dem Quotienten $\frac{\Gamma}{\delta}$. Dies folgt aus einer directen theoretischen Betrachtung der Functionalgleichung und ihrer Lösung: es ist aber auch eine Folge der eben bewiesenen formalen Identität dieses Quotienten mit der Neumannschen Reihe, deren h-ter Coefficient gegeben ist durch

$$A_h = (-1)^h \int_{(h)}^{0} A(s,s_1)\,A(s_1,s_2) \ldots A(s_h,t)\,ds_1\,ds_2 \ldots ds_h,$$

denn dieser Ausdruck ist von $A(s,s)$ frei, und daher können wir für alle Betrachtungen, wo der Quotient allein in Betracht gezogen wird, $\frac{\Gamma}{\delta}$ durch $\frac{\Gamma^*}{\delta^*}$ ersetzen.

Lassen wir jetzt die Voraussetzung, daß $A(s,t)$ endlich sei, wieder in Kraft treten, und wollen wir wieder die Elemente $A(s,s)$ in den Determinanten durch Null ersetzen, so ist es unentbehrlich zu wissen, daß die Nullstellen von $\delta^*(\mu)$ dieselben sind wie die von $\delta(\mu)$. Daß dies der Fall ist, sieht man folgendermaßen ein. Für jede Nullstelle von $\delta(\mu)$ hat $\frac{\Gamma(\mu)}{\delta(\mu)}$ einen Pol, denn ist μ_s eine Wurzel von $\Gamma(\mu) = 0$ von der Ordnung $\underline{m}$, so ist sie eine Wurzel von $\delta(\mu) = 0$ von der Ordnung $\underline{m+1}$ mindestens. Also hat auch $\frac{\Gamma^*(\mu)}{\delta^*(\mu)}, \equiv \frac{\Gamma(\mu)}{\delta(\mu)}$ einen Pol für eine Wurzel von $\delta(\mu)$. Da aber $\Gamma^*(\mu)$ eine ganze transcendente Function von μ ist, so muß hier $\delta^*(\mu)$ eine Nullstelle haben. Auf demselben Wege schließt man, daß alle Nullstellen von $\delta^*(\mu)$ auch Nullstellen von $\delta(\mu)$ sind, daß also die Nullstellen von beiden Functionen übereinstimmen.

Neuerdings hat Herr Haskins gezeigt, dass der Factor, der δ^* von δ (bezw. Γ^* von Γ) unterscheidet gleich $e^{\mu\int_0^1 A(s,s)ds}$ ist. Dies ist ihm gelungen indem er auf die Reihe

Digitized by Google

$$\delta(\mu)A + d_1\mu + d_2\mu^2 + \cdots$$

(bezw. $$\Gamma(\mu) = \Gamma_0 + \Gamma_1\mu + \Gamma_2\mu^2 + \cdots)$$

einen bekannten Determinantensatz anwandte (Cf. z. B. Burnside and Panton: Theory of Equations, 3 Ed., S. 264) und der Thatsache Gebrauch machte, dass die Integrationsveränderlichen $s_1, s_2 \ldots s_h$ gewisse Vertauschungen zuliessen, wie wir es in dem Vorhergehenden gesehen haben. Dann erschien $\delta(\mu)$ als Product der Exponentialreihe für $e^{\mu\int_0^1 A(s,s)ds}$ und der Reihe für $\delta^*(\mu)$.

Digitized by Google

Ueber die Minimaleigenschaft der Kugel.

Von

J. O. Müller in Göttingen.

Mit 1 Figur im Text.

Vorgelegt durch Herrn Hilbert in der Sitzung am 8. März 1902.

Um den Satz zu beweisen, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens, sind bisher zwei Wege eingeschlagen worden:

Herr H. A. Schwarz[1]) löst die Aufgabe auf in zwei Aufgaben, indem er zunächst zeigt, daß die Oberfläche eines Rotationskörpers von gegebenem Volumen stets kleiner ist als die Oberfläche eines anderen Körpers von demselben Volumen und sodann den Nachweis führt, daß unter allen Rotationskörpern desselben Volumens wiederum die Kugel derjenige der kleinsten Oberfläche ist.

Herr H. Minkowski[2]) gelangt dagegen zu seinem Beweise durch Anwendung gewisser von ihm für convexe Polyeder bewiesener Sätze.

In ihren Voraussetzungen unterscheiden sich diese beiden Beweise sehr wesentlich darin, daß Herr Schwarz, ohne seinen mit der Kugel zu vergleichenden Flächen irgendwelche gestaltliche Einschränkungen aufzuerlegen, voraussetzt, daß sie eine sich stetig ändernde Tangentialebene haben, während Herr Min-

1) H. A. Schwarz, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1884, p. 1: Gesammelte mathematische Abhandlungen II, p. 327.

2) H. Minkowski, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1897, p. 209: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IX, p. 115.

Digitized by Google

kowski lediglich convexe Flächen betrachtet und dabei völlig von der Existenz einer Tangentialebene absieht.

Obgleich nun offenbar das in Rede stehende Problem — wenigstens für Flächen mit stetig variierender Tangentialebene — ein Problem der relativen Maxima und Minima von Doppelintegralen ist, hat man es doch noch nicht als ein solches angegriffen. Denn wenn auch der zweite Teil des Schwarz'schen Beweises im Wesentlichen mit der Variationsrechnung geführt ist, so genügen doch, da es sich hierbei nur um Rotationsflächen handelt, schon die Sätze aus der Variationsrechnung der einfachen Integrale.

Auf Veranlassung des Herrn D. Hilbert habe ich daher in meiner Inauguraldissertation versucht, den genannten Kugelsatz direkt, d. h. ohne Zwischenschiebung der Rotationsflächen, aus den allgemeinen Principien der Variationsrechnung heraus zu beweisen. Da es mir nicht gelang, die Rechnungen des Herrn G. Kobb[1]) für das vorliegende Problem zu verwerten, sah ich mich genötigt, selbst eine allgemeine Theorie der isoperimetrischen Probleme bei Doppelintegralen auszuarbeiten unter beständiger Berücksichtigung ihrer sofortigen Anwendbarkeit auf das Kugelproblem. Durch Uebertragung der von Herrn D. Hilbert[2]) in der Theorie der absoluten Maxima und Minima von einfachen und Doppelintegralen gegebenen Darstellung des Weierstraß'schen Kriteriums auf das isoperimetrische Problem bei Doppelintegralen gelangte ich in der That zu einer allgemeinen Theorie dieser Aufgaben, die sich ohne Weiteres auf das specielle Problem der Kugel anwenden läßt. Dabei benutze ich, der größeren Anschaulichkeit halber, an Stelle der allgemeinen Gauß'schen Coordinaten räumliche Polarcoordinaten, woraus sich eine durchaus nicht in der Natur des Beweises liegende Einschränkung auf von einem Punkte aus convexe Flächen ergiebt, die ich bei Darstellung der allgemeinen Theorie der isoperimetrischen Probleme von Doppelintegralen fallen zu lassen gedenke.

Ich will nun im Folgenden kurz den Gedankengang meines Beweises darlegen, ohne alle einzelnen Behauptungen selbst zu rechtfertigen, wofür ich vielmehr auf meine Dissertation und eine, demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende, umfassendere Untersuchung verweise.

---

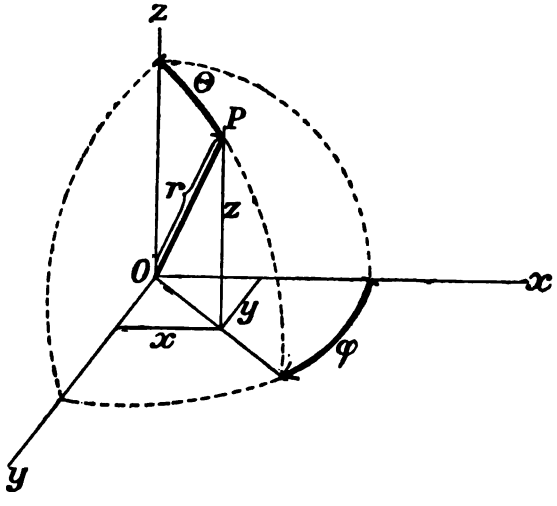
1) G. Kobb, Acta mathematica XVII, p. 321—343.

2) D. Hilbert, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1900, p. 292—294.

Digitized by Google

1.

Die Hauptschwierigkeit für den Beweis lag in der Verallgemeinerung der bei isoperimetrischen Problemen einfacher Integrale [1]) auftretenden sogenannten „Weierstraß'schen Construction" auf Doppelintegrale, welche ich hier zunächst auseinandersetzen möchte.



Es bezeichne F eine ganz im Endlichen gelegene, geschlossene und singularitätenfreie Fläche, die das Volumen $\frac{4}{3}\pi$ einschließt und durch eine Gleichung der Form:

$$r = r(\theta, \varphi)$$

darstellbar ist, wo r, θ, φ die räumlichen Polarcoordinaten sind und $r(\theta, \varphi)$ eine Function von θ und φ ist, welche auch noch stetige erste Ableitungen nach θ und φ besitzt. Ferner möge die Fläche F die positive z-Axe in der Entfernung 1 vom Anfangspunkte normal durchstoßen. Es liegt nach dieser Darstellung der Anfangspunkt 0 des Coordinatensystems im Innern der Fläche, und die z-Axe schneidet, wie jede andere durch 0 gelegte Gerade, die Fläche F — welche ich Vergleichsfläche nenne — in zwei und nur in zwei Punkten. Zur Construction des Feldes benutzen wir die Kugeln, deren Mittelpunkte alle auf der z-Axe liegen. $[c, \mu]$ bezeichne dann die Kugel vom Radius μ, deren Mittelpunkt den Abstand c

1) Vergl. A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung § 36.

Digitized by Google

von 0 hat, wobei c positiv zu rechnen ist, wenn der Mittelpunkt auf der positiven, negativ wenn er auf der negativen Seite der z-Axe liegt.

An jeder den obigen Bedingungen genügenden Vergleichsfläche F nehme ich nun die folgende Construction vor. Ich lasse die Schnittcurve C_φ jeder durch die z-Axe gelegten Ebene $\varphi =$ const mit der Fläche F um die z-Axe rotieren und führe an der so erhaltenen Rotationsfläche F_φ die von Herrn Schwarz in § 4 seiner oben citierten Abhandlung als möglich nachgewiesene Weierstraß'sche Construction aus, d. h. ich construiere über dem zu jeder Coordinate θ gehörigen Parallelkreise $P_\varphi^{(\theta)}$ von F_φ denjenigen nach der Seite wachsender z hin geschlossenen Abschnitt der Kugel $[c, \mu]$, dessen Volumen $\mathfrak{V}_\varphi^{(\theta)}$ gleich dem Volumen des durch den Parallelkreis $P_\varphi^{(\theta)}$ nach der Richtung abnehmender z hin begrenzten Teiles unserer Rotationsfläche F_φ ist. Dadurch ist jedem Punkte einer jeden Vergleichsfläche F eine der ∞^3-Kugeln $[c, \mu]$ zugeordnet.

Bezeichnet dann ω den Winkel, welchen in jedem Punkte der Fläche F die Flächennormale mit der Normale der diesem Punkte nach der angegebenen Construction zugeordneten Kugel $[c, \mu]$ in diesem Punkte bildet und ferner $\overline{\overline{\mu}}$ den Radius der dem Schnittpunkte von F mit der negativen z-Axe in der Ebene $\varphi = \varphi$ zugehörigen Kugel, so gilt für jede unsern Voraussetzungen genügende Vergleichsfläche F die Identität:

$$\text{(I)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \int_F \cos\omega \, d\sigma = 8\pi - 2\int_0^{2\pi} \overline{\overline{\mu}}^2 d\varphi,$$

wo das Integral links über die ganze Fläche F zu erstrecken ist.

2.

Diese letzte Behauptung beweise ich folgendermaßen:

Jedem Punkte unserer Vergleichsfläche F ist nach unserer Construction ein gewisser Winkel ω zugeordnet, der durch die Fläche F und unser Kugelfeld $[c, \mu]$ völlig bestimmt ist, und dessen Cosinus sich leicht als Function der beiden dem betrachteten Punkte von F zugehörigen Flächenelemente $(r, \theta, \varphi, r_\theta, r_\varphi)$ und $(r, \theta, \varphi, p, q)$, der Fläche F und der zugehörigen Kugel $[c, \mu]$ ausdrücken läßt. Durch Einführung dieses Ausdrucks für $\cos\omega$ in

Digitized by Google

$$J = \int_F \cos\omega \, d\sigma + 2\int_0^{2\pi} \bar{\bar{\mu}}^2 d\varphi - 4\pi$$

nimmt dieses die Form eines über die Fläche F erstreckten Oberflächenintegrals an; es wird nämlich:

$$J = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (A + Br_\theta + \Gamma v_\theta)\, d\varphi\, d\theta,$$

wo v das von der oben eingeführten Rotationsfläche F_φ und dem Kreiskegel $\vartheta = \theta$ eingeschlossene Volumen und A, B, Γ gewisse Functionen ven θ, r, v bedeuten. Die Art und Weise, wie wir die Kugeln $[c, \mu]$ den Punkten von F zugeordnet haben, macht nun zunächst p und q und dadurch auch A, B, Γ genau zu solchen Functionen in θ, r, v, daß J unabhängig von der Integrationsfläche F wird.

Dieses Resultat ist die Verallgemeinerung des von Herrn D. Hilbert in der Theorie der absoluten Maxima und Minima aufgestellten Unabhängigkeitssatzes.

Durch specielle Wahl der Integrationsfläche F bestimmt sich sodann leicht der Wert von J als 4π, womit unsere Gleichung (I) bewiesen ist.

3.

Von der Gleichung (I) ausgehend, beweist man nunmehr den in Frage stehenden Kugelsatz folgendermaßen.

Zunächst drückt sich das vorgeschriebene Gesammtvolumen

$$V = \tfrac{4}{3}\pi$$

der Vergleichsfläche F durch $\bar{\bar{\mu}}$ in der Form

$$V = \tfrac{4}{3}\pi = \tfrac{2}{3}\int_0^{2\pi} \bar{\bar{\mu}}^3 \, d\varphi$$

aus, und die Theorie der isoperimetrischen Probleme einfacher Integrale ergiebt dann leicht, daß für alle diese Gleichung befriedigenden $\bar{\bar{\mu}}$

$$\text{(II)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2\int_0^{2\pi} \bar{\bar{\mu}}^2 d\varphi \leqq 4\pi$$

ist. Zusammen mit der Gleichung (I) liefert diese Ungleichung (II) somit:

$$\text{(III)} \quad S = \int_F d\sigma \geqq \int_F \cos\omega \, d\sigma = 8\pi - 2\int_0^{2\pi} \bar{\bar{\mu}}^2 \, d\varphi \geqq 4\pi,$$

Digitized by Google

worin S offenbar die Gesammtoberfläche der Vergleichsfläche F bezeichnet. Dabei gilt das Gleichheitszeichen in der ersten Ungleichung (III) nur für den Fall, daß auf der ganzen Vergleichsfläche überall ω verschwindet, ein Fall, der, wie ich weiterhin zeige, nur eintreten kann, wenn F genau die Kugel vom Radius 1 ist.

Hiermit ist aber der gewünschte Beweis erbracht.

Digitized by Google

Polarlicht-Beobachtungen in Göttingen.

Von

E. Wiechert.

Vorgelegt durch W. Voigt in der Sitzung vom 8. März 1902.

Mit Unterstützung der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen unternahm ich es schon vor einigen Jahren, von Göttingen aus das Polarlicht zu beobachten, bei der Ungunst der äußeren Verhältnisse leider ohne Erfolg. Der beständig vorhandene leichte Dunst, welcher theils von dem Getriebe der Stadt herrührt und theils durch die Thallage Göttingens bedingt ist, wird von den Gasglühlichtlampen der Straßen und des Bahnhofes so hell erleuchtet, daß zarte Erscheinungen am nächtlichen Himmel unterdrückt werden. So mußte denn die Hoffnung auf den Neubau der geophysikalischen Warte auf dem Hainberge außerhalb Göttingens gerichtet werden. Das Hauptgebäude derselben mit der für die Beobachtungen sehr geeigneten Plattform konnte im Herbst vorigen Jahres bezogen werden.

Ich hegte die Ansicht, daß das Polarlicht in unseren Breiten eine viel häufigere Erscheinung sei, als gewöhnlich angenommen wird, indem nur die besonders auffälligen Phänome bei den mannigfachen Störungen genügend hervortreten. So ließ ich zur Erzielung einer einfachen und sicheren Beobachtungsmethode ein Spektroskop von ungewöhnlicher Lichtstärke und in geeigneter Montirung durch die hiesige Firma Voigt und Hochgesang (Inhaber R. Brunnée) anfertigen. Spaltrohr und Fernrohr haben Linsen (von Steinheil, München) von 27 mm Oeffnung und 108 mm Brennweite; eine Linse vor dem Spalt ermöglicht es, jede Stelle des Himmels für sich zu untersuchen. Anfänglich wurde ein einfaches Flintglasprisma mit 60° brechendem Winkel,

Digitized by Google

50 mm Seitenlänge und 35 mm Höhe, später ein Rutherford-Prisma (von Zeiss, Jena) mit entsprechender Oeffnung benutzt. Die Dispersion des ersteren beträgt zwischen C und F 1° 35′, die des zweiten in denselben Grenzen 5° 27′, also etwa $3^1/_2$mal soviel. Für das erstere erwies sich eine 8fache, für das letztere eine 4fache Fernrohrvergrößerung als zweckentsprechend. Das Rutherfordprisma löst dann die D-Linien noch sehr gut auf und ermöglicht bei einem Okularkreis von ca. 7 mm eine volle Ausnutzung der Lichtaufnahmefähigkeit des Auges.

Beobachtungen im November 1901.

Den ersten sternklaren Abend, an welchem das Instrument verwendet werden konnte, bot der 1. November vorigen Jahres, und ich hatte die Freude, mit dem ersten Blick nach dem Nordhimmel die Polarlichtlinie sehr deutlich zu sehen. Sie konnte dann auch am Osthimmel konstatiert werden; nach Westen zu störte das Licht der Stadt. An allen folgenden klaren und Mondlicht-freien Abenden des November: am 2., 3., 5., 7., 9., war die Polarlichtlinie stets in gleicher Weise mehr oder minder deutlich sichtbar, sodaß ich auf die Vermuthung kam, sie sei eine beständige Erscheinung. Dies erwies sich aber später als hinfällig, da ich die Linie einige Male selbst mit dem viel wirkungsvolleren Rutherford-Prisma nicht entdecken konnte.

Beobachtungen im Dezember 1901 und Januar 1902.

Für die letztere Bemerkung boten die 5 für die Beobachtungen geeigneten Abende des Dezember und Januar Belege. — Am 31. Januar wurde das Rutherford-Prisma zum ersten Male angewendet.

Beobachtungen im Februar und Anfang März 1902.

Weiterhin hatte ich bis heute noch Beobachtungs-Abende am 1., 4., 5., 9., 25., 26., 28. Februar, sowie am 2. und 3. März. An den Tagen in der ersten Hälfte des Februar gelang es mir nicht, die Polarlichtlinie mit einiger Sicherheit festzustellen, an sämmtlichen späteren Abenden aber trat sie mit sehr großer Intensität auf. Am Osthimmel erschien sie fast ebenso hell oder gar heller als am Nordhimmel und im Süden ließ sie sich in einiger Höhe stets beobachten. Am 28. Februar und am 3. März war sie mit Ausnahme eines kleinen Bereiches in dem hellsten Lampenschein über dem mittleren Theile von Göttingen am ganzen Firmament zu sehen, selbst im Zenith und am Horizont im Süden.

Digitized by Google

Am 2. und eine zeitlang am 3. März war der Himmel fast völlig bedeckt. Die Polarlichtlinie zeigte sich dabei in allen Wolkenlücken und hin und wieder sogar durch leichte Wolkenschleier hindurch. Am 3. März konnte sie im kontinuirlichen Spektrum des hellen Nebels über dem nördlichen Theile der Stadt bis zum Horizonte herab beobachtet werden.

Das freie Auge sah in allen den beschriebenen Fällen nur eine geringe Erhellung des Himmels, welche diejenige der Milchstraße in der Regel durchaus nicht erreichte und nur einmal, am 3. März, vielleicht in den ersten Abendstunden im Norden und Osten etwas übertraf. Die größte Helligkeit zeigte sich in 15° bis 18° Höhe, in 45° Höhe war sie nur noch sehr gering. Stets war die Erscheinung ganz diffus, ohne irgend welche hervortretende Grenzen.

Faßt man alles zusammen, so wird man schließen können, daß die Erde in unseren Breiten an sehr vielen Abenden auf weiten Gebieten mit einer in Polarlicht leuchtenden Schicht überdeckt ist. Wollte man als deren untere Grenze eine Höhe von 40 Kilometer annehmen, so würde nach der Beobachtung am Südhorizont folgen, daß die Schicht sich zuweilen mindestens bis zu 45° Breite erstreckt und noch in 38° Breite, d. h. noch im Süden Italiens sichtbar sein müßte.

Ueber den Zusammenhang mit den magnetischen Variationen möchte ich vorläufig specielle Angaben vermeiden.

Göttingen, den 4. März 1902.

Digitized by Google

Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis Situs.

Von

A. Schoenflies.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 8. März 1902.

1. Nach einem von Herrn C. Jordan[1]) bewiesenen Satz liefern zwei im Intervall $t_0 \ldots t_1$ stetige Functionen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

die bis auf das Wertepaar xy, das den Werten t_0 und t_1 zugleich entspricht, umkehrbar eindeutig sind, eine einfach zusammenhängende geschlossene „Curve"; sie teilt — und hierin besteht der Hauptinhalt des Satzes — die Ebene so in zwei Gebiete, ein Inneres und ein Aeußeres, daß zwei innere oder zwei äußere Punkte durch einen Linienzug verbunden werden können, der die Curve nicht trifft, während dies für einen äußeren und einen inneren Punkt nicht der Fall ist.

Es entsteht die Frage, ob und inwieweit der Jordansche Satz umkehrbar ist, d. h. wann eine perfecte Menge, die die Ebene in ein Inneres und Aeußeres teilt, durch zwei derartige Functionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ darstellbar ist. Dies haftet nur an einer Bedingung, die eine unmittelbare Folge des Jordanschen Beweises ist. Dieser Beweis approximirt nämlich die Curve durch zwei Reihen von Polygonen, die einander einschließen resp. ausschließen, und die Curve als gemeinsame Grenze haben. Jeder Curvenpunkt ist daher Grenzpunkt solcher Punkte, die auf diesen Polygonen liegen; er läßt sich daher als Endpunkt oder Grenzpunkt eines Streckenzuges ansehen, der ganz im innern oder ganz im äußeren Gebiet verläuft.

---

1) Cours d'analyse 2. Aufl. Bd. 1, p. 92.

Digitized by Google

Ein derartiger Streckenzug kann auch aus unzählig vielen Strecken bestehen; ist dies der Fall, so werden die Strecken zuletzt beliebig klein und haben überdies — und hierin besteht seine wesentliche Eigenschaft — den Curvenpunkt als ihren einzigen Grenzpunkt. Diese Eigenschaft erweist sich aber auch als hinreichend.

Bezeichnen wir also einen ganz aus inneren resp. äußeren Punkten bestehenden Streckenzug als inneren resp. äußeren Streckenzug, so besteht folgender Satz:

> Wenn eine perfecte ebene Menge P die ihr nicht zugehörigen Punkte der Ebene in zwei Gebiete zerlegt, ein Inneres und ein Aeußeres, so daß zwei Außenpunkte durch einen äußeren, zwei Innenpunkte durch einen inneren Streckenzug verbindbar sind, während jeder Punkt der Menge P von jedem Außenpunkt und jedem Innenpunkt aus durch einen äußeren oder inneren Streckenzug erreicht werden kann, dessen Endpunkt oder dessen einziger Grenzpunkt er ist[1]), so lassen sich ihre Punkte durch zwei stetige und eindeutige Functionen $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ in der Weise darstellen, daß jedem Wertepaar x, y nur ein Wert t im Intervall $t_0 \ldots t_1$ entspricht, mit Ausnahme der Werte t_0 und t_1, die demselben Punkt x, y entsprechen.

Ich bezeichne noch das Außengebiet durch $\mathfrak{A}$, das Innengebiet durch $\mathfrak{J}$, und die Punkte von P als Grenzpunkte von $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{J}$ oder auch als Curve. Die vorstehend benutzten Streckenzüge bezeichne ich auch als Wege.

2. Was die Voraussetzungen des Satzes betrifft, so sind sie jedenfalls in sich widerspruchslos. Ob und wie sie sich vielleicht reduciren lassen, soll hier nicht erörtert werden[2]). Ich bemerke jedoch beispielsweise, daß man von einem Innenweg, der zwei innere Punkte verbindet, zeigen kann, daß er stets aus einer endlichen Zahl von Strecken gebildet werden kann und das analoge gilt für zwei Außenpunkte. Was ferner die im Satz benutzten zu einem Curvenpunkt führenden Wege betrifft, die ihn als ihren einzigen Endpunkt oder Grenzpunkt besitzen, so scheinen sie mir wirklich die für den Beweis unumgängliche Grundlage zu bilden; sie dürfte sich kaum durch eine zweckmäßigere ersetzen lassen.

---

1) Dies ist z. B. bei der Curve $y = \sin \frac{1}{x}$, falls man ihr alle Grenzpunkte zurechnet, für die auf der y-Axe liegenden Punkte nicht der Fall. Auch daraus wird die Notwendigkeit dieser Bedingung ersichtlich.

2) Eine ausführliche Darstellung werde ich demnächst an andrer Stelle geben.

Digitized by Google

Die Voraussetzungen, auf denen der Satz sonst beruht, sind in erster Linie die allgemeinen grundlegenden Eigenschaften eines ebenen Polygons, nämlich diejenigen, die die Teilung der Ebene durch das Polygon in ein Aeußeres und Inneres betreffen. Dem trägt auch die Beweismethode Rechnung, indem sie diese Eigenschaften zunächst auf Fälle ausdehnt, in denen die Seitenzahl des Polygons über alle Grenzen wächst. Zieht man insbesondere von einem Punkt m aus nach demselben Punkt m' zwei aus unendlich vielen Strecken bestehende Wege, die m' als einzigen Grenzpunkt besitzen, aber außer m und m' keinen Punkt gemein haben, so läßt sich zeigen, daß auch sie die Ebene in ein Inneres und Aeußeres teilen, wie das Polygon selbst. Hieraus folgert man dann weiter, daß wenn m ein Innenpunkt der Curve ist, und von ihm aus nach einem Curvenpunkte p zwei verschiedene sich nirgends kreuzende Wege gezogen werden, im Innern des so bestimmten Gebietes kein weiterer Punkt der Curve liegen kann. Dass man die Wege von m nach p so legen kann, daß sie sich nicht selber kreuzen, ist klar.

Abgesehen von den vorstehenden Thatsachen stützt sich der Beweis auf einen allgemeinen Satz über perfecte Mengen, den ich in meinem „Bericht über die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“ bewiesen habe[1]), und dessen Ableitung ich hier kurz folgen lasse.

3. Sei die Menge P ganz in einem Rechteck $\mathfrak{R}$ enthalten, dessen Seitenrichtungen wir in der Folge als horizontal resp. vertikal bezeichnen. Wie ich a. a. O. gezeigt habe, kann man das gesamte innere Gebiet $\mathfrak{J}$ mit Rechtecken $\mathfrak{R}_i$, deren Seiten denen von $\mathfrak{R}$ parallel sind, so erfüllen, daß jedes $\mathfrak{R}_i$ im Innern nur Innenpunkte von $\mathfrak{J}$ enthält, während auf dem Rande Punkte von P liegen. Diese Rechtecke, die ich punktfreie Bereiche nenne, konstruirt man im vorliegenden Fall zweckmäßig folgendermaßen. Man wählt zunächst einen Innenpunkt m_1 beliebig und legt um ihn ein Quadrat, dessen Seiten man nach allen vier Richtungen sich so lange von m_1 entfernen läßt, bis sie mindestens einen Punkt von P enthalten. Eine Seite s dieses Rechtecks $\mathfrak{R}_1$ kann auch unendlich viele Punkte von P enthalten, die in jedem Fall eine abgeschlossene Menge Q bilden. Sie bestimmt auf s gewisse Intervalle, die keine Punkte von Q resp. P enthalten, und die man der Größe nach ordnen kann. Für jedes dieser Intervalle

1) Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. Bd. 8,2, S. 81.

Digitized by Google

wähle man nun seinen Halbirungspunkt als neuen Punkt m_i und construire zu ihm den Bereich $\mathfrak{R}_i$. Fährt man auf diese Weise unbegrenzt fort, so gelangt man zu einer abzählbaren Reihe von Bereichen, die man der Größe nach ordnen kann, so daß also jeder folgende nicht größer ist als der vorhergehende, und die in dieser Reihenfolge

$$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_\nu \ldots$$

sein mögen.

Wird in der eben genannten Weise nur eine endliche Zahl von Bereichen construirt, so werden sie von einem Linienzug L begrenzt, der ein Polygon darstellt, und dessen Seiten abwechselnd horizontal und vertical laufen. Allerdings braucht jetzt nicht auf jeder Seite l dieses Polygons ein Punkt von P zu liegen. Man sieht aber leicht, daß von zwei Seiten, die eine convexe Ecke bilden, jede einen Punkt von P enthält, und von zwei Seiten, die eine concave Ecke bilden, mindestens eine. Von diesem Linienzug L soll nun gezeigt werden, daß er bei Berücksichtigung einer hinlänglichen Zahl von Bereichen auf keiner Seite l ein von Punkten von P freies Intervall enthält, das größer als eine beliebig gegebene Strecke δ ist. Dies ist die wichtigste Eigenschaft, die zu beweisen ist. Für den Beweis beschränke ich mich an dieser Stelle auf die Annahme, daß auf den Seiten des Polygons L keine Strecken liegen, die ganz zur Menge P gehören. Die Mitberücksichtigung dieses Falles macht übrigens keinerlei Schwierigkeiten.

4. Um den bezüglichen Beweis zu führen, ist zu zeigen, daß es nicht unendlich viele Bereiche $\mathfrak{R}_i$ geben kann, auf denen eine punktfreie Strecke s liegt, die oberhalb einer beliebig gegebenen Größe δ bleibt. Wir dürfen uns auf solche Bereiche beschränken, in denen s auf der größeren Seite liegt, wir dürfen ferner annehmen, daß alle diese Bereiche so liegen, daß s auf der horizontalen Seite enthalten ist und überdies auf der oberen Seite. Unter diesen Bereichen giebt es dann, wie leicht zu sehen, unendlich viele, die sich gegen eine horizontale Gerade d verdichten und bei denen die Halbirungspunkte der Seiten s innerhalb eines beliebig schmalen verticalen Streifens liegen; diese Bereiche seien

$$\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, \ldots \mathfrak{R}'_\nu \ldots$$

Für die Lage solcher Bereiche giebt es nun an sich folgende Möglichkeiten.

Digitized by Google

Es könnte zunächst ein ν geben, so daß für alle Indices $\mu > \nu$ die Bereiche sich lückenlos an einander schließen. Dies ist aber, wie sich leicht zeigen läßt, mit Rücksicht auf die Constructionsart der Bereiche ausgeschlossen.

Giebt es kein ν dieser Art, so denken wir uns die Halbirungspunkte der Seiten s auf d projicirt und betrachten diejenige verticale Gerade g, die durch den Häufungspunkt G dieser Projectionspunkte geht. Diese Gerade enthält alsdann in jeder Nähe von G Abschnitte, die in keinem der Bereiche $\mathfrak{R}'_i$ liegen. Diese Abschnitte seien, in der Reihe, wie sie auf einanderfolgen,

$$e_1, e_2, e_3 \ldots e_\nu \ldots$$

Dann ist zu unterscheiden, ob die Curve P mit einer endlichen oder unendlichen Zahl dieser Intervalle Punkte gemein hat. Ist es nur für eine endliche Zahl der Fall, so werde λ so gewählt, daß alle Abschnitte e_μ für $\mu > \lambda$ von Punkten der Curve frei sind. Für jeden solchen Abschnitt e_μ gäbe es dann einen ihn einschließenden zu g parallelen Streifen, der ebenfalls von Punkten der Curve frei wäre; alsdann könnte man aber in hinreichender Nähe der Geraden d einen Bereich $\mathfrak{R}'_\nu$ so wählen, daß der zu seinem Mittelpunkt construirte Bereich bis an d heranreichte, was mit der befolgten Constructionsvorschrift der Bereiche im Widerspruch steht.

Es müßte demnach mindestens auf einer Seite von g die Breite der Streifen mit wachsendem ν so unter jede Grenze sinken, daß bei gegebenem ε für unendlich viele Werte $\mu > \nu$ mindestens auf einer Seite von g die Streifenbreite kleiner als ε ist. Alsdann ließen sich auf dieser Seite von g zwei zu g parallele Geraden g' und g'' ziehen, die, wie man leicht beweist, von unendlich vielen Curvenzügen getroffen werden und das gleiche gilt von jeder verticalen Geraden zwischen ihnen. Sind G' und G'' ihre Schnittpunkte mit d, so müßte demnach das ganze Stück $G'G''$ der Curve zugehören. Hieraus wäre dann weiter zu folgern, daß es einen zu $G'G''$ parallel laufenden Streifen von endlicher Breite und Länge geben müßte, der keine Punkte von P enthielte. Dies ist aber bei der eben gemachten Annahme über die Menge P ausgeschlossen.

Es bleibt endlich der Fall zu erledigen, daß unendlich viele Abschnitte e_ν von der Curve getroffen werden. Auch diese Annahme führt auf die Folgerung, daß ein ganzes Stück $G'G''$ von d der

Digitized by Google

Curve angehören müßte, was wiederum einen Widerspruch bedeutet.

5. Man denke sich jetzt zwei Reihen gegen Null abnehmender Größen

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 \ldots > \delta_\nu > \ldots \text{ und } \eta > \eta_1 > \eta_2 > \ldots > \eta_\nu > \ldots,$$

beispielsweise so, daß $\delta_{\iota+1}$ ein constanter Bruchteil von δ_ι ist. Ferner construire man ein Polygon L in der Weise, daß seinem Innern alle Bereiche $\mathfrak{R}_\iota$ angehören, deren Fläche größer als η ist, und daß auf jeder Seite von L das größte punktfreie Intervall kleiner als δ ist; gemäß No. 3 ist dann der Abstand von zwei consecutiven Curvenpunkten auf L kleiner als $\delta\sqrt{2}$. Unter ihnen kann man daher auch eine endliche Zahl von Punkten

$$p_1, p_2, \ldots p_N$$

so auswählen, daß für je zwei consecutive

$$\delta_1\sqrt{2} < p_\iota p_{\iota+1} < \delta\sqrt{2}$$

ist. Zu jedem dieser Punkte ziehe man von dem Punkt m_1 aus, der für die Construction der Bereiche $\mathfrak{R}_\iota$ der Ausgangspunkt war, einen inneren Weg, so daß diese Wege sich nirgends kreuzen und einen um m_1 gelegten Kreis k, der ganz innerhalb des Bereiches $\mathfrak{R}_1$ liegt, in N der Einfachheit halber gleiche Teile teilen. Man erhält dann auf dem Kreis N unter einander gleiche Bögen

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_N,$$

und analog auf dem Polygon L die ihnen entsprechenden Strecken oder Streckenzüge [1])

$$s_1, s_2, \ldots s_N.$$

Jede dieser Strecken s_ι behandelt man jetzt in derselben Weise weiter, indem man zu dem Mittelpunkt jedes ihrer punktfreien Intervalle den zugehörigen punktfreien Bereich construirt, bis einerseits alle Bereiche erschöpft sind, deren Fläche größer als η_1 ist, und andrerseits auf dem Polygonzug L_ι, der über s_ι entsteht, die größte punktfreie Strecke kleiner als δ_1 ist. Unter den Punkten dieses Polygonzuges, die zur Curve gehören, wählt man dann wieder N_ι consecutive so aus, daß ihre Entfernung zwischen $\delta_1\sqrt{2}$ und $\delta_2\sqrt{2}$ liegt, zieht von m_1 aus zu ihnen die zugehörigen

1) Gemäß No. 3 können auch Streckenzüge, die aus zwei benachbarten Strecken bestehen, von Curvenpunkten frei bleiben.

Digitized by Google

Wege, und zwar so, daß sie sich untereinander und mit den bereits vorhandenen nicht kreuzen, was möglich ist. Diese Wege zerlegen den Bogen σ_i von k in N_i Kreisbögen

$$\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots \sigma_{iN_i}, \ldots$$

die man wieder einander gleich annehmen kann, und ihnen entsprechen auf L_i die Strecken resp. Streckenzüge

$$s_{i1}, s_{i2}, s_{iN_i}.$$

In dieser Weise kann man fortfahren, dabei wird sich der Kreis allmählich überall dicht mit den Schnittpunkten der von m_1 ausgehenden Wege bedecken, und zugleich wird die Größe der in die Construction eingehenden Bereiche, sowie der Abstand zweier consecutiven Curvenpunkte, nach denen die Wege laufen, unter jede Grenze sinken.

Man weise jetzt den Schnittpunkten der Wege mit dem Kreise Werte eines Parameters t so zu, daß man das Intervall $t_0 \ldots t_1$ gleichmäßig stetig auf diese Schnittpunkte bezieht, und weise dieselben Werte auch den Curvenpunkten zu, nach denen die Wege hinlaufen. Wenn man nun noch zeigen kann, daß die Beziehung zwischen den sämtlichen Curvenpunkten und den sämtlichen Kreispunkten eineindeutig ist, so ist damit der Beweis unseres Satzes geliefert. Dies ist aber leicht zu machen. Ist nämlich p ein Curvenpunkt, so führt von ihm jedenfalls ein innerer Weg zu m_1, und dieser Weg definirt eine gewisse Folge von punktfreien Strecken, die er durchsetzt, nämlich

$$s_i, s_{i_2}, s_{i_3}, \ldots;$$

ihnen entsprechen die analogen Kreisbögen, die, wie man leicht sieht, gegen einen bestimmten Punkt des Kreises convergiren. Es ist aber weiter ersichtlich, daß zu p nur eine Folge punktfreier Strecken gehören kann, wenn man nämlich den Weg, was immer möglich, so einrichtet resp. reducirt, daß er in jeden Bereich $\mathfrak{R}_i$, den er durchsetzt nur einmal eintritt, resp. austritt. Gäbe es nämlich zwei, so müßten sie notwendig mindestens einen Curvenpunkt einschließen, was nicht angeht. Zu einem Curvenpunkt gehört daher auch nur ein Kreispunkt. Ebenso ist das umgekehrte der Fall. Denn jede Folge

$$\sigma_i, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3}, \ldots$$

bestimmt eine analoge Reihe von Strecken; diese besitzt jedenfalls mindestens einen Grenzpunkt, der wie leicht ersichtlich, Curven-

Digitized by Google

punkt ist und nunmehr folgt wieder, daß ihr auch nur ein einziger Curvenpunkt entsprechen kann. Ist nämlich p ein solcher, so führt von ihm ein Weg zu m_1, der nur p als Grenzpunkt besitzt, und da nun, wie wir eben sahen, zu p nur eine Folge punktfreier Strecken gehört, so muß der Weg notwendig dieselben punktfreien Strecken durchsetzen, die der obigen Folge entsprechen, woraus die Behauptung folgt. Damit ist aber der Satz bewiesen.

Die Methode des Beweises gestattet eine Ausdehnung auf den Raum, was ebenfalls an anderer Stelle ausführlicher dargelegt werden soll.

Digitized by Google

Dr. V. Cuomos Messungen der Elektricitätszerstreuung in der freien Atmosphäre auf Capri.

Mit erläuternden Bemerkungen von Professor Dr. Elster.

Von

J. Elster.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung am 3. Mai 1902.

Herr Dr. med. V. Cuomo in Anacapri auf Capri hat sich in zuvorkommendster Weise bereit erklärt, ein Jahr lang fortlaufende Messungen über die Elektricitätszerstreuung in der freien Atmosphäre anzustellen. Das dem genannten Herrn zur Disposition gestellte Instrument ist ein completer Zerstreuungsapparat nach Elster und Geitel[1]), hervorgegangen aus der Werkstatt von Günther und Tegetmeyer in Braunschweig. Aichung und Capacitätsbestimmung wurde von dem Unterzeichneten vor dem Versandt kontrolliert. Bei einem Vergleiche dieses Instrumentes mit dem früher[2]) vom Referenten in Capri benutzten ergab sich, daß in Folge der Capacitäten der Elektroscope und der verschiedenen Bauart der Apparate die Angaben des neuen mit 1,4 zu multiplicieren sind, um sie auf die des alten zu reducieren. Herr Professor Pochettino in Rom hatte die Güte Herrn Dr. Cuomo in der Handhabung des Apparates persönlich zu unterweisen.

Das Wohnhaus des Herrn Dr. Cuomo, das in einem thurmartigen Anbau auch die gut ausgestattete, private meteorologische Station enthält, liegt unmittelbar an der von Capri nach Anacapri führenden Landstraße und zwar einige Minuten vor letzterem Orte. Es ist umgeben von einem Garten, der hart an die steil abfallende, felsige Küste stößt. Bei den Messungen fand

1) J. Elster u. H. Geitel. Physikal. Zeitschrift I, p. 11, 1899.

2) J. Elster. Physikal. Zeitschrift II, p. 118, 1900.

Digitized by Google

der Apparat in diesem Garten, an der Nordseite des Hauses Aufstellung, stand also stets, da die Beobachtungen etwa um 1 Uhr nachmittags begonnen wurden, im Schatten. An Tagen, an welchen Sturm herrschte oder Niederschläge fielen, wurde nicht beobachtet. Eine größere Unterbrechung erlitten die Messungen nur vom 13. bis 23. Januar d. J. wegen Reparatur der zum Laden des Instrumentes dienenden Zamboni schen Säule.

In der unten folgenden tabellarischen Zusammenstellung der von Ende Oktober 1901 bis Ende Februar 1902 gewonnenen Beobachtungen bedeutet V das Potential des Zerstreuungskörpers (in den Tabellen angegeben in Skalentheilen und durch den Druck hervorgehoben in Volt) vor, V' den Betrag desselben nach einer Exposition von 15′. Dann ist der uncorrigierte Zerstreuungscoefficient a in Procenten der ursprünglichen Ladung und bezogen auf die Minute als Zeiteinheit:

$$a = \frac{100}{1-n}\left\{\frac{\log V - \log V'}{15}\right\}^{1)}.$$

Für Cuomos Apparat ist $n = 0{,}5$ und daher:

$$a = \frac{200\ (\log V - \log V')}{15}.$$

Von dem so ermittelten Werte der a {je eine Messung täglich für positive — erste Horizontalreihe — und je eine für negative Ladung — zweite Horizontalreihe —} ist noch der Betrag der Elektricitätszerstreuung im Innern des Elektroscopes in Abrechnung zu bringen.

Dieses Correktionsglied:

$$\frac{n}{1-n}\ \frac{(\log V - \log V')}{15}\ \text{geht}$$

für $n = \frac{1}{3}$ über in:

$$\frac{\log V - \log V'}{15}.$$

Diese Correktion ist vermerkt in jeder dritten Horizontalreihe der zusammengehörigen Messungen.

In der letzten Verticalcolumne der Tabellen findet sich jedesmal ein Vermerk über die Transparenz der Luft am Beobachtungstage. Bei herrschendem Nebel ist diese gleich Null gesetzt, bei außergewöhnlicher Klarheit gleich 5; die zwischenliegenden Ziffern ergeben sich aus dem Grade der Sichtbarkeit ferner Punkte im Gelände für das unbewaffnete Auge.

Das zum Verständnis der Tabellen Notwendige ist hiermit gegeben.

1) J. Elster u. H. Geitel, Terrestrial Magnetism IV. p. 221, 1899.

Digitized by Google

Oktober.

Datum.	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Windrichtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
27./X. 1901.	10.38′	10.53′	+	$21\frac{1}{2} = 195{,}3$	$13\frac{1}{2} = 156{,}5$	2.93 %							
	11.3′	11.18′	—	$20\frac{1}{2} = 191{,}3$	$12{,}4 = 151{,}0$	3.17 %	17°c	11.3	80	SSW	3 k.	3	4
	11.29′	11.44′	—	$22\frac{1}{2} = 199{,}3$	$22{,}2 = 198{,}1$	0.06 %							

28. 29. 30. Okt. 1901. Keine Messungen.

November.

1./XI. 1901.	1.35′	1.50′	+	21.5 = 195.3	13.9 = 158.5	2.78 %							
	1.57′	2.12′	—	23.3 = 202.5	17.5 = 176.5	1.83 %	16°.o	10.7	79%	S	5.5 k	7	4
	2.17′	2.32′	—	23.9 = 204.9	22.8 = 200.5	0.15 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet von	bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Windrichtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
2./XI. 1901.	h 1.30′	h 1.45′	+	21.9 = 196.9	12 = 149.0	3.72 %							
	h 1.55′	h 2.10′	—	21.5 = 195.3	12.9 = 153.5	3.19 %	12.°8	5.4	48%	N	k 19.5	1	4
	h 2.18′	h 2.33′	—	25.0 = 210.3	24.9 = 209.3	0.03 %							
3./XI. 1901.													
4./XI. 1901.	h 1.32	h 1.47′	+	23.8 = 204.5	16.9 = 173.5	2.20 %							
	h 1.52′	h 2.7′	—	23.9 = 204.9	16.3 = 170.5	2.45 %	11.°6	5.2	50	N	5	0	4
	h 2.12′	h 2.27′	—	24.4 = 208.3	24 = 205.8	0.06 %							
5./XI. 1901.	h 1.13′	h 1.28′	+	23.8 = 204.5	17.1 = 174.5	2.12 %							
	h 1.33′	h 1.48′	—	23.4 = 202.9	16.1 = 169.5	2.40 %	11.°4	5.3	52	SSE	3	3	5
	h 1.55′	h 2.10′	—	25.9 = 214.8	25.5 = 212.3	0.07 %							

Digitized by Google

6./XI. 1901.	h 1.30′	h 1.45′	+	24.1 = 205.8	18.1 = 179.5	1.83 %	12.°5	5.8	54	SSW	2k	0	5
	h 1.50′	h 2.05′	−	22.6 = 199.7	17.5 = 176.5	1.64 %							
	h 2.10′	h 2.25′	−	24.2 = 206.3	24 = 205.3	0.04 %							
7./XI. 1901.	h 1.10′	h 1.25′	+	22.2 = 198.1	14.3 = 160.5	2.80 %	13.°6	7	60	S	1k	9	1
	h 1.30′	h 1.45′	−	22.3 = 198.5	15.8 = 168.	2.22 %							
	h 1.55′	h 2.10′	−	26.0 = 215.3	25.9 = 214.8	0.02 %							
8./XI. 1901.	h 1.20′	h 1.35′	+	22.3 = 198.5	13. = 154	3.38 %	15.3	9.2	72%	SW	4k	2	5
	h 1.40′	h 1.55′	−	20.4 = 190.9	13.4 = 156	2.69 %							
	h 2.5′	h 2.20′	−	24.1 = 205.8	23.9 = 204.9	0.03 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet. von	bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Wind-richtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
10./XI. 1901.	h 1.00′	h 1.15′	+	21.9 = 196.9	13.9 = 158.5	2.89 %							
	h 1.20′	h 1.35′	−	23.2 = 202.1	17.5 = 176.5	1.80 %	15.8	8.2	61.0	N	6	2	4
	h 1.45′	h 2.00′	−	24. = 205.3	23.9 = 204.9	0.05 %							
12./XI. 1901.	h 1.0′	h 1.15′	+	24.2 = 206.3	17.9 = 178.5	1.90 %							
	h 1.20′	h 1.35′	−	24.7 = 208.8	19.2 = 185.0	1.59 %	14.°	7.0	58	WNW	2	0	5
	h 1.42′	h 1.57′	−	24.3 = 206.8	24.2 = 205.8	0.01 %							
13./XI. 1901.	h 1.20′	h 1.35′	+	23.1 = 201.7	17.4 = 176.	1.81 %							
	h 1.42′	h 1.57′	−	22.7 = 200.1	16.2 = 170.	2.16 %	15.°4	10.3	78	SSW	1	2	4
	h 2.5′	h 2.20′	−	22.4 = 198.9	22.1 = 197.7	0.05 %							

Digitized by Google

14./XI. 1901.	1.15′	1.30′	+	23.6 = 203.7	16.9 = 173.5	2.15 %							
	1.37′	1.52′	—	24.8 = 209.3	18.1 = 179.5	2.02 %	16.°4	12.4	89%	SW	9	9	1
	2.0′	2.15′	—	23.9 = 204.9	23.7 = 204.1	0.02 %							
16./XI. 1901.	1.15′	1.30′	+	21.5 = 195.3	11.5 = 146.2	3.82 %							
	1.38′	1.53′	—	20.9 = 192.9	10.6 = 140.6	4.25 %	18.°0	11.0	72.3	S	9	4	1
	2.0	2.15′	—	19.0 = 184	18.3 = 180.5	0.13 %							
17./XI. 1901.	1.0	1.15′	+	24.3 = 206.8	16.4 = 171	2.54 %							
	1.25′	1.40′	—	24 2 = 206.3	17.4 = 176	2.14 %	18.°	11.0	73	SE	6	1	5
	1.48′	2.3′	—	23.0 = 202.5	22.8 = 200.5	0.03 %							

18.—19. Keine Messungen.

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet. von	bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{100(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Windrichtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
20./XI. 1901.	h 1.20′	h 1.35′	+	23.5 = 203.3	16.1 = 169.5	2.43 %							
	h 1.42′	h 1.57′	—	23.2 = 202.1	16.5 = 171.5	2.18 %	13.°8	7	60%	NNW	5	0	5
	h 2.5	h 2.20′	—	23.3 = 202.5	23.2 = 202.1	0.02 %							
21./XI. 1901.	h 1.15′	h 1.30′	+	23.6 = 203.7	18.8 = 183	1.44 %							
	h 1.37′	h 1.52′		25.0 = 214.8	19.4 = 186	1.61 %	15.2	9.4	73%	NW	1	0	4
	h 1.58′	h 2.13′	—	20.0 = 189	19.9 = 188.5	0.02 %							
22./XI. 1901.	h 1.20′	h 1.35′	+	22.5 = 199.3	14.0 = 159	3.01 %							
	h 1.42′	h 1.57′	—	21.6 = 195.7	14.2 = 160	2.67 %	14.8	9.8	78%	SW	0.5	7	2
	h 2.6′	h 2.21′	—	19.8 = 188	19.6 = 187	0.04 %							

Digitized by Google

23./XI. 1901.	1.15′	1.30′	+	23.6 = 203.7	18.1 = 179.5	1.70 %	14.8	9.8	78%	W	0.5	6	3
	1.37′	1.52′	—	22.6 = 199.7	18.9 = 183.5	1.12 %							
	1.58′	2.13′	—	18.1 = 179.5	17.9 = 178.5	0.10 %							
25./XI. 1901.	1.15′	1.30′	+	24 = 205.3	18 = 179	1.84 %	12.4	7.3	68%	E	4.5	1	4
	1.38′	1.53′	—	23.9 = 204.9	17 = 174	2.18 %							
	2.	2.15′	—	20.0 = 189.	19 = 187.5	0.05 %							
27./XI. 1901.	1.	1.15′	+	24.5 = 207.8	19.2 = 185	1.54 %	12.	7.2	69%	W	1.5	2	2
	1.22′	1.37′	—	25 = 210.3	21.2 = 194.1	1.03 %							
	1.45′	2.	—	23.8 = 204.5	23.6 = 203.7	0.02 %							
28./XI. 1901.	1.12′	1.27′	+	23.2 = 202.1	15.9 = 168.5	2.41 %	11.5	7.1	70%	WSW	1	1	4
	1.34′	1.49′	—	23.8 = 204.5	19.2 = 185	1.34 %							
	1.56′	2.11′	—	23.5 = 203.3	23.3 = 202.5	0.03 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Windrichtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
30./XI. 1901.	1h 1.12′	1h 1.27′	+	23.8 = 204.5	19.6 = 187	1.20 %							
	1h 1.34′	1h 1.49′	—	23.9 = 204.9	18.1 = 179.5	1.77 %	8.8	5.1	61%	NW	4.5	0	5
	2h 6′	2h 21′	—	26.0 = 215.3	25.4 = 212.3	0.10 %							
Dezember 1901.													
1./XII. 1901.	1h 1.10′	1h 1.25′	+	22.3 = 198.5	16.8 = 173	1.83 %							
	1h 1.31′	1h 1.46′	—	22.8 = 200.5	17.0 = 174	1.88 %	12.°	6.4	60	WNW	3	4	4
	2h 1′	2h 2.16′	—	23.3 = 202.5	23.0 = 201.3	0.02 %							
2./XII. 1901.	1h 1.17′	1h 1.32′	+	22.0 = 197.3	16.0 = 169	2.06 %							
	1h 1.37′	1h 1.52′	—	22.5 = 199.3	17.3 = 175.5	1.69 %	12.2	6.3	58	NNE	7	0	5
	2h	2h 2.15′	—	25.0 = 210.3	24.9 = 209.8	0.01 %							

Digitized by Google

3./XII. 1901.	1.15′	1.30′	+	23.0 = 201.3	17.5 = 176.5	1.75 %							
	1.37′	1.52′	—	23.2 = 202.1	17.3 = 175.5	1.87 %	11.6	5.2	51%	W	5.5	0	4
	1.59′	2.14′	—	23.9 = 204.9	23.8 = 204.5	0.01 %							
7./XII. 1901.	1.35′	1.50′	+	24.0 = 205.3	19.8 = 188	1.18 %							
	1.56′	2.11′	—	23.8 = 204.5	19.5 = 186.5	1.23 %	12°.6	5.4	50%	NNW	1	2	1
	2.18′	2.33′	—	23.2 = 202.1	23.0 = 201.3	0.02 %							
8./XII. 1901.	12.30′	12.45′	+	24.0 = 205.8	18.0 = 179	1.84%							
	12.51′	1.6′	—	24.0 = 205.3	19.9 = 188.5	1.15 %	10.0	7.9	86	N	0.5	0	5
	1.11′	1.26′	—	24.0 = 205.8	24 = 205.3	0.02 %							
9./XII. 1901.	1.15′	1.30′	+	21.3 = 194.5	15.3 = 165.5	2.15 %							
	1.37′	1.52′	—	22.0 = 197.3	15.4 = 166	2.30 %	12.6	8	74.0	SW	6	8	4
	1.58′	2.13′	—	22.9 = 200.9	22.7 = 200.1	0.02 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet von	bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Wind-richtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
11./XII. 1901.	h 1.20′	h 1.35′	+	23.0 = 201.3	14.2 = 160	3.06 %							
	h 1.42′	h 1.57′	−	22.9 = 200.9	14.4 = 161	2.93 %	12.8	8.2	75%	W	20	7	1
	h 2.3′	h 2.18′	−	23.7 = 204.1	23.1 = 201.7	0.08 %							
12./XII. 1901.	h 1.12′	h 1.27′	+	23.0 = 201.3	15.6 = 167	2.49 %							
	h 1.32′	h 1.47′	−	23.2 = 202.1	16.6 = 172	2.14 %	12.9	7.5	68	SSW	7.5	2	2
	h 1.53′	h 2.8′	−	22.3 = 198.5	22.0 = 197.3	0.03 %							
18./XII. 1901.	h 1.30′	h 1.45′	+	22.2 = 198.1	13.1 = 154.5	3.31 %							
	h 1.51′	h 2.6′	−	22.7 = 200.1	15.0 = 164	2.64 %	14.1	9.8	82%	SSW	6.5	7	2
	h 2.11′	h 2.26′	−	21.7 = 196.1	21.6 = 195.7	0.01 %							

Digitized by Google

19./XII. 1901.	1.16′	1.31′	+	20.4 = 190.9	12.0 = 140.9	3.31 %	14.1	10	84%	WSW	5	9	1
	1.37′	1.52′	—	20.2 = 190	12.2 = 150	3.15 %							
	1.59′	2.14′	—	19.0 = 184	18.8 = 183	0.07 %							
21./XII. 1901.	1.18′	1.33′	+	23.1 = 201.7	18.1 = 179	1.55 %	13.6	8.2	71%	SE	1	2	2
	1.39′	1.54′	—	23.0 = 201.3	17.0 = 174	1.94 %							
	2.0	2.15′	—	21.8 = 196.5	21.7 = 196.1	0.01 %							
23./XII. 1901.	1.20′	1.35′	+	21.2 = 194.1	12.6 = 152	3.27 %	13.6	7.4	64%	SSW	3	8	1
	1.42′	1.57′	—	21.4 = 194.9	14.8 = 163	2.36 %							
	2.3′	2.18′	—	23.2 = 202.1	23.0 = 201.3	0.02							
27./XII. 1901.	1.22′	1.37′	+	22.3 = 198.5	14.2 = 160.0	2.87 %	10.6	7.4	77%	WSW	2	8	4
	1.42′	1.57′	—	21.6 = 195.7	14.3 = 160.5	2.63 %							
	2.3	2.18′	—	20.6 = 191.7	20.5 = 191.3	0.02 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit.	Windrichtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
28./XII. 1901.	h 1.15′	h 1.30′	+	21.9 = 196.9	14.1 = 159.5	2.81 %							
	h 1.37′	h 1.52′	—	22.6 = 199.7	14.2 = 160	2.95 %	9	5.9	68	SW	7.5	6	4
	h 1.58′	h 2.13′	—	21.2 = 194.1	21.0 = 193.3	0.02 %							
30./XII. 1901.	h 1.30′	h 1.45′	+	21.7 = 196.1	13.0 = 154	3.21 %							
	h 1.51′	h 2.6′	—	21.0 = 193.3	12.6 = 152	3.22 %	10.8	6.8	70%	WSW	2	2	5
	h 2.12′	h 2.27′	—	20.8 = 192.5	20.6 = 191.7	0.03 %							
31./XII. 1901.	h 1.25′	h 1.40′	+	23.8 = 204.5	19. = 184	1.41 %							
	h 1.46′	h 2.1′	—	23.1 = 201.7	18 = 183	h 1.29 %	11.4	7.1	71%	N	1	0	5
	h 2.7	h 2.22	—	23.5 = 203.3	23.4 = 202.9	0.01 %							

Digitized by Google

Januar 1902.

1./I. 1902.	1.10′	1.25′	+	24.0 = 205.3	19.6 = 187	1.26 %							
	1.32′	1.47′	−	24.1 = 205.8	19.7 = 187.5	1.25 %	11.6	6.3	61%	NNE	6	0	5
	1.53′	2.8′	−	26.0 = 215.3	25.8 = 214.3	0.04 %							
2./I. 1902.	1.10′	1.25′	+	23.2 = 202.1	19.0 = 184	1.24 %							
	1.31′	1.46′	−	23.5 = 203.3	19.1 = 193.7	1.30 %	12.°0	8.3	80%	NE	6	0	4
	1.52′	2.7′	−	23.0 = 201.3	22.9 = 200.9	0.02 %							
5./I. 1902.	1.15′	1.30′	+	23.8 = 204.5	18.2 = 180	1.71 %							
	1.37′	1.52′	−	23.5 = 203.3	17.0 = 174	2.08 %	11°	5.1	52%	NNW	2	0	5
	1.58′	2.13′	−	25.0 = 210.3	24.8 = 209.3	0.03 %							
6./I. 1902.	1.25′	1.40′	+	23.1 = 201.7	17.3 = 175.5	1.85 %							
	1.46′	2.1	−	22.6 = 199.7	15.9 = 168.5	2.26 %	12.°1	7.5	71%	E	1	4	3
	2.6′	2.21′	−	23.0 = 201.3	22.8 = 200.1	0.027 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet. von	bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit	Wind-richtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
—	h 1.26′	h 1.41′	+	23.0 = 201.3	16.5 = 171.5	2.13 %							
7./I. 1902	h 1.47′	h 2.2′	−	22.8 = 200.5	16.0 = 169	2.27 %	10.°6	6.5	68%	N	1	0	5
	h 2.8′	h 2.23′	−	22.3 = 198.5	22.0 = 197.3	0.039 %							
	h 1.10′	h 1.25′	+	23.2 = 202.1	17.0 = 174.0	1.98 %							
8./I. 1902.	h 1.31′	h 1.46′	−	23.0 = 201.3	15.9 = 168.5	2.37 %	11.°4	5.3	52%	N	6	0	4
	h 1.52′	h 2.7′	−	25.8 = 214.3	25.6 = 213.8	0.031 %							
	h 1.22′	h 1.37′	+	22.8 = 200.5	19.4 = 186.0	1.00 %							
9./I. 1902.	h 1.43′	h 1.58′	−	23.1 = 201.7	18.2 = 180	1.51 %	10.°6	5.8	60%	ENE	6	1	4
	h 2.4′	h 2.19′	−	21.7 = 196.1	21.6 = 195.7	0.016 %							

Digitized by Google

10./I. 1902.	1h 25′	1h 40′	+	22.7 = 200.1	17.2 = 175.0	1.78 %							
	1h 46′	2h 1	—	22.6 = 99 .7	17.2 = 175	1.75 %	9.°8	6.9	76%	N	0	0	5
	2h 7′	2h 22	—	22.2 = 198.1	21.9 = 196.9	0.034 %							
11./I. 1902.	1h 15′	1h 30′	+	2.24 = 198.9	14.8 = 163.0	2.66 %							
	1h 36′	1h 51′	—	22.2 = 198.1	14.9 = 163.5	2.55 %	10.°0	5.7	62%	N	6	0	5
	1h 57′	2h 12′	—	21.3 = 194.5	21.0 = 193.3	0.029 %							
12./I. 1902.	1h 30′	1h 45′	+	23.0 = 201.3	15.5 = 166 5	2.53 %							
	1h 51′	2h 6′	—	23.1 = 201.7	15.4 = 166.0	2.59 %	10.°0	6.3	66%	N	6	6	4
	2h 12′	2h 27′	—	24.9 = 209.8	24.7 = 208.8	0.032 %							
24./I. 1902.	1h 30′	1h 45′	+	22.5 = 199.3	16.9 = 173.5	1.85 %							
	1h 52′	2h 7′	—	23.5 = 203.3	18.7 = 182.5	1.45 %	11.°9	7.9	76%	E	3	8	2
	2h 13′	2h 28′	—	21.1 = 193.7	21.0 = 193.3	0.012 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Windrichtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
25./I. 1902.	^{h}1.25′	^{h}1.40′	+	23.1 = 201.7	15.2 = 165.0	2.67 %							
	^{h}1.46′	^{h}2.1′	—	22.2 = 198.1	15.3 = 105.5	2.39 %	11.°4	8.3	83%	SSE	2	8	2
	^{h}2.7′	^{h}2.22	—	22.0 = 197.3	21.8 = 196.5	0.026 %							
26./I. 1902.	^{h}1.15′	^{h}1.30′	+	23.0 = 201.3	18.0 = 179	1.56 %							
	^{h}1.36′	^{h}1.51′	—	22.8 = 200.5	18.0 = 179	1.71 %	10.°0	5.3	57%	WSW	13	7	2
	^{h}1.57′	^{h}2.12′	—	22.7 = 201.1	22.5 = 199.3	0.033 %							
27./I. 1902.	^{h}1.25′	^{h}1.40′	+	22.0 = 197.3	15.4 = 166.0	2.30 %							
	^{h}1.46′	^{h}2.51′	—	23.1 = 201.7	16.5 = 171.5	2.16 %	8.°0	2.7	34%	NW	3	1	4
	^{h}2.7′	^{h}2.22′	—	22.5 = 199.3	22.3 = 198.5	0.027 %							

Digitized by Google

28./I. 1902.	1.10′	1.25′	+	23.8 = 204.5	19.2 = 185.0	1.34 %	9.°8	8.1	89%	SSW	6ᵏ	9	1
	1.32′	1.47′	—	23.9 = 204.9	18.5 = 181.5	1.62 %							
	1.53′	2.8′	—	23.0 = 201.3	22.8 = 200.5	0.028 %							
29./I. 1902.	1.30′	1.45′	+	23.2 = 202.1	17.9 = 178.5	1.51 %	11.°0	8.2	84%	E	1.5	6	3
	1.51′	2.6′	—	22.8 = 200.5	16.9 = 173.5	1.92 %							
	2.12′	2.37′	—	22.0 = 197.3	21.9 = 196.5	0.134 %							
30./I. 1902.	1.12′	1.27′	+	22.8 = 200.5	17.2 = 175	1.81 %	11.°2	7.3	73%	SW	4	8	1
	1.33′	1.48′	—	23.0 = 201.5	18.1 = 179.5	1.50 %							
	1.55′	2.10′	—	22.7 = 200.1	22.5 = 199.3	0.022 %							
Februar 1902.													
1./II. 1902.	1.15′	1.30′	+	22.1 = 197.7	14.2 = 160	2.81 %	10.°8	7.5	77%	ESE	8	6	3
	1.37′	1.52′	—	22.2 = 198.1	15.0 = 164	2.51 %							
	1.58′	2.13′	—	20.8 = 192.5	20.6 = 191.7	0.034 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log - V \log V')}{15}$	Temperatur.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Windrichtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
3./II. 1902.	h 1.10′	h 1.25′	+	21.1 = 193.7	13.7 = 157.5	2.77 %							
	h 1.31′	h 1.46′	—	21.2 = 194.1	13.9 = 158.5	2.71 %	12.°4	8.5	79%	SE	6	8	3
	h 2.2′	h 2.17′	—	20.5 = 191.3	20.3 = 190.5	0.034 %							
4./II. 1902.	h 1.0	h 1.15′	+	22.2 = 198.1	13.0 = 154	3.35 %							
	h 1.21′	h 1.36′	—	22.0 = 197.3	11.8 = 148	3.83 %	12.°8	8.0	72%	SSW	5	8	4
	h 1.43′	h 1.58′	—	21.7 = 196.1	21.4 = 194.9	0.048 %							
5./II. 1902.	h 1.12′	h 1.27′	+	23.1 = 201.7	14.3 = 160.5	3.04 %							
	h 1.33′	h 1.48′	—	22.3 = 198.5	14.2 = 160	2.87 %	10.°7	7.1	74%	WSW	8	5	4
	h 1.53′	h 2.8′	—	21.8 = 196.5	21.6 = 195.7	0.034 %							

Digitized by Google

6./II. 1902.	1h 1.15′	1h 1.30′	+	21.4 = 196.9	14.0 = 159	2.68 %							
	1h 1.36′	1h 1.51′	—	22.0 = 197.3	13.9 = 158.5	2.98 %	10.°8	7.5	77%	W	6	6	4
	1h 1.57′	1h 2.12′	—	21.0 = 193.3	20.8 = 192.5	0.045 %							
7./II. 1902.	1h 1.10′	1h 1.25′	+	22.8 = 200.5	14.3 = 160.5	2.96 %							
	1h 1.31′	1h 1.46′	—	22.2 = 198.1	13.8 = 158	3.00 %	12.°5	9.8	90%	SE	12	7	1
	1h 1.51′	1h 2.6′	—	20.2 = 190	20.1 = 189	0.034 %							
8./II. 1902.	1h 1.25′	1h 1.40′	+	24.5 = 207.8	20.5 = 191.3	1.08 %							
	1h 1.46′	1h 2.1′	—	23.1 = 201.7	19.8 = 188	0.93 %	13.°0	10.7	95%	SSE	8	10	0
	1h 2.6′	1h 2.21′	—	20.4 = 190.9	20.3 = 190.5	0.017 %							
10./II. 1902.	1h 1.30′	1h 1.45′	+	24.2 = 206.3	19.2 = 185	1.47 %							
	1h 1.51′	1h 2.6′	—	23.2 = 202.1	18.7 = 182.5	1.43 %	13.°0	9.7	86%	SSW	8	9	1
	1h 2.12′	1h 2.27′	—	22.0 = 197.3	21.8 = 196.5	0.028 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet. von	bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Zeichen.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Windrichtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
11./II. 1902.	h 1.35′	h 1.50′	+	22.7 = 200.1	16.1 = 169.5	2.20 %							
	h 1.56′	h 2.11′	—	23.0 = 201.3	17.8 = 178.0	1.64 %	12.°6	9.4	86%	W	6	9	1
	h 2.17′	h 2.32′	—	22.0 = 197.3	21.8 = 196.5	0.020 %							
12./II. 1902.	h 1.10′	h 1.25′	+	24.0 = 205.3	15.3 = 165.5	2.88 %							
	h 1.31′	h 1.46′	—	23.0 = 201.3	15.5 = 166.5	2.53 %	12.°8	9.0	81%	S	12	3	3
	h 1.52′	h 2.7′	—	22.5 = 199.3	22.1 = 197.7	0.056 %							
13./II. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	22.7 = 200.1	15.1 = 165.5	2.60 %							
	h 1.46′	h 2.1′	—	22.0 = 197.3	15.6 = 167	2.22 %	12.°0	9.9	95%	WSW	24	9	1
	h 2.7′	h 2.22′	—	21.6 = 195.7	21.3 = 194.5	0.034 %							

Digitized by Google

15./II. 1902.	1h 1.15′	1h 1.30′	+	22.5 = 199.3	16.9 = 173.5	1.85 %							
	1h 1.36′	1h 1.51′	—	22.9 = 200.9	16.0 = 169	2.28 %	13.°0	9.1	81%	SW	18	8	1
	1h 1.57′	1h 2.12′	—	21.1 = 193.7	20.7 = 192.1	0.052 %							
17./II. 1902.	1h 1.35′	1h 1.50′	+	23.2 = 202.1	15.0 = 164	2.77 %							
	1h 1.56′	1h 2.11′	—	22.5 = 199.3	14.3 = 160.5	2.88 %	8.°5	5.7	67%	SW	19	2	4
	1h 2.17′	1h 2.32′	—	21.9 = 196.9	21.4 = 294.9	0.082 %							
18./II. 1902.	1h 1.20′	1h 1.35′	+	23.3 = 202.5	16.8 = 173	2.10 %							
	1h 1.41′	1h 1.57′	—	23.6 = 203.7	16.1 = 169.5	2.46 %	10.°2	5.2	55%	ESE	8	7	4
	1h 2.2	1h 2.17′	—	20.1 = 189.5	19.7 = 187.5	0.070 %							
19./II. 1902.	1h 1.18′	1h 1.33′	+	23.9 = 204.9	17.5 = 176.5	1.99 %							
	1h 1.39′	1h 1.54′	—	23.8 = 204.5	17.3 = 175.5	2.04 %	10.°0	5.4	67%	W	8	2	4
	1h 2.0	1h 2.15′	—	21.4 = 194.9	21.1 = 193.7	0.019 %							

Digitized by Google

Datum.	Beobachtet von	bis	Zeichen.	V	V'	$\frac{200(\log V - \log V')}{15}$	Zeichen.	Absolute Feuchtigkeit.	Relative Feuchtigkeit.	Wind-richtung.	Windstärke.	Bewölkung.	Durchsichtigkeit der Luft.
20./II. 1902.	h 1.30′	h 1.45′	+	22.5 = 199.3	13.0 = 154	3.44 %							
	h 1.51′	h 2.6′	−	22.3 = 198.5	12.6 = 152	3.55 %	10.%	7.5	77%	ESE	14	1	4
	h 2.11′	h 2.26′	−	21.5 = 195.3	21.2 = 194.1	0.034 %							
21./II. 1902.	h 1.15′	h 1.30′	+	22.6 = 199.7	12.5 = 151.5	3.68 %							
	h 1.37′	h 1.52′	−	22.4 = 198.9	13.9 = 158.5	3.03 %	11.%	5.4	53%	NNE	15	2	5
	h 1.58′	h 2.13′	−	20.8 = 192.5	20.4 = 190.9	0.068 %							
22./II. 1902.	h 1.30′	h 1.45′	+	22.5 = 199.3	17.0 = 174	h 1.81 %							
	h 1.51′	h 2.6′	−	22.9 = 200.9	17.1 = 174.5	1.85 %	11.%	7.0	69%	NE	7	10	1
	h 2.12′	h 2.27′	−	20.9 = 192.9	20.7 = 192.1	0.028 %							

Digitized by Google

24./II. 1902.	h 1.25′	h 1.40′	+	23.2 = 202.1	14.1 = 159.5	3.14 %	12.°0	7.5	71%	W	9	3	4
	1.46′	h 2.1′	—	23.0 = 201.3	14.2 = 160	3.06 %							
	2.7	h 2.22′	—	21.5 = 195.3	21.2 = 194.1	0.025 %							
26./II. 1902.	1.10′	1.25′	+	23.1 = 201.7	15.6 = 167	2.51 %	12.°0	8.2	92%	W	20	3	4
	h 1.31′	h 1.46′	—	22.9 = 200.9	16.0 = 169	2.28 %							
	h 1.52′	h 2.7′	—	22.0 = 197.3	21.7 = 196.1	0.045 %							
27./II. 1902.	h 1.20′	h 1.35′	+	23.6 = 203.7	17.0 = 174	2.12 %	12.°6	9.1	83%	SE	17.5	5	3
	h 1.41′	h 1.56′	—	24.0 = 205.3	17.1 = 174.5	2.18 %							
	h 2.2′	h 2.17′	—	20.7 = 192.1	20.5 = 190.9	0.034 %							

Anacapri

Dr. **Vincenzo Cuomo.**

Digitized by Google

Es dürfte verfrüht sein, aus dem nur einige Monate umfassenden Materiale Schlüsse allgemeinerer Natur abzuleiten. Doch läßt sich unter dem notwendigen Vorbehalte Folgendes schon jetzt entnehmen. Die Beobachtungen bestätigen [1]), daß auf Capri die Elektricitätszerstreuung wesentlich höher ist, als bei uns. Maxima von 3% und darüber (vergl. die Beobachtungen vom: 16./11., 22./11., 11./12., 15./12., 18./12., 23./12., 30./12., 4./2., 5./2., 7./2., 20./2., 21./2., 24./2.), sind bislang in Wolfenbüttel nicht beobachtet worden. Ein Unterschied in der Entladungsgeschwindigkeit für positive und negative Elektricität wird im Mittel nicht hervortreten, da die Werte für das Verhältniß derselben $\frac{a_-}{a_+} = q$ etwa ebenso häufig > 1 wie < 1 sind. In dieser Beziehung stimmen die Beobachtungen mit denen im kontinentalen Deutschland überein. Im Gegensatz stehen sie zu den von dem Unterzeichneten auf der Insel Spitzbergen [2]) gemachten Erfahrungen, wo durchgehends $q > 1$, also $a_- > a_+$ war. Starke Abweichungen von der Regel [3]), daß mit zunehmenden Durchsichsigkeit der Luft die Elektricitätszerstreuung wächst, weisen die Messungen vom November und December auf, während die vom Januar und Februar damit übereinstimmen. Das Minimum der Elektricitätszerstreuung, ca 1%, wurde dementsprechend bei Nebel beobachtet. Vergl. die Messung vom 8. II.

Den weiteren, dankenswerten Bemühungen des Herrn Dr. Cuomo wird man mit Interesse entgegensehen.

Wolfenbüttel, 25. März 1902. J. Elster.

Die Mittel zu der Ausführung der Beobachtungen wurden von der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften zu Leipzig in dankenswerther Weise zur Verfügung gestellt. E. R.

1) J. Elster, Phys. Ztschrft. l. c.
2) J. Elster, Phys. Ztschrft. l. c.
3) J. Elster u. H. Geitel, Terr. Magn. l. c. p. 224.

Digitized by Google

Bericht über die in München im Jahre 1901/1902 ausgeführten luftelektrischen Arbeiten.

(Physikalisches Institut der technischen Hochschule München).

Von

H. Ebert aus München.

Vorgelegt durch E. Riecke in der Sitzung vom 3. Mai 1902.

Die in München im Laufe des letzten Jahres auf dem neu erschlossenen Gebiete der natürlichen Ionisierung der Atmosphäre angestellten Untersuchungen zerfallen in solche, welche A) im Freien, B) in einem geräumigen Kellerraume mit ausnehmend hoher Leitfähigkeit der eingeschlossenen Luft angestellt wurden, und C) in eine Reihe von Experimentaluntersuchungen im Laboratorium.

A) Ausgedehntere Messungsreihen im Freien wurden von München aus unternommen von dem Ingenieur und Assistenten am physikalischen Institute der Hochschule Herrn C. W. Lutz, sowie von Herrn cand. math. et phys. C. Ruf.

Bei diesen Messungen wurden verschiedene Elster-Geitel'sche Zerstreuungsapparate mit einigen Abänderungen benutzt, sowohl mit Schutzdach sowie ohne dieses innerhalb isolierter oder abgeleiteter Drahtnetzkäfige. Ferner wurde der von Ebert (Physikal. Zeitschrift 2. p. 662. 1901) beschriebene Aspirationsapparat in verschiedenen Modifikationen verwendet und meist auch gleichzeitig Potentialmessungen angestellt in der Fr. Exner-Elster-Geitel'schen Anordnung mit Flammen-Collector und einem Günther'schen Elektroskope mit stufenweise abzugleichender Empfindlichkeit.

Mittels Aspirationsverfahren wurde nach den von Zeleny

Digitized by Google

ausgearbeiteten Principien wie schon früher (Arch. scienc. phys. et mat. (4). 12. p. 113. 1901) der Nachweis erbracht, daß die + Ionen der Luft langsamer als die − Ionen wandern, und für letztere Geschwindigkeiten von einigen cm/sec bei 1 Volt/cm Spannungsgefälle ermittelt.

Gewöhnlich wurde mit zwei Zerstreuungsapparaten gleichzeitig beobachtet, von denen der eine als Vergleichsapparat diente. Die Instrumente sind am gleichen Standorte und unter denselben atmosphärischen Bedingungen wiederholt mit einander verglichen worden. Die Factoren, welche die Angaben des einen Instrumentes auf diejenigen des anderen reducieren, haben sich dabei als nahezu unveränderlich mit der Zeit ergeben.

Für die Ausführung der Messungen mit den Zerstreuungsapparaten ist die von Herrn Ruf genauer studierte Thatsache nicht ohne Belang, daß es nicht gleichgültig ist, ob das Gestell mit dem Schutzdache des Zerstreuungsapparates zur Erde abgeleitet ist, oder ob der Apparat isoliert und ohne Erdleitung aufgestellt ist. So wurde beispielsweise kurz hintereinander gefunden

$$\text{mit Erdleitung: } a_+ = 0{,}51, \quad a_- = 0{,}71, \quad q = \frac{a_-}{a_+} = 1{,}39;$$

$$\text{ohne Erdleitung: } a_+ = 0{,}71, \quad a_- = 0{,}45, \quad q = \frac{a_-}{a_+} = 0{,}63.$$

Es ergiebt sich also eine völlige Umkehrung der Zerstreuungswerte, je nachdem der Apparat geerdet ist oder nicht. Bei Beobachtungen im Freien wird man das Bestehen eines elektrischen Erdfeldes zur Erklärung heranziehen; das geerdete Schutzdach verhält sich bei positivem Gefälle wie ein negativer, den Zerstreuungskörper umgebender Körper; es unterstützt also dessen Thätigkeit, wenn er negativ geladen ist, schwächt aber die Wirkung ab im entgegengesetzten Falle, daher ein $q > 1$. Merkwürdig ist aber, daß eine deutliche Wirkung der Erdung auch in abgeschlossenen Kellerräumen zu bemerken ist (s. w. u.).

Mit Erfolg wurden Versuche ausgeführt, die Angaben der Elster-Geitel'schen Apparate auf absolutes elektrostatisches Maaß zurückzuführen, indem die Capacität des aus Elektroskop, Zerstreuungskörper und Schutzdach, bez. Käfig bestehenden Systems durch Ladungsteilung mit gut isolierten Kugeln von verschiedener Größe in cm ermittelt wurde.

Von Herrn Lutz wurden außer in München auch am Südende des Starnberger Sees (in Seeshaupt) zahlreiche Messungen während der verschiedenen Jahreszeiten angestellt; von den erhaltenen Resultaten seien nur einige kurz mitgeteilt:

Digitized by Google

1) Abwärtssteigende Luftströmungen führen immer einen großen Reichtum an Ionen, namentlich solche positiven Zeichens mit sich. So wurde eine bedeutend schnellere Zerstreuung von —Ladungen als an normalen Tagen beobachtet a) wenn anticyklonale Luftbewegung (Auflkärung) eintrat, b) bei Föhnlage.

2) Während der Sommer- und Herbstmonate 1901 wurde an klaren Tagen eine deutliche Periode der unipolaren Leitfähigkeit $q = \frac{a_-}{a_+}$ beobachtet, und zwar trat ein Max. vor 9^h Vormittags, ein Min. zwischen 11^h und 12^h, ein Max. zwischen 3^h und 4^h ein; häufig stellte sich ein plötzliches Anwachsen von q, ein „Sprungmaximum" kurz nach Sonnenuntergang ein (vgl. damit die von Exner beobachteten Sprungmaxima im Potentialgefälle).

3) Die Elektricitätszerstreuung ist besonders gering in dichten Wäldern und für beide Vorzeichen von gleicher Größe.

Größere Baumgruppen oder Häuser, die den Standort des Apparates umgeben, vermindern die El.-Zerstr., wenn sie nicht mindestens 20 m entfernt liegen.

4) Vor Gewittern ergeben sich meist auffallend große Zerstreuungswerte.

5) Eine Anomalie der Elektricitäts-Zerstreuung wurde am Ufer des Starnbergersees selbst und am Rande völlig stillstehender Sumpfseen gefunden. Dort ergaben sich außerordentlich große Zerstreuungswerte für —Ladung. Ueber 100 m land- und seeeinwärts stellten sich wieder normale Werte ein.

6) Wird die Sonne zeitweilig durch Wolken verdeckt, so tritt währenddessen ein deutlicher Rückgang der Elektricitäts-Zerstreuung und zwar für beide Arten ein.

7) Die Ablesungen erfolgten immer in Intervallen von je 5 Minuten; häufig wurden diese Ablesungsreihen mit derselben Ladung über längere Zeiträume erstreckt. Die aus den einzelnen Intervallen berechneten Zerstreuungen folgen nicht dem Coulomb'schen Gesetze, dem zu Folge Proportionalität zwischen Spannung und Spannungsverlust bestehen müßte, und weisen auch sonst keine einfache Gesetzmäßigkeit auf.

Von Herrn Ruf wurden an den Tagen der internationalen Ballonfahrten und an verschiedenen Terminen, an denen Fahrten zum Zwecke luftelektrischer Messungen von Berlin aus unternommen wurden, die Zerstreuungswerte in München auf der Attika des Hauptbaues der Hochschule bestimmt.

In Schaufling bei Deggendorf in Niederbayern führte Herr Pfarrer Dr. M. Maier tägliche Messungen der Zerstreuung mit

Digitized by Google

dem Elster-Geitel'schen Apparate unter gleichzeitiger Bestimmung der meteorologischen Elemente mit großer Regelmäßigkeit aus. Leider starb der überaus rührige und gewissenhafte Beobachter im Laufe dieses Jahres; das reiche, von ihm gesammelte Beobachtungsmaterial wurde von den Erben dem physikalischen Institute zur Bearbeitung überwiesen; die aus demselben sich ergebenden Resultate werden demnächst publiciert werden.

Die Tagescurve der Größe q und namentlich das Springen der ihr entsprechenden Zahlenwerte am Vormittage heißer Sommertage wurde auch in Schaufling oft erhalten. Bemerkenswert ist, daß hier am Fuße des bayrischen Waldes nordöstlicher über das Gebirge her herüberkommender Wind häufig föhnartige Wirkung, d. h. ein plötzliches in die Höhegehen der Größe q bedingte.

Die bei anhaltend klarem Wetter im Sommer mit großer Regelmäßigkeit beobachtete Erscheinung, daß an bestimmten Vormittagsstunden die Größe q plötzlich ansteigt, d. h. die Luft sich von einem bestimmten Momente an viel reicher an +Ionen erweist als vorher, hängt offenbar mit den atmosphärischen Circulationsprocessen zusammen.

Hann hat schon früher, Seb. Finsterwalder später unabhängig von ihm die Gleichgewichtsstörungen discutiert, welche in einer bei anhaltend ruhigem Wetter ausgebildeten adiabatischen Luftschicht entstehen, wenn durch Abkühlung am Boden Temperaturumkehr eingetreten ist und dann, nachdem die Circulation zunächst sich nur auf die unteren Schichten beschränkt hatte, plötzlich die oberen Schichten mit ergriffen werden.

Um die hierbei auftretenden interessanten Einzelheiten näher zu studieren, haben Herr Dr. Rob. Emden und ich am 13. Juli 1901 wiederum eine luftelektrische Ballonfahrt von München aus unternommen (im Ganzen die vierte), deren Resultate die vermutete Beziehung zwischen den am Boden angetroffenen elektrischen Verhältnissen und der atmosphärischen Circulation bestätigen.

Bei der Erhebung fanden wir deutliche Temperaturumkehr unterhalb 800 m Meereshöhe, zwischen 800 und 1000 m eine adiabatische Schicht mit den charakteristischen meteorologischen Elementen der Bodenschichten des Tags vorher; auch in Bezug auf q erhielten wir in dieser Schicht etwa dieselben Werte, wie sie am Boden tags vorher gefunden worden waren. Ueber 1000 m waren dagegen die meteorologischen Constanten ebenso wie die Werte von q völlig andre, q stieg plötzlich von 0,73 auf 2,28 an. (Näheres s. in der Arbeit von Ebert und Emden Illustr. Aëronaut. Mitteilungen Hft. 3. 1902).

Digitized by Google

Um über den Ausgleich der Erdladung einen quantitativen Anhalt zu bekommen, wurden außerhalb Münchens Beobachtungen in folgender Weise angestellt:

An einer 2 Quadratmeter großen im Freien horizontal isoliert aufgestellten mit Vegetation bedeckten Metallplatte wurde der Ausgleich zwischen der negativen Bodenelektricität und den positiven Ionenladungen der Atmosphäre galvanometrisch verfolgt und Stromstärken von 2.10^{-13} Ampère oder Stromdichten von 10^{-16} Ampère/cm² erhalten (Näheres s. in einem demnächst in der Physikal. Zeitschft. erscheinenden Aufsatze).

B) Auch für die von Elster und Geitel angeregten Beobachtungen in abgeschlossenen Kellerräumen fand sich in München eine sehr günstige Gelegenheit. Der im Gebäudecomplexe der technischen Hochschule befindliche, erst vor zwei Jahren vollendete Flügelbau im Norden, das sog. „Theresianum", ist zwar unterkellert worden, aber die Keller wurden ohne Fenster nach Außen hergestellt. In diesen rund 500 cbm umfassenden und 2,3 m hohen Räumen trat daher ein völliges Stagnieren der Luft ein. Da Rohre der Niederdruckdampfheizung den ganzen Raum durchziehen, so war die Temperatur sowie der Feuchtigkeitsgehalt während des ganzen Winters ein überaus constanter (Temperatur 17.8—18.5°, relative Feuchtigkeit 80—86%).

Erhellt wurden die Räume durch elektrisches Vacuumglühlicht; es wurde sorgfältigst vermieden den Raum mit offenen Flammen zu betreten, um keine Flammengasionen einzuführen; Auerlicht ist niemals in dem Keller gebrannt worden, so daß auch eine Infection der Luft durch Thorerdestaub unwahrscheinlich ist; auch hat Ruf Isoliermasse der Dampfheizungsrohre, Staub vom Boden, Kalk- und Cementmörtel und Steine von den Wänden und der Decke des Kellers mit einem Zerstreuungsapparate zusammen unter eine Glasglocke gebracht und durch länger dauernde Messungen nachgewiesen, daß keinerlei radioaktive Substanzen vorhanden waren; endlich sind nie Apparate in den Keller gebracht worden, die je mit stärkeren radioaktiven Substanzen in Berührung gekommen sind. Trotzdem ergaben sich in der völlig ruhigen Luft sehr große Werte der Zerstreuung. (Vier Tage nachdem sämmtliche Luftöffnungen in dem Keller sorgfältig verstopft waren, wurde die erste Zerstreuungsmessung vorgenommen, sie ergab für positive Ladung $a_+ = 23{,}05\%$ und für negative Ladung $a_- = 21{,}11\%$. Schon vier Tage später ergaben sich $a_+ = 39{,}96\%$ und $a_- = 35{,}84\%$, was einer Spannungsabnahme von 90 bzw. 82,5 Volt in 3 Minuten entspricht, Werte, die auch für die spätere Zeit die-

Digitized by Google

selben blieben). Wiederholte Controlle der Isolation der Instrumente sicherte vor Täuschungen; die kleinen Verluste in Folge nicht ganz vollkommner Isolation wurden immer in Rechnung gebracht. Nach dem Lüften des Kellers ist der Ionengehalt auf den auch in der freien Atmosphäre angetroffenen herabgegangen. Die Zerstreuungsmessungen im Keller bieten gegenüber denen im Freien zwei Vorteile: Einmal ist in Folge des größeren Ionenreichtumes die Entladungsgeschwindigkeit an sich größer; ein verschiedenes Verhalten der + und −Ionen kommt daher hier deutlicher zum Ausdruck. Auf der anderen Seite kann der Kellerraum als ein vollkommen elektrostatisch geschützter Hohlraum innerhalb eines Leiters, der Erde, angesehen werden, so daß hier alle jene Wirkungen eines praeformierten Feldes fortfallen, welche die Vorgänge im Freien so wesentlich complicieren. (Versuche mit zwei Wassertropfcollectoren, von denen der eine dicht unter der Decke, der andere unmittelbar über dem Boden isoliert aufgehängt war, gaben an einem zwischen sie geschalteten empfindlichen Elektroskope keine merkliche Potentialdifferenz. Freilich wirkte der Thätigkeit der Collectoren die große Zerstreuung in der Kelleratmosphäre entgegen, vergl. auch w. u.).

Bei allen Messungen, bei denen immer eine mit positiver und unmittelbar daran anschließend eine mit gleich hoher negativer Ladung mit einander abwechselten, war bei geerdetem Schutzdach die Zerstreuung der positiven Ladung durchweg größer als die der negativen Ladung. Da die Versuche mit dem Aspirationsapparate (s. o. S. 220) gleiche Mengen von + und − Electricität im cbm ergaben, so kann jenes Verhalten nur als Ausdruck für die größere Wanderungsgeschwindigkeit der −Ionen gegenüber derjenigen der +Ionen betrachtet werden.

Wie schon oben (S. 220) erwähnt wurde, trat auch im Keller ein Wechsel in den Zerstreuungswerten ein, sobald an dem Zerstreuungsapparat die Erdleitung angelegt oder diese weggelassen wurde. Während bei den Messungen mit geerdetem Apparat, wie soeben erwähnt, durchweg $a_+ > a_-$, also $q < 1$ war, wurde jedesmal wenn die Erdleitung aufgehoben wurde $a_+ < a_-$ und damit $q > 1$. So war z B. bei 2 aufeinanderfolgenden Messungen:

1) mit Erdleitung $a_+ = 37.5$, $a_- = 25.1$, $q = \frac{a_-}{a_+} = 0{,}66$,

2) ohne Erdleitung $a_+ = 27{,}1$, $a_- = 37.2$, $q = \frac{a_-}{a_+} = 1.36$.

Hier hat also eine Erdung des Schutzdaches gerade den umgekehrten Effect wie im Freien. Die Erklärung könnte vielleicht

Digitized by Google

darin gesucht werden, daß hier im Keller das isoliert aufgestellte Metallgestell mit dem Schutzdache sich allmählich negativ ladet, wie w. u. gezeigt werden soll.

In dieser ionenreichen Luft (ca. 6 elektrostatische Einheiten freier Elektricität pro cbm von beiden Elektricitätsarten) gelangen auch die Radioaktivierungen negativ geladener Drähte vorzüglich, die schon während des vergangenen Sommers im Freien ausgeführt worden waren. Benutzt wurden Kupfer- und Aluminiumdrähte von 0,5 bezw. 1,0 mm Durchmesser und ca. 60 m Länge, welche an Isolierträgern von der von Elster-Geitel angegebenen, von Günther in Braunschweig ausgeführten Form (Hartgummi mit Natriumtrocknung) ausgespannt waren. Um den Betrag der auf diesen Drähten inducierten Radioaktivität festzustellen, wurden teils mit den beim Abreiben der Drähte mit Lederlappen auf diesen zurückgebliebenen Rückständen Radiogramme von Kupfer- oder Bleischablonen durch Aluminiumbleche hindurch angefertigt; die erhaltenen Negative sind z. T. überaus kräftig, so daß an der Aktivierung der Drähte nicht gezweifelt werden kann; teils wurde die Ionisierung bestimmt, welche die auf eine Trommel aufgewickelten und aus dem Keller herausgebrachten Drähte einem den Zerstreuungskörper eines Elster-Geitel-Apparates umgebenden bestimmten Luftquantum erteilten. Der Ionengehalt dieses Luftquantums war in 40—50 Minuten auf die Hälfte seines ursprünglichen Wertes herabgesunken, so daß wir hier fast genau auf dieselben Abklingungswerte wie Rutherford und Allen kommen. Auch dieses Ergebnis spricht dafür, daß keine Thoriuminfection der Luft vorlag, da die durch Thorstrahlen inducierte Radioaktivität durch eine ganz andere Abklingungsconstante charakterisiert ist, vgl. die Arbeit von Rutherford-Allen (Phys. Ztschr. 3 p. 228. 1902).

Man hat vielfach die Frage diskutiert, welches die Träger dieser eigentümlichen Strahlungsinduktion in der atmosphärischen Luft sind. Da sie auf einem negativ geladenen Leiter angesammelt werden, so ist ohne Weiteres klar, daß sie nicht elektrisch neutral sein können, sondern mit präformierter freier positiver Electricität beladen sein müssen. Sehr instruktiv waren in dieser Beziehung die während der Drahtexposition gleichzeitig von Ruf ausgeführten Messungen der Zerstreuung. Von dem Momente an, in dem der Draht mit Hilfe eines Induktoriums (unter Zwischenschaltung von Platte und Spitze und eines nassen Fadens zur Dämpfung der Oscillationen) auf 2000—3000 Volt geladen wurde, ging an dem 2 Meter entfernten Apparat die Zer-

Digitized by Google

streuung für $-$ Ladung von $a_- = 34{,}0\%$ auf $a_- = 90{,}\%$ herab dagegen für positive Ladung von $a_+ = 38{,}5\%$ auf $a_+ = 47{,}7\%$ hinauf. Wir haben hier also einen deutlichen Einfluß des von dem Drahte ausgehenden elektrischen Kraftfeldes vor uns. Es dauerte gewöhnlich 15 Minuten bis sich ein den früheren Verhältnissen entsprechender Gleichgewichtszustand in der Ionenführung des Luftraumes nach Abstellen des Inductoriums wieder herstellte.

Sehr bemerkenswert war indessen, daß auch ein ungeladener Draht, welcher 3 Wochen lang in dem Keller ausgespannt gewesen war, radioaktive Eigenschaften angenommen hatte, wenn auch seine Aktivierung nur etwa $^1/_{50}$ von derjenigen war, die derselbe Draht angenommen hatte, wenn er negativ geladen 16 Stunden in derselben Luft exponiert wurde.

Diese merkwürdige Erscheinung hängt vielleicht mit der folgenden zusammen:

In der sehr ionenreichen Kellerluft zeigte sich eine Erscheinung mit ziemlicher Sicherheit, die mit wechselndem Erfolge im Verlaufe des verflossenen Jahres auch im Freien sich mehrfach gezeigt hatte, nämlich die spontane negative Elektrisierung isoliert aufgehängter leitender Körper.

J. J. Thomson und J. Zeleny haben schon früher bemerkt, daß ein metallischer in gewöhnlicher, durch Röntgenstrahlen ionisierter Luft isoliert aufgestellter Körper sich von selbst bis zu einem gewissen Potentiale negativ ladet; Zeleny der die Beweglichkeiten der Gasionen unter der Wirkung bestimmter Spannungsgefälle genauer feststellte, zeigte, daß diese Ladung als Ausdruck für die größere Wanderungsgeschwindigkeit der negativen Ionen angesehen werden muß[1]); denn wenn Ionen mit der sie tragenden Luft an der Oberfläche eines Metallkörpers entlang streichen, so veranlassen sie vermöge ihrer Ladungen durch Influenz das Auftreten ungleichnamiger Elektricität an der Metallwand; es tritt eine anziehende Wirkung zwischen der Ionenladung und der Influenzladung ein. Die leichter und schneller beweglichen negativen Ionen vermögen dieser Anziehung besser zu folgen, als die langsamer beweglichen positiven Ionen. Es wird also im Allgemeinen mehr negative als positive Elektricität an den Metallkörper abgegeben. Sehr hoch kann freilich das Potential dieser spontanen Ladungen nicht ansteigen, weil bald die elektrostatische Anziehung des negativ geladenen Körpers auf die + Ionen

1) J. Zeleny, Phil. Mag. (5). 46, 134, 1898.

Digitized by Google

deren geringere Eigenbewegung compensiert. Nehmen wir für die Ladungen und Geschwindigkeiten der Luftionen die Werte an, die sich auch sonst für die Gasionen ergeben haben, so ist die Berechnung der Höhe der negativen Ladung, die ein in ionisierter Luft von bestimmtem Ionengehalte frei aufgestellter isolierter Metallkörper annehmen kann, ein vollkommen bestimmtes Problem; die Differenz, um welche sich das Potential des Körpers gegen die dauernd mit der Erde in leitender Verbindung stehenden Wände des Hohlraumes allmählich erniedrigt, ist weder von der Natur der leitenden Oberflächen noch von deren Größe, sondern nur von dem Gehalte an freien Ionen abhängig; diese Potentialdifferenz kann mehrere Volt betragen. Dies bestätigten Versuche in dem genannten Kellerraume.

Kugeln, Cylinder aus zusammengewickeltem Drahtnetz, Metallröhren, welche mit einem in einem dichten Kasten eingeschlossenen Elektrometer von kleiner Capacität, einem Bohnenberger'schen Elektroskope mit Trockenladesäule, in Verbindung standen, wurden zunächst mit dem Boden, der Decke oder den Wänden des Kellers in leitende Verbindung gesetzt. Wurde diese Verbindung dann aufgehoben, so zeigte sich negative Ladung, die erst schnell, dann immer langsamer anwuchs und Werte bis zu 8 Volt erreichte. Wurde die Verbindung mit der Kellerwandung wieder hergestellt, so zeigte das Elektrometer das Einwandern positiver Electricität an, der ursprüngliche Skalenwert wurde wieder erreicht. Man kann diesen Proceß beschleunigen, wenn man Hohlformen anwendet, durch die man die Luft mittels Aspiratoren hindurchsaugt. Sehr gute Resultate habe ich mit Röhren erhalten, in denen Packete von feinen blanken Nähnadeln festgeklemmt waren, so daß die Luft durch die sehr zahlreichen engen Canälchen zwischen den Nadeln und zwischen diesen und den inneren Rohrwänden streichen mußte.

Ich habe auch vielfache Versuche mit Hohlkörpern mit großer innerer Fläche im Freien angestellt. Wenn hier auch die negativen Ladungen fast immer beim Einsaugen reiner ionenreicher Luft gewonnen werden, so bringt doch das Bestehen eines elektrischen Erdfeldes große Störungen mit sich, die den gesuchten Effect vollkommen überdecken können. So ist ja ein isoliert in der freien Luft aufgehängter Hohlkörper, den man für einen Moment zur Erde abgeleitet hat, bereits gegen die Luft negativ geladen bei positivem atmosphärischem Potentialgefälle.

Man kann diese Störung umgehen, wenn man in einem elektrostatisch genügend geschützten Raume (z. B. innerhalb einer

Digitized by Google

Dachluke) arbeitet. Die Bedeutung dieser Erscheinung für die Erklärung der negativen Erdladung wurde schon von Elster und Geitel erkannt.

C) Im Laboratorium wurden zahlreiche Zerstreuungsmessungen unter Glasglocken, wie sie zuerst von Elster und Geitel angestellt wurden, von Ruf für verschiedene Gase durchgeführt. Es ergab sich, daß bei zwei Luftproben, die unter gleichen Bedingungen in Glocken von 18 bezw. 68 l Inhalt eingeschlossen worden waren, die nach gleichen Zeiten gemessenen Zerstreuungen sich annähernd verhielten wie die Volumina.

Kohlensäure, die durch Einwirken von Salzsäure auf Marmor frisch bereitet war, wurde in die kleinere Glasglocke gefüllt. Sie zeigte gleich nach dem Einfüllen starken Ionengehalt, der aber bald wieder abnahm, um mit der Zeit ähnlich wie bei der Luft wieder anzusteigen.

Versuche mit Füllungen von Sauerstoff und Leuchtgas ergaben in der kleineren Glocke zwar auch Zunahmen der Zerstreuung mit der Zeit, aber in sehr wechselndem Betrage; die Versuche sollen mit der großen Glocke wiederholt werden.

Läßt man flüssige Luft unter einer Glasglocke verdampfen, so ändert sich während dieses Vorganges die Zerstreuung in der Glocke nicht; nach dem Verdampfen des letzten Restes steigt indessen der Ionengehalt in dem Raum plötzlich auf ein Mehrfaches seines ursprünglichen Betrages an. Dasselbe geschieht auch, wenn man die abgedampfte Luft von Außen her durch die Glocke hindurchströmen läßt.

Die Erscheinung hängt vermutlich mit der von Ebert und B. Hoffmann gefundenen Elektrisierung in flüssiger Luft durch Eisreibung zusammen. Versuche, bei denen die Luftionen aus den verschiedenen Bereichen einer zwischen Spitze und Platte übergehenden Glimmentladung abgesaugt werden, und über den Zusammenhang der sich hierbei ergebenden Erscheinungen mit dem von Himstedt gefundenen Phänomene sind im Gange.

Mehrere Reihen von Messungen mit gut isolierten Drahtkäfigen von verschiedener Maschenweite wurden in einem vorher gründlich ausgelüfteten Zimmer des Laboratoriums angestellt, um den Einfluß mit der Ladung des Zerstreuungskörpers gleichnamiger oder ungleichnamiger Käfigladungen zu studieren. Diese Untersuchungen wurden namentlich zu dem Zwecke vorgenommen um die für Ballonfahrten günstigsten Verhältnisse auszuprobieren. Denn es läßt sich nicht leugnen, daß man ein unbestimmtes Moment in die Zerstreuungsmessungen einführt, wenn man den den

Digitized by Google

Zerstreuungsapparat umgebenden Drahtnetzkäfig etwa durch Anlegen der Trockensäule auf ein Potential ladet, dessen Höhe man nicht genau kennt; dieser Nachtheil kann den Vorteil überwiegen, der darin liegt, daß bei gleichnamiger Käfigladung der Zerstreuungsvorgang wesentlich beschleunigt wird wie schon Elster und Geitel fanden. Arbeitet man am Erdboden, so läßt sich die Potentialhöhe der Käfigladung durch ein Hilfselektroskop ermitteln. Im Freiballon dagegen ist dies nicht mehr möglich, weil hier das Nullniveau der Spannungen nicht mehr zugänglich ist, und man den Spannungswert, auf welchem sich der Ballon und die mit ihm verbundenen Teile etwa befinden, daher gar nicht direkt bestimmen kann. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sollen demnächst publiciert werden.

Einige Laboratoriumversuche bezogen sich auf den Einfluß der atmosphärischen Leitfähigkeit auf die Messungen des Luftpotentialgradienten. Bei den Messungen am Boden bedingt der jetzt wohl allgemein verwendete Flammencollector einen so raschen Ausgleich der Spannungen, daß dagegen der Verlust durch die Luft hindurch an den Teilen des Systems kaum in Betracht kommt. Anders im Ballon. Hier ist man auf Wassertropfcollectoren angewiesen, von denen man lange Drähte oder Ketten von der Ballongondel aus 8, 10 oder 12 m weit herabhängen läßt; die von den Enden dieser langen Leitungen sich loslösenden Tropfen bedingen den Potentialausgleich der leitenden Systeme gegen die Umgebung. Aber dieser Ausgleich erfolgt verhältnißmäßig langsam, jedenfalls so langsam, daß der Verlust durch Ionenleitung in der umgebenden Luft, der mit wachsender Höhe immer größer wird, dagegen nicht mehr zu vernachlässigen ist. Gelingt es dem Ballonführer auch den Ballon längere Zeit in derselben Luftschicht zu erhalten, so hängt der stationäre elektrische Zustand, der sich schließlich am Potentialmeßapparate ausbildet, eben so sehr von der aus dem Erdfelde Electricität aufsammelnden Thätigkeit der abfallenden Tropfen wie von dem Verlust an den Zuleitungen durch Leitfähigkeit der Luft ab. Wird die letztere groß, so kann ein Längenunterschied von 2 m bis zu den Abtropfstellen den Potentialunterschied auf dieser Strecke zu klein erscheinen lassen. Daß der (positive) atmosphärische Potentialgradient mit der Höhe abnimmt, dürfte durch die bisherigen luftelektrischen Ballonmessungen außer Zweifel gestellt sein; die Größe der gemessenen Abnahme kann aber bei der bisher benutzten Anordnung durch Störungen, wie die genannte, wesentlich modificiert sein.

Den Potentialausgleich durch glimmende Lunten oder stark

Digitized by Google

radioaktive Substanzen zu bewirken, was sonst sehr bequem ist, verbietet sich, wenn bei der Fahrt gleichzeitig Zerstreuungsmessungen angestellt werden sollen. Durch Laboratoriumversuche soll eine andere Anordnung ausprobiert werden, um die atmosphärischen Potentialgradienten in der Höhe vom Freiballon aus mit größerer Sicherheit abtasten zu können. —

München, April 1902.

Digitized by Google

Bericht über die Thätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie.

Von

Fr. Exner.

Vorgelegt durch Ed. Riecke in der Sitzung vom 3. Mai 1902.

Gemäß dem letzten Cartellbeschlusse hat die Wiener Akad. d. Wiss. im abgelaufenen Jahre 4 luftelektrische Stationen errichtet und zwar in Wien, Triest, Kremsmünster und Innsbruck. Eine fünfte Station, auf der Spitze des hohen Sonnblick, konnte bisher der schlechten Witterungsverhältnisse wegen nicht aktivirt werden, sie wird aber Anfangs Mai ihre Thätigkeit aufnehmen.

An den Stationen Wien, Triest und Kremsmünster werden fortlaufende Messungen des Potentialgefälles mittelst selbstregistrirender Instrumente, sowie täglich einmalige Messungen der Zerstreuung der Elektricität ausgeführt; in Innsbruck wird nur die letztere Beobachtung ausgeführt, während am Sonnblick-Observatorium wieder beide Arten von Messungen vorgenommen werden sollen. Die verwendeten selbstregistrirenden Instrumente sind die von Dr. Benndorf construirten, sie registriren mechanisch, erfordern also keinen photographischen Apparat und funktioniren 8 Tage ohne Bedienung. Als Collectoren wurden an allen Stationen Radiumpräparate mit sehr gutem Erfolge verwendet.

Alle Stationen haben mit 1. Januar d. J. ihre Thätigkeit aufgenommen; leider waren die Witterungsverhältnisse seitdem für luftelektrische Beobachtungen wenig günstige, doch sollen die Ergebnisse der einzelnen Stationen im folgenden dem Wesen nach mitgetheilt werden; eine Wiedergabe des ganzen Beobachtungsmateriales hätte bei der Kürze der Beobachtungszeit und bei dem informatorischen Charakter den die Messungen vorläufig tragen, wohl kaum Werth.

Digitized by Google

I. Station Wien (k. k. Central-Anstalt für Meteorologie, Beobachter Dr. Conrad).

a) Potentialmessungen.

Da es wichtig war über das correcte Funktioniren der Radium-Elektroden Aufschluß zu erhalten, so wurden in Wien 2 selbstregistrirende Elektrometer neben einander aufgestellt, das eine mit einer Radium-Elektrode, das andere mit einem gewöhnlichen Wassercollector verbunden. Die Aufzeichnungen beider sind, bis auf ganz minimale vereinzelte Störungen, vollkommen identisch, so daß die Wirkung der Radiumelektroden als correkt angesehen werden kann. Seit Beginn der Beobachtungen hat sich an denselben auch keine Veränderung der Wirksamkeit gezeigt.

Die Registrirungen — von 10 zu 10 Minuten — lassen außer den bekannten Störungen bei Regen, deutlich ein Minimum während der frühen Morgenstunden (1^h—4^h a.) sowie ein flaches Nachmittags-Maximum erkennen, doch waren die Witterungsverhältnisse bisher zu ungünstige, um über die tägliche Periode mehr aussagen zu können.

b) Messung der Zerstreuung.

Die täglichen Zerstreuungsmessungen ergaben ein Ueberwiegen der Zerstreuung negativer Elektricität; es überwog in 33 Proc. der Fälle die positive, in 67 Proc. die negative Zerstreuung. Auffallender Weise war dabei ein Einfluß der Windrichtung nicht bemerkbar, obwohl das Observatorium am Rande der Stadt gelegen ist. Die Extreme der Zerstreuung waren folgende:

	Min.	Max.
a_-	0.78	5.42
a_+	0.32	7.10.

II. Station Triest, Beobachter Herr Dir. E. Mazelle; derselbe theilt folgendes mit:

Mit Beginn dieses Jahres wurde dem Berichterstatter seitens der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, über Antrag des wirklichen Mitgliedes Prof. Franz Exner, ein Benndorf'sches selbstregistrirendes Elektrometer, ein Exner'sches transportables Elektroskop, wie auch ein Günther'scher Zerstreuungsapparat nach Elster und Geitel zur Vornahme von luftelektrischen Beobachtungen zur Verfügung gestellt. Die Aufstellung des Elektrometers besorgte in liebenswürdiger Weise Dr. H. Benndorf selbst

Digitized by Google

und konnten diese Beobachtungen mit dem 7. Januar l. J. beginnen.

Dieses Elektrometer wurde im Barographen-Zimmer des k. k. Observatoriums in Triest — Seehöhe 68 m — aufgestellt, während die Radiumelektrode in der Südwest-Ecke des Beobachtungs-Pavillons, gegen Borastöße geschützt, in einer Höhe von 3 m über den Erdboden isolirt aufgehängt wurde.

Da an eine Ausmessung der Curven noch nicht geschritten werden konnte, so kann vorläufig nur erwähnt werden, daß aus den Curven mit besonders ausgeprägter täglicher Periode eine doppelte Schwankung ersichtlich wäre, mit den Maxima bei ca. $9\frac{1}{2}$ h a. und ca. 7 h p.

Die Zerstreuungs-Beobachtungen konnten mit dem 11. Februar l. J. in Angriff genommen werden und zwar wurde der Günther'sche Zerstreuungsapparat in einer Fensternische des Vorzimmers der Direktionskanzlei des Observatoriums, in einer Seehöhe von 66 m, 12 m über dem Erdboden, aufgestellt.

Für diese vom Referenten täglich um die Mittagszeit vorgenommenen Zerstreuungsmessungen wurde als Zeiteinheit das Intervall von 15 Minuten angenommen.

Zuerst mußten, da schon der kleinste Borastoß in dieser exponirten Lage des Observatoriums den Deckel des Schutzcylinders lüftete, die Messungen ohne Deckel vorgenommen werden, später aber wurde, um den Vergleich mit anderen Beobachtungsstellen zu erleichtern, nachdem ein um den oberen Rand des Schutzcylinders laufender messingener Reifen mit zwei federnden Klammern angebracht wurde, der Deckel stets aufgesetzt.

Aus den bisherigen Beobachtungen über die Elektricitätszerstreuung läßt sich hervorheben, daß die Tage mit vorwiegender negativer Zerstreuung häufiger vorkommen, als die mit vorherrschender positiver Zerstreuung, da in den 64 Fällen nur 19 mal, demnach bei 30 Proc. der Beobachtungen die Zerstreuung des mit positiver Elektricität geladenen Conductors größer war, als die Zerstreuung der negativen Elektricität, während an 45 Tagen d. s. 70 Proc. die negative Zerstreuung die überwiegende war.

Trennen wir die Beobachtungen nach der Bewölkung, indem wir auf Grund der noch zu kurzen Beobachtungs-Reihe diese Trennung nur nach heiteren (Bewölkung 0—5) und trüben Tagen (Bewölkung 6—10 der 10theiligen Skala, Beobachtung des Himmelszustandes 12 h mittags) vornehmen, so folgt, daß die Beobachtungen mit vorherrschender positiver Zerstreuung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.26 bei heiterem Himmel eintreffen, mit einer

Digitized by Google

Wahrscheinlichkeit von 0.74 hingegen bei bewölktem Himmel, während an den Tagen mit größerer negativer Zerstreuung diese Wahrscheinlichkeits-Werthe 0.47 und 0.53 betragen. Es kommt demnach die überwiegende positive Zerstreuung hauptsächlichst bei bewölktem Himmel vor, während bei der vorherrschend negativen Zerstreuung sich die Tage mit heiterem und trübem Himmel so ziemlich das Gleichgewicht halten. Hervorzuheben wäre noch, daß bei heiterem Himmel viermal so oft Tage mit größerer negativer Zerstreuung vorkommen, also solche mit vorwiegender positiver (21 gegen 5), bei bewölktem Himmel kaum zweimal (24 gegen 14).

Bilden wir uns die Quotienten zwischen der negativen und positiven Zerstreuung, so finden wir für die Bewölkung 0—5 einen mittleren Quotienten von 1.22, für die Bewölkung 6—10 hingegen 1.12. Es ist demnach auch die Größe der negativen Zerstreuung der positiven gegenüber bei heiterem Himmel überwiegender, als bei trübem Himmel.

Schon bei den täglichen Ablesungen machte sich die Thatsache bemerkbar, daß die Zerstreuung bei bewegter Luft größer wird im Vergleiche zu den Tagen mit Windstille oder kaum bewegter Luft.

Es wurden zur genaueren Darstellung die Angaben des Anemographen, der drei Stunden 10^h Vormittags bis 1^h Nachmittags herangezogen, die stündlichen Mittel der Windgeschwindigkeit daraus bestimmt und diese in 3 Gruppen geordnet und zwar nach den Schwellenwerthen 0—9 km p. Stunde, 10—19 km und mit über 20 km p. Stunde. Für diese Untersuchung wurden die ersten Beobachtungstage, an welchen die Messungen bei unbedecktem Schutzcylinder vorgenommen wurden, nicht berücksichtigt.

Aus den 48 Beobachtungen lassen sich nachfolgende Daten bestimmen:

	Zerstreuung, Δ Volt, in 15 Minuten	
	bei positiver Ladung	bei negativer Ladung
0—9 km p. Stunde, 27 Fälle, ...	6.70	7.87
10—19 km p. Stunde, 14 Fälle, ...	9.48	11.18
$\geqq$ 20 km p. Stunde, 7 Fälle, ...	25.90	19.24.

Man ersieht demnach, wie mit der Zunahme der Windgeschwindigkeit die Zerstreuung, sowohl die negative als auch die positive wächst.

Besonderes Interesse zeigt der abnorm hohe Elektricitäts-

Digitized by Google

verlust an stürmischen Boratagen. Seit Beginn der Messungen konnten an 5 Tagen die Beobachtungen bei starker Bora vorgenommen werden, wobei die ersten 3 Beobachtungen bei unbedecktem Schutzcylinder stattfanden und demnach zu hohe Zerstreuungswerthe ergaben.

Infolge der schon am ersten Boratage sofort auffallenden außerordentlich raschen Zerstreuung wurde das Elektroskop nicht aus den Augen gelassen und konnte förmlich die successive Abnahme der Blättchen-Divergenz am Elektroskop verfolgt werden. Namentlich war die sprungweise Abnahme bei jedem Borastoß auffällig.

Die von 5 zu 5 Minuten vorgenommenen Ablesungen ergaben nachfolgende neutralisirte Elektricitätsmengen, in Volt ausgedrückt:

	16. Februar		17. Februar		19. Februar		4. März		7. April	
Abnahme in den	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
ersten 5 Minuten	23.0	30.3	11.3	13.8	15.4	13.2	7.2	8.2	21.2	14.8
zweiten 5 Minuten	22.0	31.0	17.0	15.3	12.9	11.4	10.7	7.1	29.5	12.6
dritten 5 Minuten	20.0	31.0	19.1	16.6	18.1	13.0	7.1	6.0	27.0	11.2
15 Minuten	65.0	92.3	47.4	45.7	46.4	37.6	25.0	21.3	77.7	38.6
Windgeschwindigkeit in km p. Stunde	105		40		48		67		71	
	bewölkt		bewölkt		heiter		bewölkt		Regen	
	Anticyklone im Osten und Nordosten Europa's Cyklone über Süditalien.						Anticyklone im Norden, Cyklone im Süden Europa's.		Secundäre Depressionen in der Nord-Adria u. im Golf v. Lyon, Anticyklone im NW. Europa's.	

Zum Vergleiche soll angeführt werden, daß bei unbedecktem Schutzcylinder die kleinste Zerstreuung in 15 Minuten am 14. Februar mit 5.0 Volt. bei positiver und 5.1 bei negativer Ladung gefunden wurde und zwar bei bewölktem Himmel und Windstille, bei aufgesetztem Schutzdeckel am 27. Februar mit 3.6 die kleinste positive Zerstreuung, am 28. Februar die kleinste negative Zerstreuung mit 3.3, bei Regen und Windstille.

Inwieweit die oben gefundenen abnorm hohen Zerstreuungs-Werthe mit dem bei Bora stattfindenden Herunterstürzen der Luft aus den hohen Luftdrucken in Zusammenhang zu bringen ist, dürfte bei Fortsetzung dieser Beobachtungen und bei den dann

Digitized by Google

anzustellenden Vergleichen mit den Beobachtungen an Bergobservatorien und in Luftballons entschieden werden.

III. Station Kremsmünster. Beobachtungsort: der astronomische Thurm des Stiftes Kremsmünster circa 50^m über der Thalsohle; Beobachter: Herr Direktor P. F. Schwab.

a) Potentialmessungen.

Die Curven des registrirenden Elektrometers zeigen im Allgemeinen einen viel gleichförmigeren Verlauf als jene von Wien und Triest, was auf den localen Einfluß der Großstädte zurückzuführen ist. Die seit Anfang Jänner fortlaufenden Beobachtungen scheinen eine einfache tägliche Periode zu ergeben, soweit dies vorläufig aus den Diagrammen zu ersehen ist. Vereinzelte Schneefälle scheinen den Gang des Elektrometers nicht wesentlich zu stören, ganz im Gegensatz zu Regenfällen, die schon in geringster Menge sehr starke Störungen zur Folge haben. Das Elektrometer funktionirte zur vollen Zufriedenheit.

b) Zerstreuungsmessungen.

Dieselben wurden täglich zwischen 11^h und 1^h vorgenommen und ergaben im Allgemeinen eine stärkere Zerstreuung der — Elektricität. Die positive Zerstreuung wurde größer gefunden in 35 Proc. aller Fälle, die negative dagegen in 65 Proc.

Gleichzeitig wurden auch Messungen der photochemischen Strahlung des Himmels ausgeführt; es zeigte sich zwischen diesen und den Coefficienten der Zerstreuung kein einfacher Zusammenhang.

IV. Station Innsbruck. An dieser Station wurden nur Zerstreuungs-Messungen ausgeführt und zwar durch Prof. P. Czermak an der dortigen Universität.

Die Beobachtungen wurden mit December 1901 begonnen und bis auf eine Lücke von 26 Tagen zu Ende dieses Monats und Anfang des Januar 1902 regelmäßig fortgeführt. Bis jetzt liegen 98 Beobachtungen zur Mittagszeit vor, unter welchen 24 Föhntage enthalten sind. An 23 Tagen wurde auch noch eine Nachmittagsbeobachtung gemacht.

Die vorläufigen Ergebnisse sind folgende:

Digitized by Google

Das Mittel aller 98 Beobachtungen zu Mittags ist	$a_- = 1.89$	$a_+ = 2.01$	$q = 0.94$
Das Mittel der 74 Mittagsbeobachtungen ohne Föhn	1.65	1.70	0.97
Das Mittel der 24 Mittagsbeobachtungen mit Föhn	2.65	2.95	0.89
Das Mittel der 23 Mittagsbeobachtungen mit gleichzeitigen Nachmittagsbeobachtungen	2.04	2.03	1.01
Das Mittel der 23 Nachmittagsbeobachtungen	3.29	3.29	1.01

Man kann aus dem Zahlenmateriale vorläufig ersehen daß:

1) An 40 Tagen die negative, an 58 Tagen die positive Zerstreuung überwog.

2) Bei einer Ordnung der Werthe nach Pentadenmitteln die Zerstreuung seit dem Winter in stetem Wachsen begriffen ist.

3) Die Zerstreuung an Föhntagen stets erhöht ist.

4) An den 23 Tagen die Nachmittagsbeobachtungen ebenfalls einen wesentlich höhern Werth ergaben als die Mittagsbeobachtung.

Im Gegensatze zu den Messungen in Wien, Triest und Kremsmünster sind also hier die positiven Zerstreuungen häufiger die überwiegenden.

Digitized by Google

Digitized by Google

Ueber die Grundlagen der Geometrie.

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. November 1901.

Die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz über die Grundlagen der Geometrie veranlaßten Lie das Problem der axiomatischen Behandlung der Geometrie unter Voranstellung des Gruppenbegriffes in Angriff zu nehmen und führten diesen scharfsinnigen Mathematiker zu einem System von Axiomen, von denen er mittelst seiner Theorie der Transformationsgruppen nachwies, daß sie zum Aufbau der Geometrie hinreichend sind[1]).

Nun hat Lie bei Begründung seiner Theorie der Transformationsgruppen stets die Annahme gemacht, daß die die Gruppe definirenden Functionen differenzirt werden können, und daher bleibt in den Lie'schen Entwickelungen unerörtert, ob die Annahme der Differenzirbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder ob die Differenzirbarkeit der betreffenden Funktionen nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Auch ist Lie zufolge seines Verfahrens genöthigt, ausdrücklich das Axiom aufzustellen, dass die Gruppe der Bewegungen von infinitesimalen Transformationen erzeugt sei. Diese Forderungen, sowie wesentliche Bestandtheile der übrigen von Lie zu Grunde gelegten Axiome bezüglich der Natur der die Punkte gleicher Ent-

1) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3 Abtheilung 5.

Digitized by Google

fernung definirenden Gleichung lassen sich rein geometrisch nur auf recht gezwungene und complicirte Weise zum Ausdruck bringen und scheinen überdies nur durch die von Lie benutzte analytische Methode, nicht durch das Problem selbst bedingt.

Ich habe daher im Folgenden für die ebene Geometrie ein System von Axiomen aufzustellen gesucht, welches ebenfalls auf dem Begriff der Gruppe beruhend, nur einfache und geometrisch übersichtliche Forderungen enthält und insbesondere die Differenzirbarkeit der die Bewegung vermittelnden Functionen keineswegs voraussetzt. Die Axiome des von mir aufgestellten Systems sind als specielle Bestandtheile in den Lie'schen Axiomen enthalten oder, wie ich glaube, aus ihnen sofort ableitbar.

Meine Beweisführung ist völlig von der Methode Lie's verschieden: ich operire vornehmlich mit den von Cantor ausgebildeten Begriffen der Theorie der Punktmengen und benutze den Satz von C. Jordan, wonach jede ebene stetige geschlossene Curve ohne Doppelpunkte die Ebene in ein inneres und ein äußeres Gebiet theilt.

Gewiß sind auch in dem von mir aufgestellten System noch einzelne Bestandtheile entbehrlich; doch habe ich von einer weiteren Untersuchung dieses Umstandes abgesehen aus Rücksicht auf die einfache Fassung der Axiome und vor Allem, weil ich eine verhältnißmäßig zu complicirte und geometrisch unübersichtliche Beweisführung vermeiden wollte.

Ich behandle im folgenden die Axiome nur für die Ebene, obwohl ich meine, daß ein analoges Axiomensystem für den Raum aufgestellt werden kann, das den Aufbau der räumlichen Geometrie in analoger Weise ermöglicht.

Wir schicken eine Erklärung voran.

Erklärung. Wir verstehen unter der *Zahlenebene* die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Coordinatensystem x, y.

Eine doppelpunktlose und einschließlich ihrer Endpunkte stetige Curve in dieser Zahlenebene heiße eine *Jordansche Curve.* Ist eine Jordansche Curve geschlossen, so heiße das Innere des von derselben begrenzten Gebietes der Zahlenebene ein *Jordansches Gebiet.*

Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Punkten. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Theilsysteme von Punkten, zu

---

1) Durch die nachfolgende Untersuchung wird zugleich, wie ich glaube eine allgemeine die Gruppentheorie betreffende Frage, die ich in meinem Vortrag „Mathematische Probleme", Göttinger Nachrichten 1900, S. 17 aufgeworfen habe, für den speziellen Fall der Gruppe der Bewegungen in der Ebene beantwortet.

Digitized by Google

denen er selbst gehört und welche Umgebunyen des Punktes A heißen.

Die Punkte einer Umgebung lassen sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen Jordanschen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Jedes in diesem Jordanschen Gebiete enthaltene Jordansche Gebiet, welches den Punkt A umschließt ist wiederum eine Umgebung von A. Das Jordansche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung genannt. Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte umkehrbar eindeutige Transformation der betreffenden Jordanschen Gebiete aufeinander eine stetige.

Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes A giebt es stets eine solche Umgebung des Punktes A die beiden Umgebungen gemeinsam ist.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Geometrie sind, so giebt es stets eine Umgebung die beide Punkte A und B gleichzeitig enthält.

Diese Forderungen enthalten, wie ich glaube, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffes, den Riemann und Helmholtz als „mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit“ und Lie als „Zahlenmannigfaltigkeit“ bezeichneten und ihren gesammten Untersuchungen zu Grunde legten.

Die wesentlichen Merkmale unserer Definition fassen wir kurz zusammen, wie folgt:

Definition der Ebene. Die Ebene ist eine zweidimensionale zusammenhängende Mannichfaltigkeit von Punkten.

Der leichteren Darstellung und Fasslichkeit wegen will ich in der vorliegenden Untersuchung stets annehmen, daß es möglich ist, die sämmtlichen Punkte unserer Geometrie zugleich auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein bestimmtes Theilsystem derselben umkehrbar eindeutig abzubilden, so daß dann jeder Punkt unserer Geometrie durch ein bestimmtes Zahlenpaar x, y charakterisirt ist. Wir formuliren diese engere Fassung des Begriffes der Ebene, wie folgt:

Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Punkten, die sich umkehrbar eindeutig auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein gewisses Theilsystem derselben abbilden lassen. Zu edem Pu nkle A unserer Geometrie giebt es Jordansche Gebiete, in deren Innerem der Bildpunkt von A liegt und deren sämmtliche Punkte ebenfalls Punkte unserer Geometrie darstellen. Diese Jordanschen Gebiete heißen Umgebungen des Punktes A. Jedes in einem Jordanschen Gebiet enthaltene Jordansche Gebiet, welches den Punkt A einschließt,

Digitized by Google

heißt wiederum eine Umgebung von A. Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so heißt diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Geometrie sind, so giebt es stets eine Umgebung, die beide Punhte A und B zugleich enthält.

Definition der Bewegung. Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige Transformation der Ebene in sich von der Art, daß, wenn der Puukt A in den Punkt B transformirt wird, zugleich jede Umgebung des Punktes A stetig d. h. durch Vermittlung umkehrbar eindeutiger stetiger Functionen der Coordinaten x, y der Zahlenebene in eine Umgebung des Punktes B übergeht. Eine Bewegung, bei welcher der Punkt M ungeändert bleibt, heißt eine Drehung um den Punkt M.

Diese Definition formuliren wir kurz wie folgt:

Definition der Bewegung. Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Ebene in sich.

Legen wir — wie es in der gegenwärtigen Untersuchung geschehen soll — die Definition der Ebene in der engeren Fassung zu Grunde, so lassen sich von vornherein zwei Arten von umkehrbar eindeutigen stetigen Transformationen der Zahlenebene in sich unterscheiden. Nehmen wir nämlich irgend eine geschlossene Jordansche Curve in der Zahlenebene an und denken uns dieselbe in einem bestimmten Sinn durchlaufen, so geht dieselbe bei einer solchen Transformation wiederum in eine geschlossene Jordansche Curve über, die in einem gewissen Sinne umlaufen wird. Wir wollen nun in der gegenwärtigen Untersuchung annehmen, daß dieser Umlaufssinn derselbe ist, wie für die ursprüngliche Jordansche Curve, wenn wir eine Transformation der Zahlenebene in sich anwenden, die eine Bewegung definirt. Diese Annahme[1]) bedingt eine engere Fassung des Begriffes der Bewegung und die Definition der Bewegung, wie wir sie der gegenwärtigen Untersuchung zu Grunde legen wollen, lautet somit folgendermassen:

Definition der Bewegung. Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene in sich von der Art, daß dabei der Umlaufssinn einer geschlos-

---

1) Bei Lie ist diese Annahme in der Forderung enthalten, daß die Gruppe der Bewegnngen durch infinitesimale Transformationen erzeugt sei. Die entgegengesetzte Annahme würde wesentlich die Beweisführung erleichtern, insofern alsdann die „wahre Gerade" unmittelbar als der Ort derjenigen Punkte definirt werden kann, welche bei einer den Umlaufssinn ändernden Bewegung (Umklappung) fest bleiben.

Digitized by Google

senen Jordanschen Curve derselbe bleibt. Eine Bewegung, bei welcher der Punkt M ungeändert bleibt, heißt eine Drehung um den Punkt M.

Axiom I. Werden zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt, so ist die dann entstehende Abbildung der Ebene in sich wiederum eine Bewegung.

Wir sagen kurz:

Axiom I. Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Axiom II. Wenn A und M beliebige von einander verschiedene Punkte sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlich viele verschiedene Lagen bringen.

Nennen wir die Gesammtheit derjenigen Punkte, die durch die Drehungen um M aus einem von M verschiedenen Punkte entstehen, einen *wahren Kreis* in unserer Geometrie, so können wir die Aussage des Axiomes II auch so ausdrücken.

Axiom II. Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.

Dem Axiom III schicken wir eine Erklärung voran.

Erklärung. Es sei A ein bestimmter Punkt in unserer Geometrie und $A_1, A_2, A_3, \ldots$ irgend ein unendliches System von Punkten; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punkte in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um den Punkt A in der Zahlenebene eine beliebig kleine Umgebung α ab; wenn dann irgend welche Bildpunkte A_i in die Umgebung α fallen, so sagen wir, daß es in beliebiger Nähe des Punktes A Punkte A_i gäbe.

Es sei AB ein bestimmtes Punktepaar in unserer Geometrie und $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$ irgend ein unendliches System von Punktepaaren; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punktepaare in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A und B, in der Zahlenebene je eine beliebig kleine Umgebung α bez. β ab; wenn es dann Punktepaare A_iB_i giebt, so daß A_i in die Umgebung α und zugleich B_i in die Umgebung β fällt, so sagen wir, daß es in beliebiger Nähe der Strecke AB Strecken A_iB_i gäbe.

Es sei ABC ein bestimmtes Punktetripel in unserer Geometrie und $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \ldots$ irgend ein unendliches System von Punktetripeln; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punktetripel in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A, B und C in der Zahlenebene je eine beliebig kleine Umgebung α bez. β bez. γ ab; wenn es dann Punktetripel $A_iB_iC_i$ giebt, so daß A_i in die Umgebung α und zugleich B_i

Digitized by Google

in die Umgebung β und C_ι in die Umgebung γ fällt, so sagen wir daß es in beliebiger Nähe des Dreieckes ABC Dreiecke $A_\iota B_\iota C$ gäbe.

Axiom III. Wenn es Bewegungen giebt von der Art, daß Dreiecke in beliebiger Nähe des Dreieckes ABC in beliebige Nähe des Dreieckes $A'B'C'$ gebracht werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Dreieck ABC genau in das Dreieck $A'B'C'$ übergeht[1]).

Die Aussage dieses Axioms wollen wir kurz so ausdrücken:

Axiom III: Die Bewegungen bilden ein abgeschlossenes System.

Einige besondere Fälle des Axioms III heben wir noch hervor, wie folgt:

Wenn es Drehungen um einen Punkt M giebt von der Art, daß Strecken in beliebiger Nähe der Strecke AB in beliebige Nähe der Strecke $A'B'$ gebracht werden können, so giebt es stets auch eine solche Drehung um M, durch welche die Strecke AB genau in die Strecke $A'B'$ übergeht.

Wenn es Bewegungen giebt von der Art, daß Strecken in beliebiger Nähe der Strecke AB in beliebige Nähe der Strecke $A'B'$ gebracht werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche die Strecke AB genau in die Strecke $A'B'$ übergeht.

Wenn es Drehungen um den Punkt M giebt von der Art, daß Punkte in beliebiger Nähe des Punktes A in beliebige Nähe von A' gebracht werden können, so giebt es stets auch eine solche Drehung um M, durch welche A genau in A' übergeht.

Ich stelle nun die Behauptung auf:

Eine Geometrie, in welcher die Axiome I—III erfüllt sind, ist entweder die Euklidische, die Nicht-Euklidische hyperbolische (die Bolyai-Lobatschefsky'sche) oder die Nicht-Euklidische elliptische Geometrie — vorausgesetzt, daß die Begriffe Ebene und Bewegung in dem weiteren Sinne gefaßt werden.

---

1) Es genügt Axiom III für genügend kleine Umgebungen als erfüllt anzunehmen, wie es auch bei Lie geschieht; meine Beweisführung läßt sich so abändern, daß nur diese engere Annahme darin benutzt wird.

Lie hält es ferner für ausreichend, wenn seine Axiome nur „im Allgemeinen" erfüllt sind; darnach wäre es zulässig, daß einzelne Punkte bei allen Drehungen um M ungeändert blieben. Diese Behauptung ist so zu verstehen, daß man noch die ebene Geometrie auf der gewöhnlichen Kugel zu den drei von Lie genannten Geometrieen hinzurechnet, da ja für diese Geometrie die Axiome von Lie „im Allgemeinen" erfüllt sind.

Digitized by Google

Wenn wir die Definitionen der Ebene und der Bewegung, in ihrer engeren Fassung zu Grunde legen, wird offenbar die elliptische Geometrie von vornherein ausgeschlossen, da sich deren Punkte in einer mit unseren Axiomen verträglichen Weise nicht auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene abbilden lassen. In der That führt die folgende Untersuchung nur zu der Euklidischen und der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie.

Den Gedankengang meiner Beweisführung möchte ich kurz wie folgt skizziren[1]):

In der Umgebung irgend eines Punktes M wird durch ein besonderes Verfahren ein gewisses Punktgebilde kk und auf diesem ein gewisser Punkt K construirt und dann der wahre Kreis k durch K um M der Untersuchung unterworfen. Es ergiebt sich leicht, daß der wahre Kreis k eine abgeschlossene und in sich dichte, d. h. eine perfekte Punktmenge ist. Das wichtigste Ziel der weiteren Entwickelungen besteht darin, zu zeigen, daß der wahre Kreis k eine geschlossene Jordansche Curve ist. Dies gelingt, indem wir zunächst die Möglichkeit einer cyklischen Anordnung der Punkte des wahren Kreises k erkennen, hieraus eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte von k auf die Punkte eines gewöhnlichen Kreises schließen und endlich beweisen, daß diese Abbildung nothwendig eine stetige sein muß. Nunmehr ergiebt sich auch, daß das ursprünglich construirte Punktgebilde kk mit dem wahren Kreise k identisch ist. Weiter gilt der Satz, daß jeder wahre Kreis innerhalb k ebenfalls eine geschlossene Jordansche Curve ist.

Wir wenden uns zur Untersuchung der Gruppe aller Bewegungen, die bei den Drehungen der Ebene um M ein bestimmter wahrer Kreis k in sich erfahren kann. Diese Gruppe besitzt folgende Eigenschaften: 1) Jede Bewegung, die einen Punkt von k festläßt, läßt alle Punkte desselben fest. 2) Es giebt stets eine Bewegung, die irgend einen gegebenen Punkt von k in irgend einen anderen Punkt von k überführt. 3) Die Gruppe der Bewegungen ist eine stetige. Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen aller Bewegungen des wahren Kreises in sich. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf: Die Gruppe aller Bewegungen des wahren Kreises in sich, die Drehungen um M sind, ist holoedrisch iso-

1) Die ausführliche Entwickelung des Beweises erscheint demnächst in den mathematischen Annalen.

Digitized by Google

morph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des gewöhnlichen Kreises in sich.

Nunmehr untersuchen wir die Gruppe der Bewegungen aller Punkte unserer Ebene bei den Drehungen um M. Es gilt der Satz, daß es außer der Identität keine Drehung der Ebene um M giebt, welche jeden Punkt des wahren Kreises k festlässt. Wir erkennen jetzt, daß jeder wahre Kreis eine Jordansche Curve ist und gewinnen Formeln für die Transformationen jener Gruppe aller Drehungen. Endlich folgen leicht die Sätze: Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität. Jeder Punkt der Ebene läßt sich durch eine Bewegung gewiß in jeden anderen Punkt der Ebene überführen.

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie zu definiren und die für den weiteren Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln. Zunächst werden die Begriffe Halbdrehung und Mitte einer Strecke definirt. Eine Strecke hat höchstens eine Mitte und wenn man von einer Strecke ihre Mitte kennt, so folgt, daß auch jede kleinere Strecke eine Mitte besitzt.

Um die Lage der Streckenmitten zu beurteilen, haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nöthig, und zwar kommt es vor Allem darauf an, zwei zueinander congruente Kreise zu construiren, die sich einander von außen in einem und nur in einem Punkte berühren. Wir leiten ferner einen allgemeineren Satz über Kreise, die sich von Innen berühren ab und sodann einen Satz über den besonderen Fall, daß der von Innen berührende Kreis durch den Mittelpunkt des berührten Kreises geht.

Nunmehr wird eine bestimmte genügend kleine Strecke als Einheitsstrecke zu Grunde gelegt und aus dieser durch fortgesetzte Halbirung und Halbdrehung ein System von Punkten von der Art construirt, daß jedem Punkte dieses Systems eine bestimmte Zahl a zugeordnet erscheint, die rational ist und nur eine Potenz von 2 als Nenner hat. Nach Aufstellung eines Gesetzes über diese Zuordnung werden die Punkte des gewonnenen Punktsystems untereinander angeordnet, wobei die früheren Sätze über sich berührende Kreise zur Geltung kommen. Jetzt gelingt der Nachweis, daß die den Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... entsprechenden Punkte gegen den Punkt 0 convergiren. Dieser Satz wird schrittweise verallgemeinert, bis wir schließlich erkennen, daß eine jede Punktreihe unseres Systems convergirt, sobald die entsprechende Zahlenreihe convergirt.

Digitized by Google

Nach diesen Vorbereitungen gelingt die Definition der wahren Geraden als eines Systems von Punkten, die aus zwei zu Grunde gelegten Punkten entstehen, wenn man fortgesetzt Halbdrehungen ausführt, die Mitten nimmt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt. Sodann können wir beweisen, daß die wahre Gerade eine stetige Curve ist, keinen Doppelpunkt besitzt und mit irgend einer anderen wahren Geraden höchstens einen Punkt gemein hat. Es ergiebt sich ferner, daß die wahre Gerade jeden um einen ihrer Punkte gelegten Kreis schneidet und hieraus folgt, daß man irgend zwei beliebige Punkte der Ebene stets durch eine wahre Gerade verbinden kann. Auch erkennen wir in unserer Geometrie die Congruenzsätze als gültig, wobei sich jedoch zwei Dreiecke nur dann als congruent erweisen, wenn für sie auch der Umlaufssinn der gleiche ist.

Hinsichtlich der Lage des Systems aller wahren Geraden gegen einander sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Parallelenaxiom gültig ist oder durch jeden Punkt zu einer gegebenen Geraden zwei Gerade existiren, die die schneidenden Geraden von den nicht schneidenden Geraden abgrenzen. Im ersteren Falle gelangen wir zur Euklidischen, im letzteren zur Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie.

Digitized by Google

Neue Integraleigenschaften successiver Potentiale.

Von

Ernst Richard Neumann in Breslau.

Vorgelegt von Hilbert in der Sitzung vom 3. Mai 1902.

Mit einer Figur.

Einleitung.

In seiner grundlegenden Arbeit über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+p(xy).\ u = 0$ [1]) hat *H. A. Schwarz* wol zum ersten Male die Aufmerksamkeit auf eine eigentümliche Gattung von Integralen gelenkt; er bildet dort für das Gebiet $\mathfrak{T}$, für welches er jene Gleichung integrieren will, eine unendliche Reihe aufeinanderfolgender Funktionen w_1, w_2, w_3 etc. — nach einem Gesetze, auf das ich hier nicht weiter einzugehn brauche, — und denkt sich alsdann immer aus zweien dieser Funktionen w_n, z. B. aus $w_\varkappa$ und w_λ das folgende über jenes Gebiet $\mathfrak{T}$ hinerstreckte Integral gebildet:

$$1) \qquad [W_\varkappa, W_\lambda] = \int\left(\frac{\partial w_\varkappa}{\partial x}\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}+\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\right)d\tau.$$

Dann stellt sich die folgende überraschende Eigenschaft dieser Integrale heraus: Es ist

$$2) \qquad [w_\varkappa, w_\lambda] = [w_{\varkappa+1}, w_{\lambda-1}] = [w_{\varkappa+2}, w_{\lambda-2}] = \cdots\cdots,$$

d. h., ob wir von den Funktionen w_n die $\varkappa$-te und die λ-te, oder aber die $(\varkappa+1)$-te und $(\lambda-1)$-te, oder aber auch die $(\varkappa+2)$-te und

1) *H. A. Schwarz*: Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. Zweiter Teil. — Ges. Abhandl. Bd. I. pag. 241.

Digitized by Google

$(\lambda-2)$-te in einem solchen Integrale 1) mit einander combinieren, immer erhalten wir denselben Wert für das Integral, und das gilt allgemein, sobald von den beiden Funktionen die eine einen Index besitzt, der um ebensoviel größer als $\varkappa$, wie der der anderen kleiner als λ ist. Wir können daher kurz sagen, *jene Integrale 1) hingen nicht ab von den Einzelwerten, sondern nur von der Summe $\varkappa+\lambda$ der Indices der zu ihrer Bildung verwandten Funktionen.*

Integrale ähnlicher Art, welche alle diese nämliche Eigenthümlichkeit zeigen, sind nun seither vielfach, sowohl im Gebiete der gewöhnlichen, wie der partiellen Differentialgleichungen angewandt [1]); man bedient sich ihrer jetzt bei fast allen Methoden, welche mit successiven Approximationen arbeiten. Es sind diese Integrale nämlich stets noch durch eine Fülle anderer einfacher Eigenschaften ausgezeichnet, welche ihnen eben bei allen diesen Methoden eine hervorragende Rolle im Convergenzbeweise zuweisen.

So hat denn auch *Poincaré* solche Integrale herangezogen bei den Convergenzbeweisen für die Methoden von *C. Neumann* und *Robin* zur Integration der Potentialgleichung [2]). Auch die bei diesen Methoden auftretenden successiven Potentiale besitzen die genannte Eigenschaft: Gewisse Integrale, gebildet aus je zweien dieser Potentiale, hängen wieder nur ab von der Summe der Indices derselben — oder, wie wir dafür kurz sagen wollen: Jene successiven Potentiale besitzen die „*Schwarz*'sche Integraleigenschaft".

Der Zweck dieser Mitteilung ist es nun, zu zeigen, daß diese *C. Neumann*'schen und *Robin*'schen Potentiale noch durch weitere Integraleigenschaften ausgezeichnet sind, die wir füglich als Verallgemeinerung der *Schwarz*'schen Integraleigenschaft anzusprechen haben werden. — Dabei machen die nachfolgenden Betrachtungen es aber im höchsten Grade wahrscheinlich, daß ähnliche Verallgemeinerungen, wie sie sich hier für diese successive Potentiale ergeben, auch noch bei anderen successiven Funktionen gelten werden, wie solche bei der Integration anderer Differentialgleichungen auftreten, und daß diese neuen Integraleigenschaften dann dort ähnliche Dienste leisten werden, wie hier im Gebiete der Potentialgleichung.

---

1) Es sind hier wol vor allem die Arbeiten von *E. Picard* und seinen Schülern zu nennen.

2) *H. Poincaré*: La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica, Bd. 20, 1897. pag. 59.

Digitized by Google

Um nun im Folgenden die Integraleigenschaften, um die es sich hier handelt, übersichtlich auseindersetzen zu können [1]), wollen wir wieder das Symbol $[\varphi, \psi]$ einführen, und darunter jetzt stets ein Raumintegral von der folgenden Form verstehn:

$$3) \qquad [\varphi, \psi] = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau,$$

und wollen diesem Symbol dann noch einen Index beifügen, welcher sich auf das Integrationsgebiet bezieht. —

Wir haben es nun im Folgenden immer mit einer im Raume ein für alle Male fest gegebenen, geschlossenen Fläche σ zu thun, und werden dann solche Integrale bald hinzuerstrecken haben über das Innengebiet $\mathfrak{J}$, bald über das Außengebiet $\mathfrak{A}$ dieser geschlossenen Fläche σ. Demgemäß werden wir diese Integrale in dem einen und dem anderen Falle bezeichnen mit:

$$3') \qquad [\varphi, \psi]_{\mathfrak{J}} \quad \text{bezw.} \quad [\varphi, \psi]_{\mathfrak{A}}.$$

§ 1. Die Integraleigenschaften der C. Neumann'schen Doppelbelegungspotentiale.

Um nun auf die aufeinanderfolgenden Potentiale näher einzugehn, um deren Integraleigenschaften es sich handelt, führen wir noch ein weiteres Symbol $(d\sigma)_p$ ein, durch welches wir ein Element $d\sigma$ jener Fläche σ und einen ganz beliebig im Raume gegebnen Punkt p in Beziehung zu einander setzen; wir verstehn nämlich unter $(d\sigma)_p$ den folgenden Ausdruck:

$$(d\sigma)_p = \frac{\left(\partial \frac{1}{E_p}\right)}{\partial \nu} d\sigma = \frac{\cos(\nu, E_p)}{E_p^2} d\sigma,$$

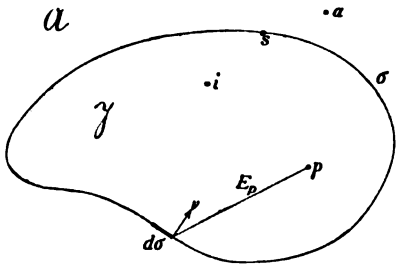
worin E_p die Entfernung des Elementes $d\sigma$ vom Punkt p, und ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Flächennormale bedeutet — es ist dann dieses $(d\sigma)_p$ nichts anderes als die scheinbare Größe des Elementes $d\sigma$ vom Punkte p aus, dieselbe positiv oder negativ gerechnet, je nachdem man von p aus auf die innere, oder aber auf die äußere Seite des Elementes $d\sigma$ hinblickt.

---

1) Auf Angabe der Beweise, auch nur der neuen Integraleigenschaften, will ich verzichten, weil diese Beweise ganz analog zu führen sind; wie sie z. B. *Poincaré* bei den bereits bekannten, den *Schwarz*'schen, Integraleigenschaften geführt hat. Es handelt sich immer nur um äußerst einfache Anwendungen bekannter *Green*'scher Formeln.

Digitized by Google

Denkt man sich alsdann auf σ eine stetige, sonst aber willkürliche Funktion f vorgeschrieben, so kann man unter Be-



nutzung dieses Symbols $(d\sigma)_p$ das erste der ihr zugehörigen *C. Neumann*'schen Doppelbelegungspotentiale — um zunächst auf diese einzugehn — durch folgendes über die Fläche σ hinerstreckte Integral definieren:

$$W_p = \frac{1}{2\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_p.$$

Diese Funktion der Lage des Punktes p ist dann an der Fläche σ unstetig, sie besitzt in einem Punkte s von σ verschiedene Werte, je nachdem man sich ihm von innen oder aber von außen nähert. — Von diesen verschiedenen innern und äußeren Randwerten W_{i_s} und W_{a_s} bilden wir nun überall das arithmetische Mittel; dies stellt dann eine neue für alle Punkte s von σ definierte Funktion dar, die wir mit f'_s bezeichnen wollen,

$$\tfrac{1}{2}(W_{i_s} + W_{a_s}) = f'_s.$$

Auf Grund dieser neuen Werte f' bilden wir sodann genau ebenso, wie oben auf Grund der Werte f, ein Doppelbelegungspotential W':

$$W'_p = \frac{1}{2\pi}\int f'_\sigma (d\sigma)_p,$$

und verfahren dann mit diesem weiter genau so, wie oben mit der Funktion W, wir setzen

$$\tfrac{1}{2}(W'_{i_s} + W'_{a_s}) = f''_s$$

und bilden das weitere Potential W'':

$$W''_p = \frac{1}{2\pi}\int f''_\sigma (d\sigma)_p,$$

und fahren nun in genau derselben Weise fort, bilden sonach, ausgehend von der auf σ willkürlich vorgeschriebenen Funktion f_s, die aufeinanderfolgenden Potentiale W, W', W'', W''', etc. nach dem folgenden Schema:

Digitized by Google

$$(A)\quad \begin{cases} W_p = \frac{1}{2\pi}\int f_\sigma\,(d\sigma)_p & W_{ie}+W_{aa}=2f_e \\ W'_p = \frac{1}{2\pi}\int f'_\sigma\,(d\sigma)_p & W'_{ie}+W'_{aa}=2f'_e \\ W''_p = \frac{1}{2\pi}\int f''_\sigma\,(d\sigma)_p & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & W^{(n-1)}_{ie}+W^{(n-1)}_{aa}=2f^{(n)} \\ W^{(n)}_p = \frac{1}{2\pi}\int f^{(n)}_\sigma\,(d\sigma)_p & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

Diese Potentiale besitzen dann also, wie schon oben angedeutet wurde, die *Schwarz*'sche Integraleigenschaft, d. h. wenn wir zwei von ihnen in gewissen Integralen von der Form 3) combinieren, so erhalten wir alle Male denselben Wert für das Integral, sobald nur die Summe der Indices jener beiden Funktionen dieselbe ist, und zwar gilt das in gleicher Weise, ob wir die Integrale immer über den Innen- oder aber über den Außenraum von σ hinerstrecken; es folgt also z. B.

$$4)\quad \begin{cases} [W^{(\varkappa)}, W^{(\lambda)}]_\mathfrak{J} = [W^{(\varkappa+1)}, W^{(\lambda-1)}]_\mathfrak{J} = [W^{(\varkappa+2)}, W^{(\lambda-2)}]_\mathfrak{J} = \dots \text{ etwa } = J^{(\varkappa+\lambda)} \\ \text{und ebenso auch:} \\ [W^{(\varkappa)}, W^{(\lambda)}]_\mathfrak{A} = [W^{(\varkappa+1)}, W^{(\lambda-1)}]_\mathfrak{A} = [W^{(\varkappa+2)}, W^{(\lambda-2)}]_\mathfrak{A} = \dots \text{ etwa } = \bar{J}^{(\varkappa+\lambda)} \end{cases}$$

Diese so definierten Größen $J^{(n)}$ und $\bar{J}^{(n)}$ wollen wir als die „*Schwarz*'schen Integrale" der *C. Neumann*'schen Methode des arithmetischen Mittels bezeichnen, oder wol auch gar im Gegensatz zu gewissen Verallgemeinerungen, die wir sogleich kennen lernen werden, als die „speciellen" *Schwarz*'schen Integrale, weil sie eben völlig analog den von *Schwarz* bei anderer Gelegenheit eingeführten Integralen gebildet sind [vgl. die Einleitung].

Bei der Einführung dieser Größen $J^{(n)}$ und $\bar{J}^{(n)}$, von denen eben bereits *Poincaré* in der erwähnten Arbeit vielfach Gebrauch macht, handelt es sich also immer um Integrale, in denen zwei Funktionen mit einander combiniert sind, welche ein und demselben System *C. Neumann*'scher Doppelbelegungspotentiale angehören, welche also beide aus ein und derselben Stammfunktion f hergeleitet sind. — Ganz analoge Relationen gelten nun aber auch für solche Integrale, in denen zwei Funktionen enthalten sind, welche

Digitized by Google

zwei gänzlich von einander unabhängigen Systemen aufeinanderfolgender Doppelbelegungspotentiale angehören — und darin bestehn eben die *neuen Integraleigenschaften* dieser Potentiale.

Um etwas näher hierauf einzugehn, bilden wir jetzt also noch ein zweites System solcher Potentiale, ausgehend von einer neuen, von f_σ gänzlich unabhängigen Funktion $\mathfrak{f}_\sigma$. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{W}^{(n)}$ und verfahren bei ihrer Bildung völlig analog wie oben bei den Funktionen $W^{(n)}$ [vgl. (A)], d. h. nach dem folgenden Schema:

$$(A^*)\quad\begin{cases} \mathfrak{W}_p = \frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{f}_\sigma (d\sigma)_p & \mathfrak{W}_{ii}+\mathfrak{W}_{aa} = 2\mathfrak{f}'_i \\ \mathfrak{W}'_p = \frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{f}'_\sigma (d\sigma)_p & \mathfrak{W}'_{ii}+\mathfrak{W}'_{aa} = 2\mathfrak{f}''_i \\ \mathfrak{W}''_p = \frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{f}''_\sigma (d\sigma)_p & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \mathfrak{W}^{(n-1)}_{ii}+\mathfrak{W}^{(n-1)}_{aa} = 2\mathfrak{f}^{(n)}_i \\ \mathfrak{W}^{(n)}_p = \frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{f}^{(n)}_\sigma (d\sigma)_p & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dieses System (A*) der Funktionen $\mathfrak{W}^{(n)}$ ist dann thatsächlich gänzlich unabhängig von dem System (A) der Funktionen $W^{(n)}$, da wir ja bei Bildung des einen und des anderen Systems von gänzlich verschiedenen auf σ vorgeschriebenen Werten ($\mathfrak{f}_\sigma$ bezw. f_σ) ausgegangen sind, — gleichwohl gilt, wenn wir jetzt je eine Funktion des einen und des anderen Systems mit einander in gewissen Integralen von der Form 3) combinieren, noch immer jenes Gesetz, daß der Wert dieses Integrales lediglich von der Summe der Indices jener beiden Funktionen abhängt, nicht aber mehr von den Einzelwerten dieser Indices. Es ist nämlich

$$[W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}] = [W^{(\varkappa+1)}, \mathfrak{W}^{(\lambda-1)}] = [W^{(\varkappa+2)}, \mathfrak{W}^{(\lambda-2)}] = \cdots,$$

gleichgültig, ob wir immer über das Innengebiet $\mathfrak{I}$ von σ, oder aber über das Außengebiet $\mathfrak{A}$ hinintegrieren. Den gemeinsamen Wert der Integrale in dem einen und dem anderen Falle wollen wir mit $K^{(\varkappa+\lambda)}$ bezw. mit $\overline{K}^{(\varkappa+\lambda)}$ bezeichnen, und dann das Resultat kurz so zusammenfassen:

Neue Integraleigenschaften der C. Neumann'schen Doppelbelegungspotentiale. — *Bildet man, ausgehend von irgend welchen auf σ willkürlich aber stetig vorgeschriebenen Werten f_σ aufeinanderfolgende Doppelbelegungspotentiale W, W', W'', W''', etc. [vgl. das*

Digitized by Google

System (A)], *und gänzlich unabhängig davon, ausgehend von irgend welchen anderen stetigen Werten* f_ν *ebenfalls solche Potentiale* $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}', \mathfrak{W}'', \mathfrak{W}'''$, *etc.* [*vgl. das System* (A*)], *so hat das aus je einer Funktion des einen und des anderen Systems gebildete Integral* $[W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]_\mathfrak{F}$ [*vgl. 3*)] *stets denselben Wert, wenn nur die Summe* $\varkappa+\lambda$ *der Indices dieser beiden Funktionen dieselbe ist, und Entsprechendes gilt auch von den über das Außengebiet* $\mathfrak{A}$ *hinerstreckten Integralen* $[W^{(\varkappa)}, W^{(\lambda)}]_\mathfrak{A}$ — *Es ist also z. B.*

$$5)\quad \begin{cases} [W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]_\mathfrak{F} = [W^{(\varkappa+1)}, \mathfrak{W}^{(\lambda-1)}]_\mathfrak{F} = [W^{(\varkappa+2)}, \mathfrak{W}^{(\lambda-2)}]_\mathfrak{F} = \cdots = K^{(\varkappa+\lambda)} \\ \textit{und entsprechend auch:} \\ [W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]_\mathfrak{A} = [W^{(\varkappa+1)}, \mathfrak{W}^{(\lambda-1)}]_\mathfrak{A} = [W^{(\varkappa+2)}, \mathfrak{W}^{(\lambda-2)}]_\mathfrak{A} = \cdots = \bar{K}^{(\varkappa+\lambda)}. \end{cases}$$

Im Gegensatz zu den Integralen $J^{(n)}$ und $\bar{J}^{(n)}$, den speciellen *Schwarz*'schen Integralen, wollen wir diese so definierten Größen $K^{(n)}$ und $\bar{K}^{(n)}$ bezeichnen als die „verallgemeinerten" *Schwarz*'schen Integrale der *C. Neumann*'schen Methode des arithmetischen Mittels. — In dem Specialfalle, daß die von Hause aus gänzlich unabhängig von einander gedachten willkürlichen Funktionen f_ν und f_ν zufällig gleich sind, werden beide Klassen von Integralen identisch, gehn die verallgemeinerten wieder in die speciellen Integrale über. Aber auch sonst sind diese beiden Gattungen von Integralen nicht unabhängig von einander, zwischen den Werten der einen und der anderen Integrale besteht vielmehr stets ein enger Zusammenhang, auf den wir jetzt noch kurz eingehn wollen.

Wir erhalten ihn wol am einfachsten durch eine auch bereits mehrfach von *Schwarz* angewandte Schlußweise, die sich auf die Thatsache gründet, daß das über ein beliebiges Gebiet hinerstreckte Integral

$$\int\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = [F,F]$$

stets positiv ist, sobald F eine reelle Funktion bedeutet. — Bilden wir nun dieses Integral für die specielle Funktion

$$F = \alpha W^{(\varkappa)}+\beta\mathfrak{W}^{(\lambda)},$$

so folgt daraus:

$$[F,F] = \alpha^2[W^{(\varkappa)}, W^{(\varkappa)}]+2\alpha\beta[W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]+\beta^2[\mathfrak{W}^{(\lambda)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}] > 0,$$

welche Werte die Größen α und β auch haben mögen, d. h. es ist dieser Ausdruck eine definite positive quadratische Form der Veränderlichen α und β, ihre Discriminante ist also positiv, oder aber es ist:

Digitized by Google

$$\{[W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]\}^2 \leqq [W^{(\varkappa)}, W^{(\varkappa)}] \cdot [\mathfrak{W}^{(\lambda)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}],$$

und zwar gilt diese Beziehung noch immer, was für ein Integrationsgebiet wir auch den einzelnen darin vorkommenden Integralen zu Grunde legen. Nehmen wir dafür einmal das Innengebiet $\mathfrak{J}$ von σ, dann das Außengebiet $\mathfrak{A}$, und schließlich drittens den ganzen unendlichen Raum, d. h. das Gebiet $\mathfrak{J}+\mathfrak{A}$, so ergeben sich aus jener allgemeinen Relation unter Rücksicht auf 4) und 5) sofort die drei folgenden Ungleichungen:

$$6) \quad \begin{cases} (K^{(\varkappa+\lambda)})^2 \leqq J^{(2\varkappa)} \cdot \mathfrak{J}^{(2\lambda)}, \quad (\bar{K}^{(\varkappa+\lambda)})^2 \leqq \bar{J}^{(2\varkappa)} \cdot \bar{\mathfrak{J}}^{(2\lambda)} \\ (K^{(\varkappa+\lambda)} + \bar{K}^{(\varkappa+\lambda)})^2 \leqq (J^{(2\varkappa)} + \bar{J}^{(2\varkappa)}) \cdot (\mathfrak{J}^{(2\lambda)} + \bar{\mathfrak{J}}^{(2\lambda)}) \end{cases}$$

Diese stellen den gesuchten Zusammenhang zwischen den Werten der verallgemeinerten und der speciellen *Schwarz*'schen Integrale dar, denn die Größen $\mathfrak{J}^{(n)}$ und $\bar{\mathfrak{J}}^{(n)}$ sind, wie ja wol bereits aus dem Vorhergehenden ersichtlich, nichts anderes als ebenfalls specielle *Schwarz*'sche Integrale, nämlich die den Funktionen $\mathfrak{W}^{(n)}$ des Systems (A*) zugehörigen; sie sind nämlich in folgender Weise definiert:

$$7) \qquad \mathfrak{J}^{(\varkappa+\lambda)} = [\mathfrak{W}^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}}, \quad \bar{\mathfrak{J}}^{(\varkappa+\lambda)} = [\mathfrak{W}^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}}.$$

§ 2. Die Integraleigenschaften der Robin'schen einfachen Flächenpotentiale.

Völlig analog, wie bei den *C. Neumann*'schen Doppelbelegungspotentialen liegen nun die Verhältnisse auch bei den successiven *Robin*'schen Potentialen einfacher Flächenbelegungen, nur daß diese Funktionen eben ein anderes Bildungsgesetz befolgen.

Man geht bei ihrer Bildung ebenfalls aus von einer willkürlich auf der betreffenden Fläche σ vorgeschriebenen stetigen Funktion, die wir mit g bezeichnen wollen, sieht dann $\frac{1}{2\pi} g$ aber an als die Dichtigkeit einer einfachen Flächenbelegung, deren Potential in einem beliebigen Punkte p also

$$V_p = \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma \frac{d\sigma}{E_p}$$

ist. Dieses Potential ist dann selber zwar an der Fläche σ stetig — unstetig hingegen sind jetzt die normalen Ableitungen von V, die nach der Richtung z. B. der inneren Normalen ν genommene Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ hat verschiedene Werte, je nachdem wir

Digitized by Google

sie in einem inneren oder aber äußeren, wenn auch unendlich benachbarten, Punkte bilden. Da sehen wir denn nun wieder überall das arithmetische Mittel dieser beiden verschiedenen Grenzwerte $\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{i}$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{a}$ an als eine neue auf der Fläche σ vorgeschriebene Funktion, die wir mit g_s' bezeichnen,

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{i}+\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{a}\right\}=g_s',$$

und bilden dann auf Grund dieser Werte g_s' ein neues Potential V_p' genau so, wie wir oben das Potential V_p auf Grund der Werte g_s bildeten, und fahren dann auch weiter in genau derselben Weise fort, d. h. bilden also successive die Potentiale V, V', V'', etc. nach dem folgenden Schema:

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} V_p = \frac{1}{2\pi}\int g_\sigma \frac{d\sigma}{E_p} & \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{i}+\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{a}=2g_s \\ V_p' = \frac{1}{2\pi}\int g_\sigma' \frac{d\sigma}{E_p} & \left(\frac{\partial V'}{\partial \nu}\right)_{i}+\left(\frac{\partial V'}{\partial \nu}\right)_{a}=2g_s'' \\ V_p'' = \frac{1}{2\pi}\int g_\sigma'' \frac{d\sigma}{E_p} & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \left(\frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \nu}\right)_{i}+\left(\frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \nu}\right)_{a}=2g_s^{(n)} \\ V_p^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int g_\sigma^{(n)} \frac{d\sigma}{E_p} & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Funktionen besitzen dann also ebenfalls die *Schwarz*'sche Integraleigenschaft bezüglich des Innengebietes $\mathfrak{J}$, sowie des Außengebietes $\mathfrak{A}$ der Fläche σ, es ist nämlich:

$$8)\quad \begin{cases} [V^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}} = [V^{(\varkappa+1)}, V^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{J}} = [V^{(\varkappa+2)}, V^{(\lambda-2)}]_{\mathfrak{J}} = \cdots \text{ etwa} = L^{(\varkappa+\lambda)} \\ \text{und ebenso auch:} \\ [V^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}} = [V^{(\varkappa+1)}, V^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{A}} = [V^{(\varkappa+2)}, V^{(\lambda-2)}]_{\mathfrak{A}} = \cdots \text{ etwa} = \bar{L}^{(\varkappa+\lambda)} \end{cases}$$

Die solchermaßen eingeführten Größen $L^{(n)}$ und $\bar{L}^{(n)}$ wollen wir dann ähnlich wie früher bezeichnen als die *Schwarz*'schen Integrale, oder noch genauer als die „speciellen" *Schwarz*'schen Integrale der *Robin*'schen Methode; auch von ihnen macht vorübergehend bereits *Poincaré* in jener Arbeit Gebrauch.

Doch die *Schwarz*'schen Integraleigenschaften 8), welche zur Einführung dieser Größen Veranlassung gaben, lassen sich nun

Digitized by Google

wieder noch erheblich verallgemeinern, wie ich das bereits 1899 in einer Mitteilung in diesen Nachrichten kurz angegeben habe. Es bleiben die Relationen 8) nämlich wieder noch bestehn, wenn man in jenen Integralen das eine der beiden Potentiale $V^{(n)}$ durch eine Funktion ersetzt, welche einem anderen gänzlich unabhängigen System solcher aufeinanderfolgender *Robin*'scher Potentiale angehört. — Wir wollen die Funktionen eines zweiten solchen Systems mit $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}''$, etc. bezeichnen, und sie uns aus einer von g_s völlig unabhängigen Funktion $\mathfrak{g}_s$ in genau derselben Weise, wie die V's aus der Funktion g_s [vgl. das System (B)] hergeleitet, d. h. also nach folgendem Schema gebildet denken:

$$(B^*)\quad\begin{cases} \mathfrak{V}_p = \frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{g}_\sigma \frac{d\sigma}{E_p} & \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \nu}\right)_{i_s} + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \nu}\right)_{a_s} = 2\mathfrak{g}_s' \\ \mathfrak{V}_p' = \frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{g}_\sigma' \frac{d\sigma}{E_p} & \left(\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial \nu}\right)_{i_s} + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial \nu}\right)_{a_s} = 2\mathfrak{g}_s'' \\ \mathfrak{V}_p'' = \frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{g}_\sigma'' \frac{d\sigma}{E_p} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \left(\frac{\partial \mathfrak{V}^{(n-1)}}{\partial \nu}\right)_{i_s} + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}^{(n-1)}}{\partial \nu}\right)_{a_s} = 2\mathfrak{g}_s^{(n)} \\ \mathfrak{V}^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{g}_\sigma^{(n)} \frac{d\sigma}{E_p} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Obwohl dann diese Funktionen $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}''$, etc. also gänzlich unabhängig von den Funktionen $V^{(n)}$ des Systems (B) sind, stellt sich doch eben wieder heraus, daß

$$[V^{(\varkappa)}, \mathfrak{V}^{(\lambda)}] = [V^{(\varkappa+1)}, \mathfrak{V}^{(\lambda-1)}] = [V^{(\varkappa+2)}, \mathfrak{V}^{(\lambda-2)}] = \cdots$$

ist, mögen wir nun immer über das Innengebiet $\mathfrak{J}$ von σ, oder aber über den Außenraum $\mathfrak{A}$ hinintegrieren. — Je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, wollen wie den gemeinsamen Wert dieser Integrale mit $M^{(\varkappa+\lambda)}$ oder $\overline{M}^{(\varkappa+\lambda)}$ bezeichnen, und dann die letzten Betrachtungen kurz so zusammenfassen:

Neue Integraleigenschaften der Robin'schen Potentiale einfacher Flächenbelegungen. — *Bildet man ausgehend von einer beliebigen stetigen auf σ vorgeschriebenen Funktion g_s die aufeinanderfolgenden Robin'schen Potentiale V, V', V'', V''', etc. [vgl. das System* (B)], *und gänzlich unabhängig davon, ausgehend von irgend einer anderen auf σ stetig vorgeschriebenen Funktion $\mathfrak{g}_s$ die entsprechenden Potentiale $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}'', \mathfrak{V}'''$, etc. [vgl. das System* (B*)], *so hat das aus einer Funktion des einen, und einer des anderen Systems gebildete*

Digitized by Google

Integral $[V^{(\varkappa)}, \mathfrak{B}^{(\lambda)}]_3$ [*vgl. 3*)] *stets denselben Wert, sobald nur die Summe* $\varkappa+\lambda$ *der Indices dieser beiden Funktionen dieselbe ist, und Entsprechendes gilt auch von den über das Außengebiet* $\mathfrak{A}$ *hinerstreckten Integralen* $[V^{(\varkappa)}, \mathfrak{B}^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}}$. *Es ist also z. B.*

$$9)\quad \begin{cases} [V^{(\varkappa)}, \mathfrak{B}^{(\lambda)}]_3 = [V^{(\varkappa+1)}, \mathfrak{B}^{(\lambda-1)}]_3 = [V^{(\varkappa+2)}, \mathfrak{B}^{(\lambda-2)}]_3 = \cdots = M^{(\varkappa+\lambda)} \\ \text{und entsprechend auch:} \\ [V^{(\varkappa)}, \mathfrak{B}^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}} = [V^{(\varkappa+1)}, \mathfrak{B}^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{A}} = [V^{(\varkappa+2)}, \mathfrak{B}^{(\lambda-2)}]_{\mathfrak{A}} = \cdots = \bar{M}^{(\varkappa+\lambda)} \end{cases}$$

In dem speciellen Falle, daß die beiden willkürlich vorgeschriebenen Funktionen g_s und $\mathfrak{g}_s$ gleich sind, werden auch die beiden Systeme (B) und (B*) der Funktionen $V^{(n)}$ und $\mathfrak{B}^{(n)}$ identisch, und gehn daher diese „verallgemeinerten" *Schwarz*'schen Integrale $M^{(n)}$ und $\bar{M}^{(n)}$ wieder direkt über in die speciellen Integrale $L^{(n)}$ und $\bar{L}^{(n)}$ der *Robin*'schen Methode [vgl. 8)], während im Allgemeinen wieder nur zwischen den Werten der Integrale der einen und der anderen Gattung gewisse durch Ungleichungen darstellbare Beziehungen bestehn; es ist nämlich

$$10)\quad \begin{cases} (M^{(\varkappa+\lambda)})^2 \leqq L^{(2\varkappa)} \cdot \mathfrak{L}^{(2\lambda)}, \quad (\bar{M}^{(\varkappa+\lambda)})^2 \leqq \bar{L}^{(2\varkappa)}\ \bar{\mathfrak{L}}^{(2\lambda)}) \\ (M^{(\varkappa+\lambda)} + \bar{M}^{(\varkappa+\lambda)})^2 \leqq (L^{(2\varkappa)} + \bar{L}^{(2\varkappa)}) \cdot (\mathfrak{L}^{(2\lambda)} + \bar{\mathfrak{L}}^{(2\lambda)}), \end{cases}$$

wie sich das ganz analog beweisen läßt, wie oben das entsprechende Resultat 6) bei den *Schwarz*'schen Integralen der *C. Neumann*'schen Methode. — Hier bedeuten natürlich $\mathfrak{L}^{(n)}$ und $\bar{\mathfrak{L}}^{(n)}$ die den Funktionen $\mathfrak{B}^{(n)}$ des Systems (B*) zugehörigen speciellen *Schwarz*'schen Integrale, d. h. es ist:

$$11)\qquad \mathfrak{L}^{(\varkappa+\lambda)} = [\mathfrak{B}^{(\varkappa)}, \mathfrak{B}^{(\lambda)}]_3, \quad \bar{\mathfrak{L}}^{(\varkappa+\lambda)} = [\mathfrak{B}^{(\varkappa)}, \mathfrak{B}^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}}.$$

§ 3. Integralbeziehungen zwischen C. Neumann'schen und Robin'schen Potentialen.

Alle Ausführungen der vorigen Paragraphen bezogen sich nur auf Integrale, in welchen entweder zwei *C. Neumann*'sche Doppelbelegungspotentiale oder aber zwei *Robin*'sche Potentiale einfacher Flächenbelegungen mit einander combiniert waren. Nunmehr wollen wir auch noch Integrale betrachten, in denen ein *C. Neumann*'sches und ein *Robin*'sches Potential mit einander zusammengestellt sind, z. B. eines der Potentiale $W^{(n)}$ des Systems (A) mit einem der Potentiale $V^{(n)}$ des Systems (B), d. h. also z. B. die Integrale $[W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_3$ und $[W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}}$. — Dann sind also die hier zusammengestellten Funktionen nicht nur in dem

Digitized by Google

Sinne unabhängig von einander, daß sie aus verschiedenen auf σ willkürlich vorgeschriebenen Werten (f_s bezw. g_s) hergeleitet sind, wie das z. B. die Funktionen $W^{(\varkappa)}$ und $\mathfrak{W}^{(\lambda)}$ in 5) ja auch sind, sondern diese Funktionen $W^{(\varkappa)}$ und $V^{(\lambda)}$ befolgen außerdem noch ganz verschiedene Bildungsgesetze [vgl. die Schemate (A) und (B)] — trotzdem stellt sich bei näherer Untersuchung abermals jenes Gesetz heraus: Der Wert jener Integrale hängt wieder nur ab von der Summe der Indices der beiden angewandten Funktionen, es ist wiederum:

$$[W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}] = [W^{(\varkappa+1)}, V^{(\lambda-1)}] = [W^{(\varkappa+2)}, V^{(\lambda-2)}] = \cdots,$$

gleichgültig ob wir diese Integrale immer hinerstrecken über den Innen- oder Außenraum von σ. Wir wollen dieses Resultat in folgenden Satz zusammenfassen:

Integralbeziehungen zwischen den C. Neumann'schen und Robin'schen Potentialen. — *Bildet man ausgehend von irgend welchen auf σ stetig vorgeschriebenen Werten f_s die aufeinanderfolgenden C. Neumann'schen Doppelbelegungspotentiale W, W', W'', W''', etc. [vgl. das System (A)], und bildet ferner gänzlich unabhängig davon, ausgehend von irgend welchen anderen auf σ vorgeschriebenen stetigen Werten g_s die aufeinanderfolgenden Robin'schen Potentiale einfacher Flächenbelegungen V, V', V'', V''', etc. [vgl. das System (B)], so besitzt das aus einer Funktion des einen und einer Funktion des anderen Systems gebildete Integral $[W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}}$ alle Male denselben Wert, sobald nur die Summe $\varkappa+\lambda$ der Indices jener beiden Funktionen dieselbe ist, und völlig Analoges gilt auch von den über das Außengebiet $\mathfrak{A}$ von σ hinerstreckten Integralen $[W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}}$. — Es ist also z. B.*

$$12) \quad \begin{cases} [W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}} = [W^{(\varkappa+1)}, V^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{J}} = [W^{(\varkappa+2)}, V^{(\lambda-2)}]_{\mathfrak{J}} = \cdots \\ \text{und entsprechend auch:} \\ [W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}} = [W^{(\varkappa+1)}, V^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{A}} = [W^{(\varkappa+2)}, V^{(\lambda-2)}]_{\mathfrak{A}} = \cdots \end{cases}$$

Diese Relationen weisen aufs Neue auf den engen Zusammenhang hin, der zwischen der *C. Neumann*'schen Methode des arithmethischen Mittels und der *Robin*'schen Methode besteht. Doch will ich wegen der im Allgemeinen weit geringeren Wichtigkeit dieser Klasse von Integralen nicht länger bei ihnen verweilen, möchte nur den überaus einfachen Zusammenhang zwischen den über den Innenraum $\mathfrak{J}$ und den Außenraum $\mathfrak{A}$ hinerstreckten Integralen erwähnen, es ist nämlich:

$$13) \qquad [W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{A}} = -[W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}}.$$

Digitized by Google

§ 4. Anwendungen.

C. Neumann löst die Randwertaufgabe der Potentialtheorie für die auf σ willkürlich vorgeschriebenen Werte f in seiner Methode des arithmetischen Mittels durch die folgenden unendlichen Reihen: Im Außenraum $\mathfrak{A}$ durch die Reihe:

$$1a) \quad \Phi_a = C - [(W_a + W_a') + (W_a'' + W_a''') + (W_a^{IV} + W_a^V) + \cdots]$$

und im Innenraum $\mathfrak{I}$ durch die Reihe:

$$1i) \quad \Psi_i = C + [(W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + (W_i^{IV} - W_i^V) + \cdots],$$

wo C eine gewisse Constante ist, und die W's die aus f hergeleiteten Doppelbelegungspotentiale sind [vgl. das System (A)]. — Er selber hat die Convergenz und Gültigkeit dieser Lösung unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Fläche σ überall convex sei. — *Poincaré* hat dann in der schon öfters erwähnten Arbeit diese Voraussetzung fallen gelassen und einen Beweis für die Allgemeingültigkeit der Methode gegeben, der dann später von Anderen mehrfach modificiert ist.

Was nun den gemeinsamen Grundgedanken aller dieser letzteren Beweise anlangt, so dürfte dieser darin bestehn, daß sie aus den mannigfaltigen einfachen Eigenschaften, durch welche die jenen Funktionen $W^{(n)}$ zugehörigen Integrale $J^{(n)} = [W^{(n-q)}, W^{(q)}]_3$ und $\bar{J}^{(n)} = [W^{(n-q)}, W^{(q)}]_{\mathfrak{A}}$ ausgezeichnet sind, Nutzen zu ziehn suchen für die Frage nach der Convergenz jener Reihen 1). — *Eine wichtige in allen diesen Beweisen zu lösende Aufgabe besteht also darin, daß man den Zusammenhang zwischen den Werten der Funktionen $W^{(n)}$ selber und jenen Integralen $J^{(n)}$ und $\bar{J}^{(n)}$ ermittelt.*

Diese Aufgabe findet nun eine äußerst einfache Lösung dadurch, daß man wenigstens vorübergehend auch Integrale von der Form $[W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]$ einführt, also Integrale, wie die, von denen unsere neuen Integraleigenschaften handeln. — Während eben, sobald die Werte f_s auf σ einmal vorgeschrieben sind, mit ihnen die Funktionen W, W', W'', etc. und damit auch die Integrale $J^{(n)}$ und $\bar{J}^{(n)}$ fest und unveränderlich gegeben sind, so haben wir bei den allgemeineren Integralen $[W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]$ noch immer in den Potentialen $\mathfrak{W}^{(n)}$ einen Bestandteil, über welchen wir noch bis zu einem gewissen Grade frei verfügen dürfen, wir können nämlich die Werte $\mathfrak{f}_s$, aus welchem wir die Funktionen $\mathfrak{W}^{(n)}$ ableiten [vgl. das System (A*)], noch ganz *ad libitum* wählen.

Von dieser Freiheit wollen wir nun Gebrauch machen, wir wollen also jetzt speciellere Annahmen über die Werte $\mathfrak{f}_s$ machen. Zu diesem Zwecke denken wir uns zunächst außerhalb σ beliebig

Digitized by Google

aber fest einen Punkt a markiert, und sehn dann die reciproken Abstände der Oberflächenpunkte s von diesem Punkte a an als die auf σ vorgeschriebenen Werte f_s, d. h. wir setzen

$$f_s = \frac{1}{E_{as}}.$$

Die auf Grund dieser Werte f_s gebildeten Doppelbelgungspotentiale $\mathfrak{W}^{(n)}$ [vgl. das System (A*)] wollen wir dann in diesem Specialfalle durch den Buchstaben $\mathbf{W}$ bezeichnen, und da sie noch von der Lage des Punktes a abhängig sind, ähnlich wie etwa auch die sogenannte *Green*'sche Funktion noch von der Lage eines Punktes, ihres Poles, abhängt, so wollen wir ihnen noch die Marke (a) beifügen; wir setzen also in diesem Specialfalle:

$$2a) \qquad f_s = \frac{1}{E_{as}}, \quad \mathfrak{W}_p = \mathbf{W}_{(a)p}, \quad \mathfrak{W}'_p = \mathbf{W}'_{(a)p}, \quad \mathfrak{W}''_p = \mathbf{W}''_{(a)p}, \cdots$$

Die diesem System *C. Neumann*'scher Potentiale zugehörigen speciellen *Schwarz*'schen Integrale, d. h. unsere früheren Integrale $\mathfrak{J}^{(n)} = [\mathfrak{W}^{(n-q)}, \mathfrak{W}^{(q)}]_{\mathfrak{J}}$ und $\bar{\mathfrak{J}}^{(n)} = [\mathfrak{W}^{(n-q)}, \mathfrak{W}^{(q)}]_{\mathfrak{A}}$ [vgl. 7) pag. 249] wollen wir dann, um wieder sogleich den vorliegenden Specialfall anzudeuten, mit $\mathbf{I}^{(n)}_{(a)}$ und $\bar{\mathbf{I}}^{(n)}_{(a)}$ bezeichnen, sodaß also

$$3a) \qquad \mathbf{I}^{(n)}_{(a)} = [\mathbf{W}^{(n-q)}_{(a)}, \mathbf{W}^{(q)}_{(a)}]_{\mathfrak{J}}, \qquad \bar{\mathbf{I}}^{(n)}_{(a)} = [\mathbf{W}^{(n-q)}_{(a)}, \mathbf{W}^{(q)}_{(a)}]_{\mathfrak{A}}$$

ist, und entsprechend wollen wir die aus den Potentialen $W^{(n)}$ des Systems (A) und jenen speciellen Funktionen $\mathfrak{W}^{(n)}$ gebildeten allgemeineren Integrale $K^{(n)} = [W^{(n-q)}, \mathfrak{W}^{(q)}]_{\mathfrak{J}}$ und $\bar{K}^{(n)} = [W^{(n-q)}, \mathfrak{W}^{(q)}]_{\mathfrak{A}}$ [vgl. 5) pag. 448] mit $\mathbf{K}^{(n)}_{(a)}$ und $\bar{\mathbf{K}}^{(n)}_{(a)}$ bezeichnen, sodaß diese Größen also definiert sind durch folgende Gleichungen:

$$4a) \qquad \mathbf{K}^{(n)}_{(a)} = [W^{(n-q)}, \mathbf{W}^{(q)}_{(a)}]_{\mathfrak{J}}, \qquad \bar{\mathbf{K}}^{(n)}_{(a)} = [W^{(n-q)}, \mathbf{W}^{(q)}_{(a)}]_{\mathfrak{A}},$$

wo die Zahl q immer noch ganz beliebig, nur kleiner als n, angenommen werden darf.

Eine nähere Untersuchung lehrt dann, daß die Summe $\mathbf{K}^{(n)}_{(a)} + \bar{\mathbf{K}}^{(n)}_{(a)}$ dieser beiden letzteren Integrale abgesehen von dem Faktor (-4π) nichts anderes ist, als der Wert, welchen die Funktion $W^{(n)} + W^{(n+1)}$ in jenem Punkte a besitzt, d. h. es folgt die fundamentale Formel:

$$5a) \qquad \begin{aligned} W^{(n)}_a + W^{(n+1)}_a &= -\frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{K}^{(n)}_{(a)} + \bar{\mathbf{K}}^{(n)}_{(a)}\right\} \\ \text{d. i.} &= -\frac{1}{4\pi}\left\{[W^{(n-q)}, \mathbf{W}^{(q)}_{(a)}]_{\mathfrak{J}} + [W^{(n-q)}, \mathbf{W}^{(q)}_{(a)}]_{\mathfrak{A}}\right\} \end{aligned}$$

Digitized by Google

Ganz entsprechend können wir nun auch von einem im Innenraum $\mathfrak{I}$ von σ fest markierten Punkte i ausgehn, den reciproken Abstand von ihm als die auf σ vorgeschriebene Funktion $\mathfrak{f}_i$ ansehn, und von ihr ausgehend die successiven Potentiale $\mathbf{W}_{(i)}^{(n)}$ bilden, sodaß also jetzt

$$2\,i) \qquad \mathfrak{f}_i = \frac{1}{E_{is}}, \quad \mathfrak{W}_p = \mathbf{W}_{(i)p}, \quad \mathfrak{W}'_p = \mathbf{W}'_{(i)p}, \quad \mathfrak{W}''_p = \mathbf{W}''_{(i)p}, \cdots$$

ist. Diesen Potentialen mögen nun die speciellen *Schwarz*'schen Integrale

$$3\,i) \qquad \mathfrak{I}_{(i)}^{(n)} = [\mathbf{W}_{(i)}^{(n-q)}, \mathbf{W}_{(i)}^{(q)}]_{\mathfrak{I}}, \qquad \overline{\mathfrak{I}}_{(i)}^{(n)} = [\mathbf{W}_{(i)}^{(n-q)}, \mathbf{W}_{(i)}^{(q)}]_{\mathfrak{A}}$$

und die verallgemeinerten Integrale

$$4\,i) \qquad \mathbf{K}_{(i)}^{(n)} = [W^{(n-q)}, \mathbf{W}_{(i)}^{(q)}]_{\mathfrak{I}}, \qquad \overline{\mathbf{K}}_{(i)}^{(n)} = [W^{(n-q)}, \mathbf{W}_{(i)}^{(q)}]_{\mathfrak{A}}$$

entsprechen. Dann folgt ganz analog zu unseren obigen Betrachtungen, daß die Summe $\mathbf{K}_{(i)}^{(n)} + \overline{\mathbf{K}}_{(i)}^{(n)}$ dieser beiden letzteren Integrale bis auf den Faktor 4π mit dem Wert übereinstimmt, den die Funktion $W^{(n)} - W^{(n+1)}$ in jenen Punkte i besitzt:

$$5\,i) \qquad \begin{aligned} W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)} &= \frac{1}{4\pi}\{\mathbf{K}_{(i)}^{(n)} + \overline{\mathbf{K}}_{(i)}^{(n)}\} \\ \text{d. i.} &= \frac{1}{4\pi}\{[W^{(n-q)}, \mathbf{W}_{(i)}^{(q)}]_{\mathfrak{I}} + [W^{(n-q)}, \mathbf{W}_{(i)}^{(q)}]_{\mathfrak{A}}\} \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen 5a) und 5i) lehren nun, daß man gewisse Aggregrate der Funktionen $W^{(n)}$, nämlich in äußeren Punkten die Summe $W^{(n)} + W^{(n+1)}$, in inneren Punkten die Differenz $W^{(n)} - W^{(n+1)}$, direkt darstellen kann je durch die Summe zweier gewisser unserer verallgemeinerten Schwarz'schen Integrale. — Diese Aggregate sind es aber gerade, welche in den C. Neumann'schen Reihen 1) auftreten, um deren Convergenz es sich handelt.

Von der Darstellung 5) jener Aggregate $W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}$ und $W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}$ durch verallgemeinerte *Schwarz*'sche Integrale gestatten jetzt die Relationen 6) von pag. 249 leicht den Uebergang zu den speciellen Integralen; es folgt danach sofort:

$$(4\pi)^2 (W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)})^2 = (\mathbf{K}_{(a)}^{(n)} + \overline{\mathbf{K}}_{(a)}^{(n)})^2 \leqq (J^{(2n-2q)} + \bar{J}^{(2n-2q)}) \cdot (\mathfrak{I}_{(a)}^{(2q)} + \overline{\mathfrak{I}}_{(a)}^{(2q)}),$$

$$(4\pi)^2 (W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)})^2 = (\mathbf{K}_{(i)}^{(n)} + \overline{\mathbf{K}}_{(i)}^{(n)})^2 \leqq (J^{(2n-2q)} + \bar{J}^{(2n-2q)}) \cdot (\mathfrak{I}_{(i)}^{(2q)} + \overline{\mathfrak{I}}_{(i)}^{(2q)}),$$

wobei es noch immer in unser Belieben gestellt ist, der Zahl q jeden Wert unterhalb n beizulegen, also z. B. auch $q = 1$ zu setzen. Dann folgt aber specieller dieses Resultat:

Digitized by Google

$$6)\quad \begin{aligned} (W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)})^2 &\leqq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 (\Gamma''_{(a)} + \overline{\Gamma}''_{(a)}) \cdot \{J^{(2n-2)} + \overline{J}^{(2n-2)}\} \\ (W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)})^2 &\leqq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 (\Gamma''_{(i)} + \overline{\Gamma}''_{(i)}) \cdot \{J^{(2n-2)} + \overline{J}^{(2n-2)}\}. \end{aligned}$$

Was nun die hier auftretenden Faktoren $\Gamma''_{(a)} + \overline{\Gamma}''_{(a)}$ und $\Gamma''_{(i)} + \overline{\Gamma}''_{(i)}$ anlangt, so hängen sie den Gleichungen 2) und 3) zufolge lediglich ab von den geometrischen Verhältnissen der Fläche σ und von der Lage des Punktes a bezw. i, und zwar sind es stetige Funktionen der Lage dieser Punkte, ja sie bleiben auch noch stetig und mithin auch endlich, wie nahe einer dieser Punkte auch an σ heranrücken möge — wie sich das unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Fläche σ beweisen läßt. Es erreichen also diese Funktionen $\Gamma''_{(a)} + \overline{\Gamma}''_{(a)}$ und $\Gamma''_{(i)} + \overline{\Gamma}''_{(i)}$ bei beliebiger Verschiebung der Punkte a und i sicherlich irgendwo einen bestimmten endlichen Maximalwert. Diesen bezeichnen wir mit $(4\pi)^2 \cdot \mathbf{A}^2$; dann ist jetzt $\mathbf{A}$ eine lediglich von der Beschaffenheit der Fläche σ abhängige Größe, d. h. eine *rein geometrische Constante.*

Führen wir jetzt aber dieses Maximum $(4\pi)^2 \mathbf{A}^2$ jener Faktoren $\Gamma''_{(a)} + \overline{\Gamma}''_{(a)}$ und $\Gamma''_{(i)} + \overline{\Gamma}''_{(i)}$ anstatt dieser in die Ungleichungen 6) ein, so verstärken wir sie nur noch weiter, und erhalten so, wenn wir schließlich noch die Quadratwurzel ziehn:

$$7)\quad \begin{aligned} \operatorname{abs}(W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}) &\leqq \mathbf{A}\sqrt{J^{(2n-2)} + \overline{J}^{(2n-2)}}, \\ \operatorname{abs}(W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}) &\leqq \mathbf{A}\sqrt{J^{(2n-2)} + \overline{J}^{(2n-2)}}, \end{aligned}$$

Relationen, welche dann natürlich für ganz beliebige äußere und innere Punkte a bezw. i gelten, und den *gesuchten Zusammenhang zwischen den Werten der Funktionen $W^{(n)}$ und den ihnen zugehörigen Schwarz'schen Integralen $J^{(n)}$ und $\overline{J}^{(n)}$* [vgl. 4) pag. 216] darstellen. — Sie eröffnen uns die Möglichkeit, von diesen Integralen Rückschlüsse auf die Glieder der *C. Neumann*'schen Reihen 1) zu ziehn, — darin besteht eben die große Wichtigkeit dieser Relationen. Gelingt es z. B. zu beweisen, — wie das *Poincaré* thatsächlich, allerdings unter gewissen Annahmen, thut, — daß die Größen $J^{(2n)} + \overline{J}^{(2n)}$ mit wachsendem n schneller gegen 0 convergieren, als die Glieder einer geometrischen Reihe mit echtgebrochenem Quotienten, so gestatten die Ungleichungen 7) sofort, das Gleiche auch von den Termen $W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}$ und $W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}$ auszusagen, womit *die absolute und gleichmäßige Convergenz der C. Neumann'schen* Reihen 1) bewiesen wäre.

Digitized by Google

Ganz analog wie bei der *C. Neumann*'schen Methode des arithmethischen Mittels liegen nun die Verhältnisse auch bei der *Robin*'schen Methode zur Lösung der sogenannten zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie, d. h. der Aufgabe, eine Potentialfunktion eines Gebietes aus ihrem willkürlich auf der Begrenzung vorgeschriebenen normalen Ableitungen herzustellen. — Bei dieser Methode leisten die neuen Integraleigenschaften der *Robin*'schen Potentiale [vgl. pag. 251] wieder gute Dienste bei Ableitung eines Zusammenhanges zwischen den Funktionswerten dieser Potentiale und den ihnen zugehörigen *Schwarz*'schen Integralen $L^{(n)}$ und $\bar{L}^{(n)}$ [vgl. oben 8) pag. 250]. Doch sind die dabei anzustellenden Betrachtungen so völlig analog denen, wie wir sie soeben bei der *C. Neumann*'schen Lösung der ersten Randwertaufgabe ausführlicher besprochen haben, daß ein weiteres Eingehn darauf wol nicht notwendig sein dürfte, umsoweniger als ich bereits in der schon erwähnten Mitteilung in diesen Nachrichten von 1899 die Grundgedanken dieses Verfahrens, allerdings nur in sehr kurzen Umrissen, angegeben habe.

Breslau, den 25. April 1902.

Digitized by Google

Ueber die absolute Verzögerung der Lichtschwingungen durch Reflexion.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Mai 1902.

Einer äußern Veranlassung folgend, stelle ich nachstehend die Resultate der Theorie für Phasenverzögerungen des Lichtes bei den unter verschiedenen Umständen stattfindenden Reflexionen zusammen. Die Formeln sind allbekannt[1]), indessen werden sich nur Wenige die Mühe einer genauen Discussion gemacht haben. Insbesondere liegt eine kleine Schwierigkeit bei der gewöhnlichen Reflexion an durchsichtigen Medien vor. Die Fresnel-Neumann'schen Formeln geben hier die Verzögerung gleich Null, daneben aber für den Polarisationswinkel ein Hindurchgehen der senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Componente durch Null. Hierdurch wird dies Gebiet aus dem Zusammenhange mit den übrigen gerissen, in denen man die Amplituden als absolute Größen zu rechnen pflegt. Wendet man aber letzteres Verfahren auf das genannte Phänomen an, so tritt an Stelle des Zeichenwechsels der Amplitude eine sprungweise Aenderung der Phase um ein ungerades Vielfaches von π; beschränkt man diesen Sprung auch nach Wahrscheinlichkeit auf $\pm\pi$ selbst, so bleibt doch das Vorzeichen des Sprunges unbestimmt. Diese Unbestimmtheit, wie auch die Unstetigkeit, beruhen aber nur darauf, daß man mit der Abstraction eines absolut durchsichtigen ponderabeln Medium operirt; beides verschwindet, wenn man der Wirklichkeit entsprechend auch bei den anscheinend durchsichtigen Medien eine kleine Absorption zuläßt.

1) Ich benutze die Bezeichnung aus meinem Kompendium Bd. II (Leipzig 1896) insbesondere S. 740 u. f.

Digitized by Google

Die allgemeinen Reflexionsformeln für die ebene Grenze zwischen zwei absorbirenden Medien sind schwer zu discutiren; sie werden einfach für den normalen Einfall einer ebenen homogenen Welle und es bietet, wie sich zeigen wird, Vortheile, sie in diesem Fall für beliebig starke Absorption zu untersuchen.

Wir unterscheiden zwei (magnetische) Schwingungs- oder Polarisationscomponenten, senkrecht und parallel zur Einfallsebene, die durch die Indices s und p characterisirt sein mögen. Der Richtungssinn von s sei ein für alle Male festgestellt; über p nehmen wir an, daß die Systeme der s, p und r, unter r die Fortpflanzungsrichtung verstanden, für die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle congruent sein sollen. Unter dieser Voraussetzung sind bei normalem Einfall die Richtungen p in der einfallenden und der reflectirten Welle einander entgegengesetzt, bei streifendem Einfall einander parallel.

Die allgemeinen Formeln für die reflectirten complexen Amplituden $\mathfrak{R}$ lauten nun bekanntlich

$$1) \qquad \mathfrak{R}_p = E_p \frac{\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_0}{\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_0}, \quad R_s = E_s \frac{\mathfrak{v}_0 - \mathfrak{v}_1}{\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}_1},$$

wobei die E die einfallenden reellen Amplituden und die $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{v}_1$ die sogenannten complexen Geschwindigkeiten in dem ersten und dem zweiten Medium bezeichnen. Die $\mathfrak{R}_k$ stehen mit den reellen Amplituden R_k und mit den Phasenverzögerungen[1]) δ_k in dem Zusammenhang

$$2) \qquad \mathfrak{R}_k = R_k e^{-i\delta_k}, \qquad k = s, p;$$

die $\mathfrak{v}_k$ sind mit den reellen Geschwindigkeiten ω_k und den Absorptionsindices $\varkappa_k$ verbunden durch die Formel

$$3) \qquad \mathfrak{v}_k = \frac{\omega_k}{1 + i\varkappa_k}, \qquad k = 0, 1.$$

Demgemäß ergiebt sich aus (1) für die Componente s bei normalem Einfall

$$4) \quad R_s^0 e^{-i\delta_s^0} = E_s \frac{(\omega_0^2(1+\varkappa_1^2) - \omega_1^2(1+\varkappa_0^2)) + 2i\,\omega_0\omega_1(\varkappa_0 - \varkappa_1)}{(\omega_0 + \omega_1)^2 + (\omega_0\varkappa_1 + \omega_1\varkappa_0)^2},$$

und für die Componente p das Analoge mit rechts negativem Vorzeichen. Führt man zwei Hülfsgrößen ν_0 und ν_1 ein durch die Formel

$$5) \qquad (1 + \varkappa_k^2)\frac{v^2}{\omega_k^2} = \nu_k^2, \qquad k = 0, 1,$$

1) Im Kompendium steht statt δ die Beschleunigung $-\delta = d$.

Digitized by Google

in der v die Geschwindigkeit im leeren Raume bezeichnet, und durch welche die ν_k („die reducirten Brechungsindices") in Zusammenhang mit den gewöhnlichen Brechungsindices $v/\omega_k = n_k$ gebracht werden, und setzt außerdem

$$6) \qquad \varkappa_k = \operatorname{tg}\mu_k,$$

so nimmt Formel (4) die Gestalt von

$$7) \quad \mathfrak{R}_s^0(\cos\delta_s^0 - i\sin\delta_s^0) = E_s \frac{(\nu_1^2-\nu_0^2) - 2i\nu_1\nu_0\sin(\mu_1-\mu_0)}{\nu_1^2+\nu_0^2+2i\nu_1\nu_0\cos(\mu_1-\mu_0)},$$

und Aehnliches gilt für die Componente p.

Beschränkt man δ_p^0 und δ_s^0 auf das Intervall $-\pi < \delta^0 < +\pi$, so ergiebt sich folgende Tabelle:

8)

Ist $\nu_0 < \nu_1$,	$\mu_0 < \mu_1$, so gilt	$0 < \delta_s^0 < \frac{1}{2}\pi$,	$-\pi < \delta_p^0 < -\frac{1}{2}\pi$,
„ $\nu_0 < \nu_1$,	$\mu_0 > \mu_1$, „	$-\frac{1}{2}\pi < \delta_s^0 < 0$,	$\frac{1}{2}\pi < \delta_p^0 < \pi$,
„ $\nu_0 > \nu_1$,	$\mu_0 > \mu_1$, „	$\frac{1}{2}\pi < \delta_s^0 < \pi$,	$-\frac{1}{2}\pi < \delta_p^0 < 0$,
„ $\nu_0 > \nu_1$,	$\mu_0 < \mu_1$, „	$-\pi < \delta_s^0 < -\frac{1}{2}\pi$,	$0 < \delta_p^0 < \frac{1}{2}\pi$.

δ_s^0 und δ_p^0 können hiernach je nach den Umständen alle Werthe innerhalb des abgegrenzten Intervalles annehmen. Wegen des Vorkommens der δ unter den trigonometrischen Functionen sinus und cosinus kann man indessen, wenn es bequem erscheint, zu jedem Werthpaar der obigen Tabelle $\pm 2\pi$ hinzufügen. Dies empfiehlt sich, wenn man die direct beobachtbare relative Verzögerung

$$9) \qquad \delta_r = \delta_s - \delta_p$$

in das Intervall $-\pi < \delta_r < +\pi$ einschließen will. —

Wir wenden uns nun zu dem speciellen Problem der Reflexion im leeren Raum an einem sehr schwach absorbirenden Medium von höherer Brechbarkeit, setzen also $n_0 = 1$, $n_1 > 1$, $\varkappa_0 = 0$ und $\varkappa_1$ überaus klein. Dann lauten die allgemeinen Formeln für δ_p, δ_s, δ_r, falls φ den Einfallswinkel, φ_1 den Berechnungswinkel bezeichnet

$$10) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\delta_p &= \frac{2n_1\varkappa_1}{n_1^2-1}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}, \\ \operatorname{tg}\delta_s &= \frac{2n_1\varkappa_1}{n_1^2-1}\,\frac{(n_1^2-2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{(n_1^2+1)\cos^2\varphi-1}, \\ \operatorname{tg}\delta_r &= \frac{\varkappa_1\sin 2\varphi\operatorname{tg}\varphi_1}{\cos(\varphi+\varphi_1)\cos(\varphi-\varphi_1)}. \end{aligned}$$

Combinirt man mit diesen Formeln die 1. Reihe der Tabelle (8), so ergiebt sich unter Zufügung von 2π zu dem Werthpaar für δ_p Folgendes.

Digitized by Google

δ_p beginnt bei normalem Einfall ($\varphi = 0$) mit dem Werth $2n_1\varkappa_1/(n_1^2-1)+\pi$ und nimmt bei bis 90° wachsendem Einfallswinkel bis $+\pi$ ab; δ_s beginnt mit $2n_1\varkappa_1/(n_1^2-1)$, wächst mit zunehmendem Einfallswinkel und passirt bei dem Polarisationswinkel ($\varphi_p = \operatorname{arc\,tg} n_1$) den Werth $\frac{1}{2}\pi$. Für das Weitere sind die beiden Fälle $n_1^2 \gtrless 2$ zu unterscheiden. Ist $n_1^2 > 2$, so dauert das Anwachsen von δ_s bis zu streifendem Einfall an, dem $\delta_s = \pi$ entspricht. Ist $n_1^2 < 2$, so wird der Werth $\delta_s = \pi$ bereits bei einem Winkel $\varphi_0 = \arcsin n_1/\sqrt{2}$ erreicht; man erkennt leicht, daß in der That stets $\varphi_0 > \varphi_p$ ist. Weiterhin wird ein π übersteigendes Maximum $\bar{\delta}_s$ passirt und für streifenden Einfall der Werth π zum zweiten Male angenommen. δ_r beginnt mit $-\pi$, passirt beim Polarisationswinkel den Werth $-\frac{1}{2}\pi$ und erreicht jederzeit Null erst bei streifendem Einfall. Daß nach den Formeln δ_r und δ_s gleichzeitig den Werth $\pm\frac{1}{2}\pi$ annehmen, während doch $\delta_r = \delta_s - \delta_p$ ist, wird durch die eingeführte Annäherung bedingt, die δ_p als unendlich wenig von π verschieden ergiebt.

Bei verschwindender Absorption folgt aus diesen Ueberlegungen der Werth $+\pi$ von δ_p für alle Einfallswinkel und das Springen von δ_s und δ_r um $+\pi$ bei dem Polarisationswinkel.

Ist das erste Medium nicht der leere Raum, sondern ein gleichfalls sehr schwach absorbirender Körper mit dem Absorptionsindex $\varkappa_0$ und einem Brechungsindex $n_0 < n_1$, so gelten die obigen Formeln noch immer, nur tritt an Stelle von n_1 jetzt n_1/n_0, an Stelle von $\varkappa_1$ aber $\varkappa_1 - \varkappa_0$. Es bleibt also qualitativ alles ungeändert, so lange $\varkappa_1 > \varkappa_0$ ist; dagegen ändern alle Formeln (10) ihr Vorzeichen, wenn $\varkappa_0 > \varkappa_1$.

Dann bleibt δ_p dauernd etwas unterhalb $-\pi$, δ_s beginnt ein wenig unterhalb Null und endet bei $-\pi$, δ_r beginnt mit $+\pi$ und nimmt zu Null ab. —

Ist für den Fall, daß das erste Medium der leere Raum bleibt, $n_1 < 1$, so gelten die Formeln (10) nur bis in die Nähe des Grenzwinkels der totalen Reflexion ($\varphi_r = \arcsin n_1$). Denn die Annäherung, durch welche sie gewonnen sind, vernachlässigt Potenzen von $\varkappa_1/\cos\varphi_1$, und $\cos\varphi_1$ verschwindet bei dem Einfall unter dem Grenzwinkel φ_r. Für den Grenzwinkel selber wird

$$11)\qquad \operatorname{tg}\delta_p = -\frac{2n_1\sqrt{\varkappa_1}}{\sqrt{1-n_1^2}},\quad \operatorname{tg}\delta_s = -\frac{2\sqrt{\varkappa_1}}{n_1\sqrt{1-n_1^2}},$$

$$\operatorname{tg}\delta_r = -\frac{2\sqrt{\varkappa_1(1-n_1^2)}}{n_1}.$$

Digitized by Google

Combinirt man diese Resultate mit (10) und berücksichtigt, daß man nach der dritten Reihe von Tabelle (8) unter den gemachten Voraussetzungen δ_p^0 in das Intervall $-\frac{1}{2}\pi < \delta_p^0 < 0$, und δ_s^0 in das andere $-\frac{3}{2}\pi < \delta_s^0 < -\pi$ einschließen kann, so erhält man Folgendes. δ_p beginnt bei normalem Einfall mit $-2n_1\varkappa_1/(1-n_1^2)$ und nimmt bis zum Grenzwinkel hin auf $-2n_1\sqrt{\varkappa}/\sqrt{1-n_1^2}$ ab. δ_s beginnt mit dem Werth $-2n_1\varkappa_1/(1-n_1^2)-\pi$, geht für $\varphi_0 = \arcsin n_1/\sqrt{2}$ durch $-\pi$, für den Polarisationswinkel φ_p durch $-\frac{1}{2}\pi$ und endet für den Grenzwinkel φ_r mit $-2\sqrt{\varkappa_1}/n_1\sqrt{1-n_1^2}$.

δ_r beginnt mit $-\pi$, passirt bei dem Polarisationswinkel φ_p den Werth $-\frac{1}{2}\pi$ und endet bei dem Grenzwinkel φ_r mit dem kleinen negativen Werth $-2\sqrt{\varkappa_1(1-n_1^2)}/n_1$.

Bei verschwindender Absorption bleibt δ_p andauernd Null, δ_s und δ_r beginnen mit $-\pi$, springen für den Polarisationswinkel um $+\pi$ und enden mit Null.

Vollzieht sich wieder die Reflexion statt im leeren Raum in einem absorbirenden Medium, das durch $n_0 > n_1$ und $\varkappa_0$ charakterisirt sein mag, so tritt, so lange $\varkappa_1 > \varkappa_0$ ist, nur n_1/n_0 an Stelle von n_1 und $\varkappa_1 - \varkappa_0$ an Stelle von $\varkappa$; hier bleibt der Verlauf qualitativ der frühere. Ist aber $\varkappa_0 > \varkappa_1$, so ist auch noch $\sqrt{\varkappa_1 - \varkappa_0}$ mit $\sqrt{\varkappa_0 - \varkappa_1}$ zu vertauschen; alle Ausdrücke kehren ihre Vorzeichen um und Gleiches gilt also auch von δ_p, δ_s, δ_r. —

Im Bereich der totalen Reflexion ist eine Vieldeutigkeit auch in dem Grenzfalle absolut durchsichtiger Medien nicht vorhanden und der Einfluß der geringen Absorption demgemäß ohne wesentliche Bedeutung; es können somit zur Abschätzung des Verlaufes der δ die gewöhnlichen Formeln für letztere zur Anwendung kommen. Dieselben lauten in der früheren Bezeichnung ($n_1 > n_0$)

$$12)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta_p &= -\frac{n_0}{n_1\cos\varphi}\sqrt{n_1^2\sin^2\varphi - n_0^2},\\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta_s &= -\frac{n_1}{n_0\cos\varphi}\sqrt{n_1^2\sin^2\varphi - n_0^2},\\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta_r &= -\frac{n_0\cos\varphi}{n_1\sin^2\varphi}\sqrt{n_1^2\sin^2\varphi - n_0^2}. \end{aligned}$$

Für den Grenzwinkel φ_r sind alle drei Ausdrücke gleich Null, für streifenden Einfall werden die beiden ersten unendlich, der letztere verschwindet. Es fallen sonach δ_p und δ_s innerhalb des Bereiches der totalen Reflexionen von Null auf $-\pi$, doch so, daß δ_s, absolut genommen, zwischen diesen Grenzen immer etwas größer ist als δ_p.

Digitized by Google

Für den Fall der Metallreflexion, der durch neben Eins bedeutende Werthe des Productes $n_1^2(1+\varkappa_1^2) = \nu_1^2$ charakterisirt ist, gelten die (angenäherten) Formeln

$$13) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\delta_p &= \frac{2n_1\varkappa_1\cos\varphi}{n_1^2(1+\varkappa_1^2)-\cos^2\varphi}, \\ \operatorname{tg}\delta_s &= \frac{2n_1\varkappa_1\cos\varphi}{n_1^2(1+n_1^2)\cos^2\varphi-1}, \\ \operatorname{tg}\delta_r &= \frac{2n_1\varkappa_1\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi}{n_1^2(1+\varkappa_1^2)-\sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\varphi}. \end{aligned}$$

Ist das erste Medium nicht der leere Raum, so tritt wie früher n_1/n_0 an Stelle von n_1.

Da nach der für Metallreflexion charakteristischen Annahme $\nu_1 < \nu_0$ ist, so kommt wiederum die erste Reihe der Tabelle (8) in Betracht, und es ist für normalen Einfall

$$+\pi < \delta_p^0 < +\tfrac{3}{2}\pi, \quad 0 < \delta_s^0 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Demgemäß beginnt δ_p zwischen $+\pi$ und $+\frac{3}{2}\pi$ (sagen wir bei $+\pi+\varepsilon$) und nimmt bei wachsendem Einfallswinkel bis $+\pi$ ab; δ_s beginnt bei $+\varepsilon$, passirt den Werth $+\frac{1}{2}\pi$ bei $\varphi_h = \arccos(1/n_1\sqrt{1-\varkappa_1^2})$ und erreicht π bei streifendem Einfall. δ_r beginnt mit $-\pi$, passirt $-\frac{1}{2}\pi$ bei dem Haupteinfallswinkel φ_h, der definirt ist durch $\sin\varphi_h \operatorname{tg}\varphi_h = n_1\sqrt{1+\varkappa_1^2}$, und erreicht Null bei streifendem Einfall.

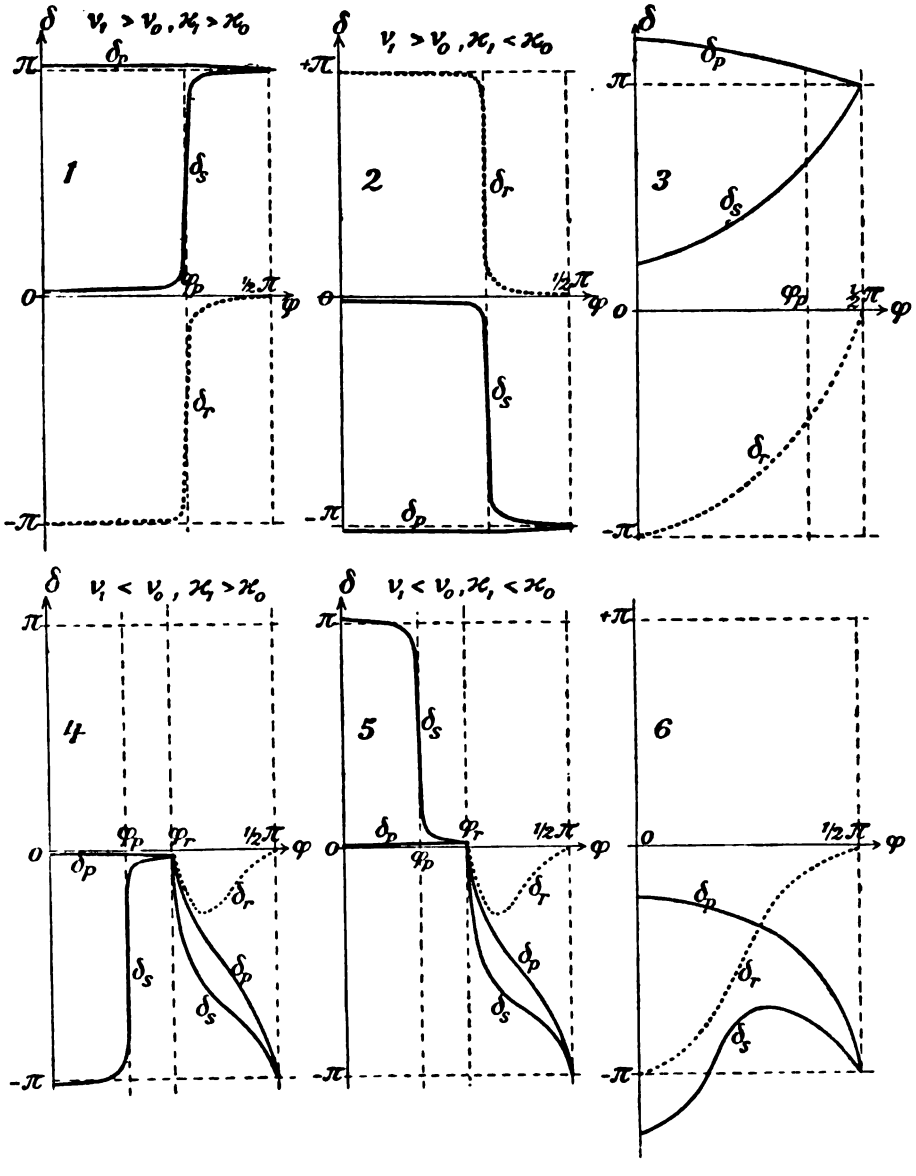
In der nebenstehenden Tafel ist der Verlauf der Verzögerungen δ_s, δ_p und $\delta_r = \delta_s - \delta_p$ in den wichtigsten der besprochenen Fälle schematisch dargestellt, und zwar ist δ_s und δ_p je durch eine ausgezogene, δ_r durch eine punktirte Curve repräsentirt.

Die Figuren 1) und 2) beziehen sich auf die Reflexion an einem optisch dichteren Mittel bei sehr kleiner Absorption beider Medien, wo die ν sich nur unmerklich von den Brechungsindices n unterscheiden; in 1) ist die Absorption im zweiten, in 2) die im ersten Medium als die stärkere angenommen; n_1/n_0 ist größer als $\sqrt{2}$ festgesetzt, daher überschreitet δ_s den Werth $\pm\pi$ nicht. Die Figuren 4) und 5) betreffen dieselben beiden Fälle für die Reflexion an einem optisch dünneren Medium. Da hier die Curve für δ_r sich im Bereiche der gewöhnlichen Reflexion ($\varphi < \varphi_r$) nicht deutlich von der für δ_s sondert, ist sie erst von $\varphi = \varphi_r$ an eingezeichnet[1]).

1) Für $\varphi = \varphi_r$ ist der absolute Werth $|\delta_s|$ nicht gleich $|\delta_p|$, sondern etwas größer als $|\delta_p|$; die Figuren 4 und 5 sind in Hinsicht hierauf bei der Reproduction ungenau gerathen.

Digitized by Google

Figur 3) stellt den Fall der Metallreflexion dar. Wie derselbe durch wachsende Absorption aus 1) hervorgeht, ist unmittelbar ersichtlich. Weniger leicht erkennbar ist der Zusammenhang mit



dem System 4), von dem aus bei gleichzeitig wachsendem ν_1 und $\varkappa_1$ ein Uebergang zu 3) gleichfalls stattfinden muß. Die Ueberlegung zeigt, daß sich bei wachsender Absorption das System 4)

Digitized by Google

in die in 6) schematisch dargestellte Form wandeln muß, von der man unmittelbar den Anschluß an 4) gewinnt, wenn man nur (was, wie S. 3 erörtert, zulässig ist) die Ordinaten von δ_e und δ_r um 2π vergrößert. Medien von einem 6) entsprechenden Verhalten, das sehr kleine Brechungsindices und mäßige Absorptionen verlangen würde, sind bisher noch nicht beobachtet. —

In der vorstehenden Darstellung ist ganz ausdrücklich für die einfallende und für die reflectirte Welle ein congruentes System von Richtungen p, r, s vorausgesetzt. Würde man die beiden Systeme statt einander congruent, einander spiegelbildlich entsprechend wählen, was durch einen oberen Index, an p, s, r wie an dem δ hervorgehoben werden mag, so würde sich Folgendes ändern.

Jetzt liegt nicht bei streifendem, sondern bei normalem Einfall p' in der einfallenden Welle dem in der reflectirten parallel; es ist also bei erneuter Beschränkung von δ'_r auf das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ für $\varphi = 0$ nothwendig $\delta'_r = 0$, und nicht mehr $= \pm\pi$. Demgemäß gelangt man zu den (jetzt geltenden) Werthen von δ'_p und δ'_r, indem man $\pm\pi$ zu den früheren (δ_p und δ_r) hinzufügt.

Eine solche Darstellung ist an sich ebenso berechtigt, wie die frühere, und kann unter Umständen, trotz — oder gar wegen — der ihr anhaftenden Dissymmetrie, gewisse Vortheile bieten.

Es ist indessen zu beachten, daß bei dem Uebergang von dem einen zum andern System gewisse wegen ihrer Anschaulichkeit gerne in den Vordergrund gerückte Gesetze sich wesentlich verändern, insbesondere die, welche die Lage der sogenannten Ebene wiederhergestellter lineärer Polarisation angeben. Bei denselben setzt man einfallendes lineärpolarisirtes Licht voraus und denkt die bei der Reflexion entstandene relative Verzögerung durch einen Compensator beseitigt.

Ist das einfallende lineärpolarisirte Licht nach dem ersten (oder dritten) Quadranten des Systems $p_e s_e$ resp. $p'_e s'_e$ polarisirt (wobei der Index e auf die einfallende Welle hinweist), so ergiebt die Aufhebung der wie oben gerechneten Verzögerung δ_r resp. δ'_r (sei ihr Werth nun positiv oder negativ) durch Zufügung von $-\delta_r$ resp. $-\delta'_r$ mittels des Compensators jederzeit eine Lage der wiederhergestellten Polarisation in demselben ersten (oder dritten) Quadranten des Systemes $p_r s_r$ resp. $p'_r s'_r$ (wobei der Index r auf die reflectirte Welle deutet). Dies folgt unmittelbar aus den Ansätzen für die reflectirte Welle, die der Theorie zu Grunde liegen, nämlich

Digitized by Google

$$R_p = \varrho_p E_p \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right) - \delta_p\right],$$

$$R_s = \varrho_s E_s \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right) - \delta_s\right],$$

in denen E_p, E_s die einfallenden, R_p, R_s die reflectirten Amplituden und ϱ_p, ϱ_s die Schwächungsfactoren (beide absolut gerechnet) darstellen. Dies ergiebt aber, daß in dem Falle zweier congruenter Systeme $p\,s\,r$ die Ebene wiederhergestellter lineärer Polarisation absolut gerechnet anders liegt, als in dem Falle zweier einander spiegelbildlich entsprechender, nämlich, falls wir ihre Lage nach der Seite des spitzen Winkels zwischen der Ebene wiederhergestellter Polarisation und der Richtung $\pm p$, resp. p' beurtheilen, im ersten Falle auf derselben, im letzten Falle auf der entgegengesetzten Seite der Einfallsebene, wie die Ebene der einfallenden Polarisation. In der That ist ja das eine Mal $-\delta_r$ und das andere Mal $\pm\pi - \delta_r = -\delta'_r$ der vorhandenen Verzögerung durch den Compensator zugefügt; beide Zuwachse machen das Licht zu linearpolarisirtem, aber mit verschieden gelegenen (nämlich in Bezug auf die Einfallsebene sich spiegelbildlich entsprechenden) Polarisationsebenen.

Der letztere Umstand erklärt gewisse Widersprüche in der Darstellung der Erscheinungen, die sich in der Literatur finden. Ein nicht von der Theorie geleiteter Beobachter wird sich ebenso berechtigt fühlen, δ_r wie δ'_r für die relative Verzögerung zu halten, und sich in der Entscheidung gelegentlich nur durch die Frage leiten lassen, welche von den beiden Größen die absolut kleinere ist. Wenn nun gar, wie bei der Metallreflexion, gilt $0 \leqq |\delta_r| \leqq \pi$, so wird selbst noch der Zufall, ob die Beobachtung mit großen oder mit kleinen Incidenzwinkeln begonnen hat, bei der Entscheidung mitspielen, und es wird ebensowohl das Resultat: „einfallende und wiederhergestellte reflectirte lineare Polarisation liegen auf derselben Seite der Einfallsebene“ gefunden werden können, wie das Entgegengesetzte.

Göttingen, Mai 1902.

Digitized by Google

Digitized by Google

Weiteres zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Krystalle.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 12. Juli 1902.

1. In einer früheren Arbeit über den in der Ueberschrift genannten Gegenstand habe ich auf ein sehr seltsames Resultat der Theorie aufmerksam gemacht. In jeder Richtung eines pleochroitischen Krystalles pflanzen sich zwei Wellen mit gleichsinnigen elliptischen Schwingungen fort, welche für die von mir sogenannten „Windungsaxen" zu circularen Schwingungen degeneriren. Ist an einem Krystall eine Ebene normal zu einer solchen Axe angeschliffen, und fällt auf dieselbe eine ebene Welle normal ein, so haben die beiden im Inneren erregten Schwingungen im Allgemeinen unendliche, bei ein wenig schiefem Einfall beliebig große Amplituden. Dies Resultat trat zunächst bei einer angenäherten Behandlung des Problemes, die durch die Annahme schwacher Absorption und die Vernachlässigung der Reflexion characterisirt war, hervor; ich habe aber a. a. O. bemerkt, daß es keineswegs nur eine Folge der eingeführten Vernachlässigungen ist. Mit dem Unendlichwerden der Theilamplituden hing dann weiter das unter gewissen Umständen eintretende Unbestimmtwerden der fortgepflanzten Intensität eng zusammen.

Nun kann zwar an eine physikalische Unmöglichkeit der von der Theorie ergebenen Folgerungen ernstlich nicht gedacht werden; denn die Grundformeln liefern für die Energiegleichung die bekannte Form, welche aussagt, daß die Summe der in ein beliebiges Volumen einströmenden Energie stets positiv ist, daß

Digitized by Google

also in dem Krystall Schwingungsenergie vernichtet wird und die austretende Energie kleiner als die eintretende ist. Auf eine Schicht eines pleochroitischen Krystalles und eine normal einfallende Welle angewandt, folgt hieraus, da die reflectirten Intensitäten endlich sind, daß von den hindurchtretenden Gleiches gilt und daß letztere überdies mit wachsender Dicke der Platte regelmäßig abnehmen müssen.

Aber die Art und Weise, wie dieses Resultat trotz der Unendlichkeit der fortgepflanzten Theilamplituden zu Stande kommt, ist keineswegs ohne Weiteres klar, zumal die allgemeinen Eigenschaften von Wellenpaaren mit zwei gleichsinnigen elliptischen Schwingungen kaum irgendwo entwickelt sind. Begegnen dergleichen doch bei der Theorie der pleochroitischen Krystallen im Verlaufe der wissenschaftlichen Entwickelung überhaupt zum ersten Male. Die betreffenden Schwierigkeiten sind in der That, wie mir bekannt geworden ist, Fachleuten unangenehm aufgefallen. Demgemäß schien es mir angemessen zu sein, den geschilderten Vorgang streng, d. h. bei Rücksicht auf die reflectirte Welle und ohne andere vereinfachende Annahmen, als die Beschränkung auf die unmittelbare Umgebung der Windungsaxen zu behandeln. Dabei werde ich die früheren Bezeichnungen benutzen und mich auf die s. Z. begründeten Fundamentalformeln stützen, nach denen insbesondere ist

$$1) \qquad (a_{22} - v^2)\,\mathfrak{F} = a_{12}\,\mathfrak{G}, \quad (a_{11} - v^2)\,\mathfrak{G} = a_{12}\,\mathfrak{F}.$$

Hierin bezeichnet v die complexe Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen homogenen Welle parallel der Richtung Z, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ sind die complexen Schwingungsamplituden des magnetischen oder Polarisationsvectors nach einer transversalen X- und Y-Axe, a_{11}, a_{22}, die Componenten erster Art nach X und Y, a_{12} die Componente zweiter Art nach Z von einem complexen Tensortripel a_1, a_2, a_3, wobei $a_{hk} = a_{hk} + ib_{hk}$, $a_h = a_h + ib_h$. Es mag daran erinnert werden, daß der Anschaulichkeit wegen die Formeln (1) aus der Elektorenhypothese abgeleitet waren, daß sie aber nicht davon abhängig sind, sondern sich auch als die einfachste Erweiterung der bekannten Formeln für durchsichtige Krystalle auffassen lassen.

Aus (1) ergiebt sich:

$$2) \qquad \begin{aligned} (a_{11} - v^2)(a_{22} - v^2) &= a_{12}^2, \\ \frac{\mathfrak{G}^2}{\mathfrak{F}^2} + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} &= 1, \end{aligned}$$

Digitized by Google

also

$$v^2 = \tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2}),$$

3) $$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{2a_{12}}(a_{22}-a_{11} \pm \sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2}).$$

Die beiden Wurzeln für v^2 und für $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ werden einander gleich für Richtungen, die der Bedingung

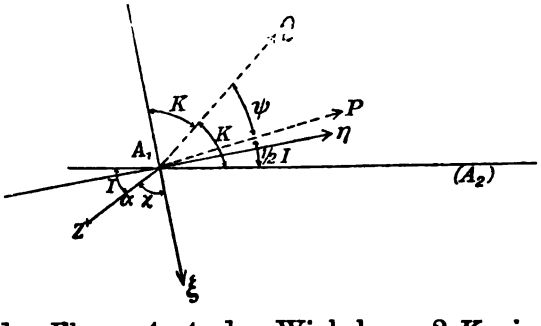
4) $$a_{22}-a_{11} = \pm 2i a_{12}$$

genügen; für diese Richtungen stimmen also die Geschwindigkeiten und die Absorptionen beider Wellen überein, und da zugleich $\mathfrak{G}/\mathfrak{F} = \pm i$ wird, so finden die Schwingungen in Kreisen statt. Die Gleichung (4) giebt hiernach die strenge Bestimmung der Windungsaxen.

Für das Weitere ist an die speciellen Lagen des Axenkreuzes XY zu erinnern, die bei der Entwickelung der Theorie eine Rolle spielten.

Die reellen Tensorcomponenten b_{hk} sind in der Nähe einer Windungsaxe von der Lage der Fortpflanzungsrichtung Z merklich unabhängig; $b_{12} = 0$ definirt deshalb eine Lage der Axen X und Y, welche in dem betrachteten Bereich constant ist; dieselbe war mit $[XY]$ bezeichnet. Die reellen Tensorcomponenten a_{hk} variiren in dem gleichen Bereich etwas stärker mit der Richtung von Z, $a_{12} = 0$ definirt also eine zweite, mit (XY) bezeichnete Lage der Axen, welche etwas mit der Fortpflanzungsrichtung wechselt. Der Winkel zwischen der $[X]$ und der (X) Richtung war ψ genannt; die Werthe der Tensorcomponenten für das eine oder das andere Axen-System wurden durch die Klammern [] resp. () ausgezeichnet.

Führt man, wie früher, die Construction aller vorkommenden Richtungen auf einer gewissen Kugel aus, bei der sich die Umgebung einer optischen oder Polarisationsaxe in einer ebenen Figur darstellen läßt, stellt die Axe $[X]$ durch eine feste Richtung Q dar, die mit der Ebene $A_1 A_2$ der optischen Axe den Winkel K einschließt, so fand sich der optische Vorgang symmetrisch in Bezug auf ein Axensystem $\xi\eta$,



dessen $+\xi-$ Axe mit der Ebene $A_1 A_2$ den Winkel $\pi - 2K$ einschließt. Die Lage der Fortpflanzungsrichtung Z wird bestimmt

Digitized by Google

durch die Polarcoordinaten α, χ; schließt α den Winkel J mit A_2A_1 ein, so ist die Richtung P der (X)-Axe um $\frac{1}{2}J$ gegen A_1A_2 geneigt und der Winkel ψ zwischen P und Q steht mit χ in der Beziehung $\chi = 2\psi$. Die umstehende nochmals abgedruckte Figur 4 aus der früheren Arbeit veranschaulicht diese Verhältnisse.

Ferner gilt nach § 2 und 3 der früheren Arbeit, wenn β eine Constante bezeichnet:

$$(a_{22})-(a_{11}) = 2\alpha, \quad (b_{22})-(b_{11}) = 2\beta\cos 2\psi, \quad b_{12} = \beta\sin 2\psi.$$

Hieraus folgt, daß wenn man in der Formel (4) das obere Zeichen benutzt, diese auf

$$\alpha + i\beta\cos\chi = -\beta\sin\chi$$

führt und wegen $\alpha < 0$ diejenige Windungsaxe C_1 bestimmt, für welche $\alpha = \beta$, $\chi = -\frac{1}{2}\pi$ ist. Wir wollen uns der Uebersichtlichkeit halber auf die Umgebung von C_1 beschränken; natürlich gestattet die andere Windungsaxe C_1' genau die gleiche Behandlung.

2. Richtungen, die der Windungsaxe C_1 sehr nahe liegen, werden wir nach Obigem definiren können durch die Beziehung

$$5) \qquad a_{22} - a_{11} = 2i a_{12}(1+\mathfrak{f}),$$

worin $\mathfrak{f}$ eine complexe Größe mit gegen Eins kleinem Modul bezeichnet. Für sie erhält man aus (3)

$$6) \qquad \begin{aligned} v^2 &= \tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) \pm i a_{12}\sqrt{2\mathfrak{f}}, \\ \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} &= i(1 \mp \sqrt{2\mathfrak{f}}). \end{aligned}$$

Wir schreiben diese Formeln

$$7) \qquad \begin{aligned} v_1^2 &= v_0^2 + i a_{12}\mathfrak{b}, \qquad v_2^2 = v_0^2 - i a_{12}\mathfrak{b}, \\ &\text{wobei } v_0^2 = \tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) \text{ ist, und} \end{aligned}$$

$$8) \quad \mathfrak{G}_1/\mathfrak{F}_1 = i(1-\mathfrak{b}) = i\mathfrak{e}, \qquad \mathfrak{F}_2/\mathfrak{G}_2 = -i(1-\mathfrak{b}) = -i\mathfrak{e}.$$

Hierbei ist die Lage des XY-Axenkreuzes beliebig gelassen. Wählt man dasselbe so, daß es mit den Hauptaxen der gekreuzten Schwingungsellipsen zusammenfällt, so ist nach § 6 der früheren Arbeit $\mathfrak{f}$ reell und positiv. Die X-Axe dieses Systemes schließe mit der Richtung Q den Winkel φ ein; dann ist nach (75) der früheren Arbeit

$$9) \qquad a_{12} = \alpha\sin 2(\varphi-\psi), \qquad b_{12} = \beta\sin 2\varphi.$$

Da nun in den Formeln (7) a_{12} in die kleine Größe $\mathfrak{b}$ multiplicirt auftritt, deren Quadrat wir vernachlässigt haben, so

Digitized by Google

können wir in den Ausdrücken für a_{12} und b_{12} die Werthe $\alpha = \beta$, $2\psi = -\frac{1}{2}\pi$ einsetzen, die der betrachteten Windungsaxe C_1 selbst entsprechen, also schreiben

$$a_{12} = -\beta \cos 2\varphi, \quad b_{12} = \beta \sin 2\varphi.$$

Hierdurch wird

$$10) \qquad i a_{12} = -\beta(\sin 2\varphi + i \cos 2\varphi) = -\beta\Phi,$$

wobei Φ eine Abkürzung ist. Demgemäß gilt nun auch, indem man die reell gewordenen $\mathfrak{b}$ und e mit δ und ε vertauscht,

$$11) \quad \begin{aligned} &v_1^2 - v_0^2 = v_0^2 - v_2^2 = i a_{12}\delta = -\beta\Phi\delta, \\ &\mathfrak{G}_1/\mathfrak{F}_1 = i\varepsilon = i(1-\delta), \qquad \mathfrak{F}_2/\mathfrak{G}_2 = -i\varepsilon = -i(1-\delta). \end{aligned}$$

3. Die Bedingungen für eine mit der XY-Ebene zusammenfallende Grenze zwischen dem leeren Raum und dem pleochroitischen Krystall lauten bekanntlich, wenn A, B die Componenten der magnetischen, X, Y die der elektrischen Kraft bezeichnen und das zweite Medium durch einen oberen Index angedeutet wird,

$$12) \qquad \overline{A} = \overline{A'}, \quad \overline{B} = \overline{B'}, \quad \overline{X} = \overline{X'}, \quad \overline{Y} = \overline{Y'}.$$

Nun ist aber nach den Formeln (1), (8), (9) der früheren Arbeit wegen $\mathfrak{F} = 0$

$$13) \qquad v^2 X' = \mathfrak{X}' a_{11} + \mathfrak{Y}' a_{12}, \quad v^2 Y' = \mathfrak{X}' a_{12} + \mathfrak{Y}' a_{22}$$

und

$$14) \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}'}{\partial t} = -v\frac{\partial B'}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Y}'}{\partial t} = v\frac{\partial A'}{\partial z};$$

die obigen Bedingungen lassen sich also schreiben:

$$\overline{A} = \overline{A'}, \quad \overline{B} = \overline{B'},$$

$$15) \qquad v^2\frac{\overline{\partial B}}{\partial z} = a_{11}\frac{\overline{\partial B'}}{\partial z} - a_{12}\frac{\overline{\partial A'}}{\partial z}, \quad v^2\frac{\overline{\partial A}}{\partial z} = -a_{12}\frac{\partial B'}{\partial z} + a_{22}\frac{\partial A'}{\partial z}.$$

Setzt man dann gemäß der Thatsache, daß im ersten Medium eine einfallende und eine reflectirte Welle (r und e), im zweiten Medium zwei gebrochene Wellen (1 und 2) fortgepflanzt werden

$$16) \quad \begin{aligned} A &= (\mathfrak{F}_e e^{-t/v} + \mathfrak{F}_r e^{+t/v}) e^T, \\ B &= (\mathfrak{G}_e e^{-t/v} + \mathfrak{G}_r e^{+t/v}) e^T, \\ A' &= (\mathfrak{F}_1 e^{-t/v_1} + \mathfrak{F}_2 e^{-t/v_2}) e^T, \\ B' &= (\mathfrak{G}_1 e^{-t/v_1} + \mathfrak{G}_2 e^{-t/v_2}) e^T, \end{aligned}$$

Digitized by Google

wobei wieder die $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ die complexen Amplituden bezeichnen und $2\pi i t/\tau = T$, $2\pi i\varepsilon/\tau = \zeta$ gesetzt ist, so erhält man aus (15) unter Benutzung von (1)

$$17)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_0+\mathfrak{F}_r &= \mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{G}_0+\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2,\\ v(\mathfrak{F}_0-\mathfrak{F}_r) &= v_1\mathfrak{F}_1+v_2\mathfrak{F}_2,\\ v(\mathfrak{G}_0-\mathfrak{G}_r) &= v_1\mathfrak{G}_1+v_2\mathfrak{G}_2. \end{aligned}$$

Hiermit sind die Formeln (8) für $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{F}_1$ resp. $\mathfrak{F}_2/\mathfrak{G}_2$ zu verbinden.

Man erhält so:

$$18)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= \frac{2v(\mathfrak{F}_0+ie\mathfrak{G}_0)}{(1-e^2)(v+v_1)}, \qquad \mathfrak{G}_1 = \frac{2iev(\mathfrak{F}_0+ie\mathfrak{G}_0)}{(1-e^2)(v+v_1)},\\ \mathfrak{F}_2 &= -\frac{2iv(\mathfrak{G}_0-ie\mathfrak{F}_0)}{(1-e^2)(v+v_2)}, \qquad \mathfrak{G}_2 = \frac{2v(\mathfrak{G}_0-ie\mathfrak{F}_0)}{(1-e^2)(v+v_2)}, \end{aligned}$$

$$19)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_r &= \frac{1}{(v+v_1)(v+v_2)(1-e^2)}\big(\mathfrak{G}_0 2iev(v_2-v_1)\\ &\quad +\mathfrak{F}_0((v+v_2)(v-v_1)-e^2(v+v_1)(v-v_2))\big),\\ \mathfrak{G}_r &= \frac{1}{(v+v_1)(v+v_2)(1-e^2)}\big(\mathfrak{F}_0 2iev(v_2-v_1)\\ &\quad +\mathfrak{G}_0((v+v_1)(v-v_2)-e^2(v+v_2)(v-v_1))\big). \end{aligned}$$

4. Diese Formeln sind noch vollständig allgemein. Wir wollen sie nunmehr auf die unmittelbare Umgebung einer Windungsaxe anwenden, d. h. die Werthe (11) in sie einführen, welche ein mit den Hauptaxen der Schwingungsellipsen zusammenfallendes Coordinatenkreuz XY voraussetzen. Bei Vernachlässigung der in δ multiplicirten Glieder erhält man dann

$$20)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= v\Big[\frac{\mathfrak{F}_0+i\mathfrak{G}_0}{(v+v_0)}\Big(\frac{1}{\delta}+\frac{\beta\Phi}{2v_0(v+v_0)}\Big)-\frac{i\mathfrak{G}_0}{v+v_0}\Big],\\ \mathfrak{G}_1 &= iv\Big[\frac{\mathfrak{F}_0+i\mathfrak{G}_0}{(v+v_0)}\Big(\frac{1}{\delta}+\frac{\beta\Phi}{2v_0(v+v_0)}\Big)-\frac{\mathfrak{F}_0+2i\mathfrak{G}_0}{v+v_0}\Big],\\ \mathfrak{F}_2 &= -iv\Big[\frac{\mathfrak{G}_0-i\mathfrak{F}_0}{(v+v_0)}\Big(\frac{1}{\delta}-\frac{\beta\Phi}{2v_0(v+v_0)}\Big)-\frac{\mathfrak{G}_0-2i\mathfrak{F}_0}{v+v_0}\Big],\\ \mathfrak{G}_2 &= v\Big[\frac{\mathfrak{G}_0-i\mathfrak{F}_0}{(v+v_0)}\Big(\frac{1}{\delta}-\frac{\beta\Phi}{2v_0(v+v_0)}\Big)+\frac{i\mathfrak{F}_0}{v+v_0}\Big]; \end{aligned}$$

$$21)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_r &= \mathfrak{F}_0\frac{v-v_0}{v+v_0}+\frac{\beta v\Phi}{v_0}\frac{\mathfrak{F}_0+i\mathfrak{G}_0}{(v+v_0)^2},\\ \mathfrak{G}_r &= \mathfrak{G}_0\frac{v-v_0}{v-v_0}+\frac{i\beta v\Phi}{v_0}\frac{\mathfrak{F}_0+i\mathfrak{G}_0}{(v+v_0)^2}. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Es ergiebt sich hieraus, daß den strengen Reflexionsbedingungen (12) genügt wird, daß aber die aus ihnen folgenden gebrochenen Theil-Amplituden (ebenso wie sich aus der angenäherten Betrachtung ergab) für die Richtungen der Windungsaxen, die durch $\delta = 0$ characterisirt sind, unendlich werden, obgleich die reflectirten Amplituden endlich sind.

Um darzulegen, wie trotzdem eine physikalische Unmöglichkeit nicht zu Stande kommt, nämlich die gebrochenen Intensitäten immer endlich bleiben, geben wir den in (16) enthaltenen Ausdrücken für A' und B' die Form

$$22) \quad \begin{aligned} A' &= \left(\mathfrak{F}_1 e^{\zeta(1/v_0 - 1/v_1)} + \mathfrak{F}_2 e^{\zeta(1/v_0 - 1/v_2)}\right) e^{T - \zeta/v_0}, \\ B' &= \left(\mathfrak{G}_1 e^{\zeta(1/v_0 - 1/v_1)} + \mathfrak{G}_2 e^{\zeta(1/v_0 - 1/v_2)}\right) e^{T - \zeta/v_0}. \end{aligned}$$

Nun ist innerhalb der eingeführten Genauigkeitsgrenzen nach (11)

$$23) \quad \begin{aligned} \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} &= \frac{v_1^2 - v_0^2}{2 v_0^3} = -\frac{\beta \delta \Phi}{2 v_0^2}, \\ \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_2} &= \frac{v_2^2 - v_0^2}{2 v_0^3} = +\frac{\beta \delta \Phi}{2 v_0^2}, \end{aligned}$$

und somit bei Entwickelung der in (22) in den Klammern stehenden Exponentialgrössen und Beschränkung auf die erste Ordnung (was eine gewisse Kleinheit des Productes $\zeta\delta$ voraussetzt)

$$24) \quad \begin{aligned} A' &= \left(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 - \frac{\zeta \beta \delta \Phi}{2 v_0^2} (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2)\right) e^{T - \zeta/v_0}, \\ B' &= \left(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 - \frac{\zeta \beta \delta \Phi}{2 v_0^2} (\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2)\right) e^{T - \zeta/v_0}. \end{aligned}$$

Nach (17) ist hierin

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_e + \mathfrak{F}_r, \qquad \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_e + \mathfrak{G}_r$$

und somit endlich. $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2$ sind wegen des Factors δ nur in den mit $1/\delta$ proportionalen Gliedern einzuführen und geben mit δ multiplicirt nach (20)

$$\delta(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) = \frac{2v(\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{G}_e)}{v + v_0}, \qquad \delta(\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2) = +\frac{2iv(\mathfrak{F}_e + i\mathfrak{G}_e)}{v + v_0}.$$

Die vollständigen Werthe von A' und B' werden hiernach

$$25) \quad \begin{aligned} A' &= \left(\frac{2v\mathfrak{F}_e}{v + v_0} + \frac{v\beta\Phi}{v_0} \frac{\mathfrak{F}_e + i\mathfrak{G}_e}{(v + v_0)^2} \left(1 - \frac{\zeta(v + v_0)}{v_0^2}\right)\right) e^{T - \zeta/v_0}, \\ B' &= \left(\frac{2v\mathfrak{G}_e}{v + v_0} + \frac{iv\beta\Phi}{v_0} \frac{\mathfrak{F}_e + i\mathfrak{G}_e}{(v + v_0)^2} \left(1 - \frac{\zeta(v + v_0)}{v_0^2}\right)\right) e^{T - \zeta/v_0}; \end{aligned}$$

Digitized by Google

da $\xi e^{-\xi/v_0}$ mit wachsendem ξ nicht über alle Grenzen wächst, so ist erwiesen, daß A' und B' trotz des Unendlichwerdens der Theilamplituden in dem Krystall überall endlich sind.

Die Formeln gestatten sogleich auch die zweite früher hervorgehobene Schwierigkeit zu erledigen, welche auf der scheinbaren Unbestimmtheit von A' und B' in den Windungsaxen beruht. Diese Unbestimmtheit wird dadurch bewirkt, daß das oben vorausgesetzte Coordinatensystem in den Windungsaxen unbestimmt wird. In der That degeneriren dort die Schwingungsellipsen, mit deren Axen das Coordinatenkreuz XY zusammenfallen sollte, zu Kreisen; Φ ist gleich $\sin 2\varphi + i\cos 2\varphi$, und φ bezeichnet den Winkel der X-Axe mit der festen Richtung $[X]$ oder Q; Φ wird sonach gleichfalls unbestimmt.

Die obigen Ausdrücke für A', B' lassen nun aber leicht erkennen, daß eine wirkliche Unbestimmtheit nicht vorhanden ist; das Axensystem XY ist zwar willkürlich und A', B' finden sich von der Wahl desselben abhängig, doch aber so, daß sie jederzeit dieselbe Schwingung darstellen.

In der That, gehen wir von dem Axensystem $[XY]$ aus, für welches $\varphi = 0$, also $\Phi = i$ ist, so können wir mit durchsichtigen Abkürzungen die Formeln (25) schreiben

$$[A'] = ([\mathfrak{F}_r]\mathfrak{V} + i([\mathfrak{F}_i] + i[\mathfrak{G}_r])\mathfrak{W})e^{T-\xi/v_0},$$
$$[B'] = ([\mathfrak{G}_r]\mathfrak{V} - ([\mathfrak{F}_i] + i[\mathfrak{G}_i])\mathfrak{W})e^{T-\xi/v_0}.$$

Dies transformiren wir auf ein beliebiges Coordinatensystem XY mit Hülfe der Formeln

$$x = [x]\cos\varphi - [y]\sin\varphi, \qquad [x] = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$y = [x]\sin\varphi + [y]\cos\varphi, \qquad [y] = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Dann ergiebt eine einfache Rechnung

$$A' = (\mathfrak{F}_r\mathfrak{V} + \Phi(\mathfrak{F}_i + i\mathfrak{G}_r)\mathfrak{W})e^{T-\xi/v_0},$$
$$B' = (\mathfrak{G}_r\mathfrak{V} + i\Phi(\mathfrak{F}_i + i\mathfrak{G}_r)\mathfrak{W})e^{T-\xi/v_0},$$

in Uebereinstimmung mit (25). Die durch wechselndes φ aus (25) folgenden Gleichungen stellen also immer dieselbe Schwingung dar. —

Was die reflectirten Amplituden $\mathfrak{F}_r$ und $\mathfrak{G}_r$ angeht, so zeigen die Gleichungen (21), daß ihre Werthe aus zwei verschiedenartigen Theilen zusammengesetzt sind. Der zweite Theil (über dessen scheinbare Unbestimmtheit genau das eben Gesagte gilt) ver-

Digitized by Google

schwindet beim Uebergang zu einem isotropen absorbirenden Medium von der complexen Geschwindigkeit v_0, der erste Theil entspricht also diesem speciellen Falle. Wegen des im Allgemeinen überaus kleinen Verhältnisses $a_{12}/(v+v_0)^2$ ist der Einfluß der krystallinischen Natur des Mediums auf das reflectirte Licht im Allgemeinen äußerst gering. Man kann ihn steigern, wenn man an Stelle des leeren Raumes, in dem das Licht auf den Krystall fällt, ein Medium mit nahezu dem Werth v_0 der complexen Gewindigkeit setzt. Hier ließe sich theoretisch das System der reflectirten Amplituden auf den Werth

$$\mathfrak{F}_r = -\frac{i a_{12}}{4 v_0^2}(\mathfrak{F}_e + i\mathfrak{G}_e), \qquad \mathfrak{G}_r = +\frac{a_{12}}{4 v_0^2}(\mathfrak{F}_e + i\mathfrak{G}_e)$$

bringen, der circularen Schwingungen entspricht. Leider dürfte es beträchtliche Schwierigkeiten bieten, dies merkwürdige Resultat der Theorie zu verificiren.

Göttingen, Anfang Juli 1902.

Digitized by Google

Zur experimentellen Anatomie.

Von

Hermann Vöchting,
Correspondenten der math.-phys. Klasse.

Vorgelegt in der Sitzung vom 12. Juli 1902 durch G. Berthold.

In meinen Untersuchungen über vicarirende Organe wurde gezeigt, daß man im Stande ist, die morphotischen Vorgänge bei der Gewebebildung auf experimentellem Wege zu beeinflussen. Die längst gehegte Ansicht, daß die Anatomie und Histologie zu ihrer weiteren Ausbildung der experimentellen Behandlung in ganz anderer Weise bedürfen, als sie ihnen bisher zu Theil geworden, wurde durch jene Untersuchungen mehr und mehr befestigt. Die im Verlaufe der letzten Jahre ausgeführte Arbeit, deren Ergebnisse wir heute im Auszuge vorlegen, soll einen weiteren Beitrag in der angedeuteten Richtung liefern. Sie steht im Zusammenhange mit anderen ähnlichen Gegenständen, über die erst später berichtet werden kann.

Den Ausgangspunkt bildete die Frage, welche inneren Störungen auftreten, wenn man Knollenpflanzen mit zweijähriger Lebensdauer im zweiten Jahre am Blühen verhindert. Auf Grund der in den früheren Untersuchungen gewonnenen Erfahrungen durfte man erwarten, daß der Eingriff in die normale Entwickelung zunächst eine Hypertrophie, als Folge davon aber Veränderungen in der Gewebebildung herbeiführen würde, die als Stütze für weitere Forschung, für ein tieferes Eindringen dienen könnten.

Als erste Versuchspflanzen wurden zwei Formen benutzt, die eine mit Stengel-, die andere mit Wurzelknolle, der Kohlrabi, Brassica oleracea f. gongylodes, und die Runkelrübe, Beta vulgaris. Kräftige Objecte ließ man im Frühling sich soweit entwickeln, daß ihre Blüthenstände in der Hauptsache angelegt waren. Dann

Digitized by Google

entfernte man diese Sproß-Systeme, sowie alle in den Achseln der Laubblätter vorhandenen Knospen, sorgte ferner dafür, daß auch in der Folge keine Achsel-Producte zum Wachsthume gelangten. Im einen wie im andern Falle stand somit über der Knolle ein längeres, bloß mit assimilirenden Blättern besetztes, Stengelstück.

Bei der Runkelrübe erfuhr nun dieser Sproßtheil keine bemerkenswerthen Veränderungen; die Knolle dagegen nahm ihr Dickenwachsthum, das bekanntlich unter normalen Verhältnissen am Schlusse des ersten Jahres beendet ist, wieder auf und vergrößerte sich nicht unbeträchtlich [1]).

Anders verhielten sich die Kohlrabi-Pflanzen. An ihnen ließen die Knollen kein Wachsthum wahrnehmen, die darüber stehenden Sproßtheile boten aber eine auffallende Erscheinung. Es begannen nämlich die Blattkissen zu wachsen und sich bis zum Hochsommer zu umfangreichen Körpern zu gestalten. An den stärksten unter diesen betrug der Querdurchmesser 20 mm und mehr, ihr Gewicht belief sich bis auf 5 Gr. An der normalen, sich ungestört entwickelnden Pflanze beobachtet man diese Gebilde niemals; hier treten die Blattkissen kaum hervor. Jene Objecte gewähren dabei ein Bild der Ueppigkeit; die Blätter werden groß, dick und fleischig und haben dunkel blaugrüne Farbe. — Die histologische Untersuchung lehrte, daß diese Körper von dem Parenchym der Rinde des Kissens und von den darin verlaufenden Gefäßsträngen gebildet worden waren; diese hatten sich in seltsamer Weise gestaltet; sie waren theilweise zu runden, ringsum mit Cambium ausgerüsteten, mächtigen Körpern entwickelt. Das von dem Cambium erzeugte Gewebe bestand im Gefäßtheile aus dünnwandigen Elementen, durch die sich Reihen kleiner Gefäße hinzogen. Besonders stark entwickelt war der Siebtheil. Er führte die bekannten Elemente des Weichbastes, daneben zahlreiche dünnwandige parenchymatische Zellen. Das die Bündel umgebende Grundgewebe war stellenweise dicht mit Sclerenchym-Zellen versehen.

Das Parenchym und die dünnwandigen Elemente der Bündel enthielten reichlich Reserve-Stoffe. Besonders fiel der außerordentlich hohe Gehalt an Calciumphosphat auf. Offenbar waren dies die Substanzen, die in den Samen hätten abgelagert werden sollen, und nun hier ihre Stätte fanden. —

Im normalen Holzkörper der Achse war das Cambium eben-

1) Auf die Versuche Briehm's, die Lebensdauer der Runkelrübe über das normale Maaß hinaus zu verlängern, werden wir in unserer ausführlichen Arbeit eingehen.

Digitized by Google

falls thätig geblieben. Auch hier hatte es im oberen Stengeltheile nach außen und innen keine mechanischen, sondern nur noch dünnwandige Elemente erzeugt. Die Rinde wies auch hier reichen Gehalt an Reserve-Stoffen auf.

Als wichtigstes Ergebniß des eben beschriebenen Versuches läßt sich bezeichnen, daß in Folge der Ernährungs-Hypertrophie knollenartige Blattkissen erzeugt werden, Organe, die im normalen Entwickelungsgange unserer Pflanze niemals entstehen. Will man sie als Geschwülste auffassen, dann sind sie den gutartigen beizuzählen. Thatsächlich bilden sie neue Organe an der Pflanze, wahrscheinlich in Folge der unnatürlichen Anhäufung von Nährmaterial in der Achse, besonders deren oberem Theile, angelegt und nun als Ablagerungsstätten für jene Stoffe dienend.

Die Beobachtung, daß das Cambium in den veränderten Objecten keine mechanischen Zellen mehr hervorbringt, veranlaßte zunächst, die Untersuchung auf andere, und zwar nicht knollenbildende, Pflanzen auszudehnen. Besonders benutzt wurde eine dem Kohlrabi verwandte, ebenfalls zweijährige Form, der Wirsing, Brassica oleracea f. bullata, sodann der einjährige Helianthus annuus, ferner Ricinus-Arten u. a.

Bei allen ergab sich übereinstimmend, daß die Unterdrückung der geschlechtlichen Thätigkeit eine üppige vegetative Entwickelung zur Folge hat. Die Stengel verdicken sich, theilweise bedeutend; die Blätter erreichen großen, sogar mächtigen Umfang, vergrößern ihre Elemente senkrecht zur Fläche und zeichnen sich durch dunkle, satte Farbe aus. Besonders auffallend sind die Verhältnisse bei der Sonnenblume. Hier wird der Stamm im oberen Theile dick und fleischig, während die Blätter gewaltigen Umfang erreichen. Die äußeren Blattspuren laufen als mächtige Hügel, gewöhnlich drei an Zahl, von der Blattbasis am Stamme hinab. Dazu kommt, daß einzelne Individuen an ihren Wurzeln dicht unter und an der Erdoberfläche kleine knollenartige Bildungen entstehen lassen.

Den äußeren Veränderungen entsprechen die inneren Verhältnisse. Wie beim Kohlrabi beobachtet man auch hier im Stamme eine bedeutende Entwickelung des Parenchyms und ein Zurücktreten der mechanischen Elemente, doch hat man zwischen den verschiedenen Regionen am Stamme zu unterscheiden.

Beim Wirsing weist in der höchsten Region der Gefäßtheil des Bündels, wenn zur Zeit der Operation die Bildung der Holzzellen noch nicht begonnen hatte, lediglich Gefäßreihen mit dünnwandigem Gewebe auf; mechanische Zellen fehlen darin völlig.

Digitized by Google

Ganz abnorm stark entwickelt ist der Weichbast, neben Siebröhren und den sie begleitenden Elementen ebenfalls nur aus dünnwandigen Zellen zusammengesetzt. Rinde, Mark und die zartwandigen Theile der Bündel sind dicht mit Reserve-Stoffen, besonders Stärke, erfüllt. Auch hier herrscht wieder eine außerordentliche Anhäufung von Calciumphosphat. — In der auf die eben genannte zunächst folgenden Region reihen sich den zur Zeit der Operation schon vorhandenen Holzzellen bloß dünnwandige Zellen, unterbrochen von Gefäßreihen, an. Weiter unten im Stamme aber entstehen nachträglich Holzzellen, doch bilden auch hier dünnwandige Elemente den Abschluß des Holzkörpers; der Weichbast weicht in dieser Region nur wenig oder nicht vom normalen ab. Alle Theile, merkwürdiger Weise auch die Holzzellen, vor- und diesjährige, sind reichlich mit Reserve-Stoffen versehen.

Aehnlich wie der Wirsing verhält sich die Sonnenblume[1]). In dem oberen angeschwollenen Theile erfahren das Mark und besonders die Rinde ein abnorm starkes Wachsthum. Ganz abweichend vom gewöhnlichen ist der Bau des Gefäßbündels. Während im normalen Körper compacte Massen mechanischer Zellen erzeugt werden, bilden sich hier nur schmale radial gerichtete Streifen solcher Elemente, die durch breite Parenchym-Bänder getrennt sind. Die Gefäße liegen theils in jenen Streifen, theils bilden sie deren Fortsetzung nach innen und außen. Der Siebtheil ist auch hier sehr entwickelt. Er besteht aus Weichbast-Elementen, deren bandartig gestaltete Gruppen den Gefäßreihen innerhalb des Cambiums entsprechen; zwischen ihnen liegen breite Massen dünnwandigen Parenchyms. — In der tieferen Region wird der Stamm allmählich fester. Hier werden auch nach der Operation die Elemente des Holzkörpers erzeugt, Gefäße, Tracheiden, Holzzellen u. s. w., aber diese erhalten abnorme Gestalt. Alle bleiben beträchtlich kürzer, als die des unverletzten Stammes; die Gefäße und Tracheiden werden dafür weiter, jene oft tonnenförmig. Auch die Holzzellen erlangen größeren Durchmesser, erfahren aber mannigfache andere Abweichungen in der Form, Biegungen und Krümmungen, wie man sie sonst in Geschwülsten beobachtet.

Nachdem festgestellt worden, daß der Experimentator im Stande ist, in der angegebenen Weise den Entwickelungsverlauf

1) Wie ich erst vor kurzem ersehen, hat schon vor etwa 20 Jahren C. Kraus „Entgipfelungsversuche“ mit Helianthus angestellt. Er beschreibt die in Folge dessen eintretende Anschwellung der Achse, giebt an, daß sie krautig bleibe, geht aber auf die histologischen Vorgänge selbst nicht näher ein.

Digitized by Google

des Bündels zu verändern, richtete sich die Untersuchung alsbald auf weitere Punkte.

Zunächst und vor allem faßte man die mechanischen Zellen in's Auge. Nach Hegler's bekannten Angaben kann man durch künstliche Belastung nicht nur eine raschere Entwickelung dieser Elemente herbeiführen, sondern ihre Neubildung sogar an Orten bewirken, an denen sie sonst nicht entstehen. Ist diese Angabe, die durch unsere eigenen Erfahrungen nach gewisser Richtung bestätigt wurde, richtig, dann darf man erwarten, daß die veränderten Objecte unseres Versuches, wenn künstlich belastet, die mechanischen Elemente wieder hervorbringen. Von dieser Voraussetzung ausgehend wurden am Blühen verhinderte Pflanzen des Wirsing und der Sonnenblume durch Gewichte belastet, die in geeigneter Weise am Scheitel angebracht waren; bei der zuletzt genannten Pflanze wurden außerdem noch normal blühende Objecte zum Experimente verwandt. Die Belastung war verschieden groß; die größte betrug bei der Sonnenblume 20 Kilo, beim Wirsing mehr als 6 Kilo, Gewichte, die das der Blüthen- und Fruchtstände, welche unter gewöhnlichen Verhältnissen von der Pflanze erzeugt werden, um ein Vielfaches übertreffen. Die Belastung dauerte Monate lang.

Zu meiner Ueberraschung ergaben diese Versuche, daß die erwartete Neubildung oder Verstärkung der mechanischen Zellen weder in den am Blühen verhinderten, noch in den normalen Objecten eintrat. In den Stämmen der Sonnenblume konnte eine Zunahme der fraglichen Elemente nicht festgestellt werden; beim Wirsing war sie zwar zu beobachten, aber bei weitem nicht in dem Maaße, wie man es der hohen Belastung entsprechend erwarten durfte. Dieses Ergebniß steht mit den Angaben Hegler's nicht in Einklang.

Gleichzeitig mit den eben besprochenen Versuchen wurde noch ein weiterer ausgeführt. Durch ein eingehendes Studium des mechanischen Prinzips im Baue der Monocotylen hat Schwendener die Bedeutung und Verbreitung der I förmigen Träger festgestellt. Die Aufgabe, die Bildung solcher Träger in der Pflanze auf experimentellem Wege hervorzurufen, schwebte mir lange vor, der Versuch selbst aber erwies sich in mehr als einer Hinsicht schwierig. Es schien nun, als böten unsere an aller Sproßbildung verhinderten Pflanzen geeignete Objecte für die Untersuchung. Daher wurden kräftige in Töpfen gezogene Wirsing-Pflanzen in horizontaler Lage angebracht, in einiger Entfernung von der Basis über eine Stütze geleitet und dann am freien Ende belastet. Das

Digitized by Google

Gewicht betrug anfangs 500 Gr. und stieg allmählich bis über 3000 Gr.; der Hebelarm, an dem es wirkte, hatte eine Länge von 25, 30 und selbst noch mehr Centimetern. Die Last wirkte wieder Monate lang. In der That fand sich nun, wie erwartet, daß unter der sehr starken Belastung der Holzkörper an den Orten maximaler Spannung auf der Ober- und Unterseite stärker wuchs, und reichlicher mechanische Elemente erzeugte, als auf den damit abwechselnden Flanken. Der Unterschied war bald nur gering, bald recht beträchtlich. — Daß es sich hier wirklich nur um eine Folge der Belastung handelte, ging daraus hervor, daß in ähnlichen Pflanzen, die ebenfalls in horizontaler Lage, aber unbelastet, angebracht waren, das exzentrische Wachsthum unterblieb.

Wir fanden, daß selbst sehr starke Belastung der aufrechten am Blühen verhinderten Objecte nicht genügt, um das normale Holzwachsthum wieder herbeizuführen. Dies aber läßt sich unschwer dadurch erreichen, daß man eine solche Pflanze an ihrem Scheitel durch Pfropfen mit einem Reise verbindet. Sobald dieses zu einem Sprosse von einigem Umfange herangewachsen ist, treten in der Unterlage die normalen Verhältnisse wieder ein. Das Cambium bildet nach innen und außen dieselben Elemente, die es in der ungestört wachsenden Pflanze erzeugt. Hinsichtlich der mechanischen Zellen ist diese Thatsache um so auffallender, wenn man bedenkt, daß das Gewicht des eingepflanzten Sprosses nur einen kleinen Bruchtheil dessen darstellt, mit dem der Stamm in unseren Versuchen künstlich belastet wurde.

Aus dem Mitgetheilten folgt, daß der ontogenetische Gang der Gewebe-Differenzirung von inneren, correlativen Verhältnissen beherrscht, daß die Bildung der einzelnen Gewebeformen nicht einfach durch das Bedürfniß bestimmt wird. Die Auslösungs-Theorie genügt hier nicht.

Digitized by Google

Die Körpermuskulatur von Branchiobdella parasita.

Von

Friedo Schmidt (Göttingen).

Vorgelegt in der Sitzung am 26. Juli 1902 von Ehlers.

Die Ergebnisse meiner Untersuchungen über die Körpermuskulatur (Hautmuskelschlauch) von Branchiobdella parasita möchte ich im Folgenden in kurzer Fassung bekannt geben, indem ich mir eine eingehende Darstellung derselben unter Berücksichtigung der einschlägigen Litteratur vorbehalte.

Gemäß der Ausgestaltung der Körpermuskulatur besteht der „Kopf" aus 3 Segmenten, nämlich einem Buccalsegment, das die Mundöffnung enthält, und 2 Postbuccalsegmenten. Der eigentliche Körper (Soma) besitzt bekanntlich 8 typische Segmente; das 9te, das durch die Saugnapfbildung umgewandelte Analsegment, ist aus einer Verschmelzung von mehreren Segmenten hervorgegangen.

Der Hautmuskelschlauch setzt sich aus 3 Muskelsystemen zusammen, nämlich, von außen nach innen aus einem Ring-, einem Diagonal- und einem Längsmuskelsystem.

Das Ringmuskelsystem

ist über die ganze Länge des Tieres ausgedehnt und überall einschichtig. In jedem Segmente stellt es eine gesonderte Anlage dar. Die einzelnen Zellen eines solchen segmentalen Systems stehen in regelmäßigen Abständen von einander und, alle einander parallel, am Umfange des Tieres zur Medianebene senkrecht.

Nur in den beiden Postbuccalsegmenten wollte es mir wegen der Schwäche der Zellen nicht gelingen, das System zu durchschauen. Von den Systemen der übrigen Segmente läßt sich folgendes sagen:

Digitized by Google

In einem jeden segmentalen Systeme lassen sich hinsichtlich einer Längen- und einer Formdifferenz der Zellen je 2 Arten unterscheiden. Die einen Zellen reichen von der dorsalen Mittellinie bis zur ventralen („lange“ Zellen), die anderen von der Lateral-linie entweder bis zur dorsalen oder bis zur ventralen Mittellinie („kurze“ Zellen). Die „kurzen“ Zellen, die auf diese Weise in einer dorsalen und einer ventralen Region gesondert liegen, sind also genau halb so lang wie die „langen“ Zellen. Diese langen und kurzen Zellen sind nun das eine Mal einfach, spindelförmig gebaut („Spindelzellen“), das andre Mal doppelspindelförmig, d. h. aus 2 gleich langen und gleich starken, parallel nebeneinander liegenden Spindeln bestehend, die auf halber Länge verbunden sind („Doppelspindelzellen“). (Es treten also 4 Zellarten auf: lange, kurze Spindelzellen, lange, kurze Doppelspindelzellen.)

Demnach giebt es keine Ringmuskelzelle, die als einzelne den ganzen Umfang des Körpers umgriffe; alle Zellen bilden nur Spangen an ihm, sozwar, daß sie während ihrer ganzen Erstreckung nur einer bilateralen Körperseite angehören.

Terminal ist eine jede Ringmuskelzelle mit einer entsprechenden derselben Seite wie der Gegenseite zu einem Muskelringe verknüpft; es fehlen terminal frei endigende Zellen.

Jede Spindel- und jede Doppelspindelzelle ist einkernig. Der Kern liegt stets auf der Mitte der Zelllänge. Auf diese Weise bilden die Kerne von Zellen gleicher Länge und gleicher Erstreckung jedesmal eine längsgerichtete Reihe („Kernreihe“) an der Flanke des Tieres. Es ergeben sich somit in jedem Segmente, in welchem lange und kurze Zellen vorkommen (im Buccalsegment und in allen somatischen Segmenten) auf jeder Seite 3 Kernreihen, eine dorsale, eine ventrale und eine laterale. (Im hinteren Postbuccalsegment bestehen jederseits 2 Kernreihen, eine dorsale und eine ventrale; im vorderen Segment liegen die Kerne in einer Zone, die sich auf einer Körperseite zwischen einer dorsalen und einer ventralen Kernreihe ausbreitet).

Im Soma kehrt von Segment zu Segment derselbe Grundplan der Zellanordnung wieder.

Vollkommen gleich ist das System in den somatischen Segmenten 1—7 incl. Es besteht hier auf jeder Segmenthälfte aus 25 Zellen (5 lange, 5 kurze Spindelzellen, 3 lange, 12 kurze Doppelspindelzellen).

Im 8ten Segment setzt sich die Anlage jederseits aus 19 Zellen zusammen (3 lange, 7 kurze Spindelzellen, 1 lange, 8 kurze Doppelspindelzellen).

Digitized by Google

Im Analsegment, das 6 Ringel ungleicher Größe aufweist, ist die Anlage des Systems eine dementsprechend compliziertere.

Jedes der beiden Postbuccalsegmente enthält jederseits etwa 20 Zellen. Das Buccalsegment führt gleichfalls 20 Zellen (19 kurze Spindelzellen, 1 lange Doppelspindelzelle).

In jedem Ringel eines somatischen Segments nehmen die Zellen von der Mitte des Ringels zu den Grenzen hin successive an Stärke ab.

Die tiefsten Punkte der Ringel- und der Segmentfurchen sind stets muskelfrei.

Eine Ringmuskelzelle setzt sich zusammen aus einem contractilen (Rinden-)Teil und einem plasmatischen (Mark-)Teil. Eine Spindelzelle stellt sich als ein spindliges Gebilde contractiler Substanz dar, in deren Axe das Plasma gelagert ist. Durch einen in der contractilen Rinde auf der Mitte der Zelle angebrachten klaffenden Längsspalt tritt das Plasma frei zu Tage. Der Kern liegt im Plasma unter dem Spalt. Eine Doppelspindelzelle besteht aus 2 contractilen Spindeln, in deren Axen sich wieder Plasma findet. Beide besitzen je einen Längsspalt in der Rinde. Durch diese Spalten steht das axiale Plasma beider Spindeln in Zusammenhang und zwar vermittelst eines mächtigen Zwischenstücks gleicher Substanz, das den Kern birgt. Die Spalten befinden sich bei beiden Zellformen im Umfange der Spindeln stets an der der Leibeshöhle zugewandten Seite, d. i. an der Seite, welche der Berührungsstelle der Spindel mit dem Epithel gegenüberliegt und nach welcher hin das Plasma ungehindert aus dem Zellinnern hervortreten kann.

Etwas anders verhalten sich die meisten Zellen der Postbuccalsegmente: die contractile Rinde umgiebt das Plasma nicht im ganzen Umfange, sondern diese ist dem letzteren peripher nur als eine schmale Leiste angelagert. Das Plasma ist auch bei diesen Zellen nach der Leibeshöhle hin gerichtet.

Das Diagonalmuskelsystem

entfaltet sich continuierlich über die Segmente 3—9 incl. (es ist also ein rein somatisches System). Die Anlage ist wieder in jedem Segmente eine gesonderte.

In den Segmenten 3—8 incl. ist es vollkommen gleichartig ausgestaltet. Es besteht auf jeder Segmenthälfte aus 2 ungefähr gleichlangen und gleichstarken Zellen, die eine eine Spindelzelle, die andre eine „Gabelzelle", d. i. eine Spindelzelle,

Digitized by Google

bei welcher der eine Fortsatz (hier der dorsalwärts gerichtete) gespalten ist. Diese beiden Zellen verlaufen an der Flanke des Tieres parallel und zwar vom Bauch schräg nach hinten zum Rücken hinauf, ein Verlauf, der zur Längsaxe des Tieres in einer Neigung von 45° steht. Im Bereich der beiden Mittellinien kommt es zwischen den Zellen der beiden Körperseiten zu mannigfachen rechtwinkligen Ueberkreuzungen, die von Segment zu Segment dasselbe eigenartige System von Rechtecken u. s. w. erzeugen. Auf der dorsalen Mittellinie entstehen in Diagonalstellung 2 unpaare, ungleich große Quadrate, daneben paarige Drei- und Vierecke; auf der ventralen Mittellinie stellt sich 1 unpaares Quadrat ein.

Bei ihrem Schrägverlauf gehören die beiden Zellen 2 Segmenten an. Der ventral von der Laterallinie liegende Abschnitt beider liegt in dem vorderen, der dorsale im hinteren Segmente.

Jede der beiden Zellen hat am Körperumfange eine asymmetrische Erstreckung, indem sie beide Körperhälften, doch in ungleichem Maße umfaßt: die größte Ausdehnung einer Diagonalzelle liegt auf der einen Körperseite, auf der ihr Kern liegt; die Endabschnitte aber greifen auf die andre Körperseite über. Die Zellen enden an einer Ringel- bezw. Segmentgrenze und zwar stets frei, d. h. ohne terminale Verbindung mit ihresgleichen.

Der Kern liegt bei beiden Zellen ungefähr auf der Mitte der Länge, bei der „Gabelzelle“ an der Verzweigungsstelle.

Complizierter stellen sich die Verhältnisse wieder im Analsegment dar.

Das Längsmuskelsystem

ist mehrschichtig. Es reicht vom Lippenrande des Tieres bis zum Saugnapfrande. Jedes Segment hat sein gesondertes System.

In den somatischen Segmenten 2—8 incl. ist die Anlage der Längsmuskulatur eine völlig gleiche.

Die längsgerichteten Muskelzellen (jederseits 44) eines solchen Segments ordnen sich zu 2 Systemen zusammen, einem „Haupt“- und einem „Nebensystem“.

Am weitesten nach innen liegt das doppelschichtige, nur Spindelzellen (jederseits 37) führende „Hauptsystem“. Es zieht sich, indem sich von Segment zu Segment Zelle an Zelle reiht, als ein continuierlicher, die Leibeshöhle umhüllender Muskelzylinder durch die Segmente hin. Von den beiden Schichten dieses Systems besteht die innere (der Leibeshöhle anliegende) aus kräftigeren und gleichstarken Zellen (jederseits 17), die eng neben-

Digitized by Google

einander liegen und nur auf der Höhe der Laterallinie eine Lücke lassen; die äußere Schicht, unregelmäßig, enthält schwächere Zellen (20). Alle Zellen des Hauptsystems haben die gleiche Länge und zwar ist diese gleich der eines Segments; während aber die einen Zellen (jederseits 21) von einer Segmentgrenze bis zur nächsten reichen („Segmentalzellen"), erstrecken sich die anderen (jederseits 16) von einer Ringelgrenze bis zur nächsten („Intersegmentalzellen").

Da bei allen Zellen dieses Systems der Kern auf halber Länge der Zelle gelagert ist, so ergeben sich (in jedem Segmente) in jeder Schicht 2 ringförmige „Kernreihen": die eine liegt vorn im Segment und wird von den Kernen der Intersegmentalzellen der Schicht gebildet, die andere, hinten im Segment, von den Kernen der Segmentalzellen.

Peripher vom „Hauptsystem" liegt das aus Doppelspindelzellen bestehende „Nebensystem", dessen Zellen (jederseits 7), nur im dorsalen[1]) Umfange des Segments stehend, von der vorderen bis zur hinteren Grenze des großen Ringels reichen.

In den Körpersegmenten 1 und 9, desgleichen in den beiden Postbuccalsegmenten ist die Anlage der Längsmuskulatur eine ähnliche; es fehlt aber in all diesen Segmenten ein „Nebensystem": die Längsmuskulatur liegt hier als ein reines „Hauptsystem" vor. Dieses ist wieder in einer inneren und einer äußeren Schicht entwickelt.

Das 1. Körpersegment enthält wie die Segmente 2—8 incl. jederseits 44 Zellen (21 in der inneren, 23 in der äußeren Schicht). Von diesen sind wieder die einen Segmental-, die anderen Intersegmentalzellen.

Das 9te Segment besitzt ungefähr ebensoviel Zellen.

Im hinteren Postbuccalsegment stehen jederseits 42[2]) Zellen (27 in der inneren, 15 in der äußeren Schicht), im vorderen gleichfalls 42[2]) (26 in der inneren, 16 in der äußeren Schicht). In diesen beiden Segmenten sind alle Zellen Segmentalzellen; deshalb erzeugt jede Schicht nur eine Kernreihe.

Im Buccalsegment ist die Anlage der Längsmuskulatur eine durchaus andre; die Zellen stehen in großen Abständen und sind außerordentlich schwach. Im dorsalen Umfange des Segments

1) Eine einzige dieser Zellen liegt ventral von der Lateralllücke des Hauptsystems.

2) Es ist nicht unmöglich, daß ich in der äußeren Schicht noch 1—2 Zellen übersehen habe.

Digitized by Google

(Oberlippe) zähle ich jederseits 8, im ventralen (Unterlippe) 12 Spindelzellen.

Die Doppelspindelzellen des Nebensystems gleichen histologisch denen des Ringmuskelsystems.

Die Zellen des Hauptsystems sind abgestutzt spindelförmig. Das Plasma wird wieder peripher von der contractilen Rinde umgeben. Letztere weist wieder Längsspalten auf, deren Zahl je nach der Lage der Zelle zu ihrem Nachbarn verschieden ist. Die Zellen der inneren Schicht haben meist 2 Spalten, der eine ist der Leibeshöhle, der andre der Peripherie des Tieres zugewandt; die Zellen der äusseren Schicht sind meist mit einem Spalt, einem peripher gerichteten versehen. Inbezug auf die Lage der Spalten am Umfange der Zellen gilt hier derselbe Satz, den ich oben bei Gelegenheit der Histologie der Ringmuskelzellen aussprach: Ein Spalt ist immer da angebracht, wo die Zelle frei ist von einer Berührung von seiten ihresgleichen oder anderer schwer verschieblicher Dinge, d. h. nach der Seite hin angebracht, nach der das Plasma ungehindert aus dem Zellinnern austreten kann.

Es fehlen mithin auch im Längsmuskelsystem allseitig geschlossene („Hirudineen-")Muskelzellen (gegen E. Rohde[1]).

Im Anschluß an den Hautmuskelschlauch habe ich auch die

Muskulatur der Dissepimente

untersucht.

Das Soma besitzt 8 Dissepimente, nämlich ein Dissepiment 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8 und 8/9. Hierzu kommt noch ein Dissepiment zwischen dem hinteren Postbuccalsegment und dem ersten Körpersegment.

Im letztgenannten Dissepimente stehen jederseits vom Darme 4spindlige Dorsoventralmuskelzellen; sie verlaufen bogenförmig vom Bauch zum Rücken, indem sie sich an beiden Orten, zwischen der Längsmuskulatur sich durchdrängend, am Integument festheften.

Im Dissepiment *1/2* jederseits 2 different gestaltete Zellen; sie begeben sich vom Bauch her an den Darm.

Im Dissepiment *2/3* jederseits 2 Spindelzellen; die eine begiebt sich vom Bauch her, die andre vom Rücken her an den Darm.

In den Dissepimenten *3/4*, *4/5*, *5/6*, *6/7* und *7/8* ist das Muskelsystem gleich gebaut. Es besteht jederseits aus 4 Zellen, 2 der-

1) E. Rohde: Die Muskulatur der Chaetopoden. Zoolog. Beiträge hersg. von A. Schneider. Bd. I. 1885 pg. 173—174.

Digitized by Google

selben umgreifen vom Rücken her, eine vom Bauch her kommend den Darm (letztere bildet dorsal vom Darm mit der gleichen Zelle der Gegenseite eine Ueberkreuzung). Die 4te Zelle ist nur ventral[1]) am Integument befestigt (mit 4 Fortsätzen); sie hat im Umriß etwa die Form eines Blattes mit gesägtem Rande, sie ist breit und platt und mit vielen größeren und kleineren Löchern und Spalten versehen, die in dorsoventral gestellten Reihen hintereinander liegen.

Im Dissepiment *8/9* jederseits 4 Zellen; 3 derselben verlaufen bogenförmig vom Bauch zum Rücken, die 4te aber umfaßt, vom Bauch her aufsteigend, den dorsalen Umfang des Darmes.

Außerdem finden sich im Analsegment eine ganze Anzahl dorsoventraler Muskelzellen, die in ähnlicher Anordnung, d. h. in queren Reihen rechts und links vom Darm stehen wie die Dissepimentmuskelzellen.

Die Zellen der Dissepimentmuskelsysteme sind wie die der übrigen Systeme gebaut: das Plasma liegt axial in der stets von Spalten zerklüfteten contractilen Substanz.

Meine Untersuchungen über die

Organmuskulatur

sind noch nicht abgeschlossen. Doch habe ich soviel feststellen können, daß die Zellen dieser Systeme — des Muskelsystems des Darmtractus, des Centralnervensystems, des Blutgefäßsystems, des Penis, des Receptaculum seminis — vor den oben dargestellten weder in der Form noch im Bau Besonderheiten zeigen.

Nach alledem kann ich den Satz aufstellen: Die Muskelzellen von Branchiobdella parasita sind als eine Abänderung der nematoiden Grundform zu betrachten. Jede Zelle hat einen Kern; dieser enthält ein einziges großes Kernkörperchen.

Was endlich die feinhistologischen Verhältnisse der Muskelzellen anlangt, so will ich hier bemerkt haben, daß jede Zelle von einem Sarcolemmahäutchen umhüllt ist und daß bei Anwendung von Alcohol, Chromessigsäure oder Formol als Fixationsmittel die contractile Rinde in radiärgestellte Fibrillenplatten zerfällt.

---

1) Nur im Dissepiment 7/8 ist diese Zelle auch dorsal am Integument angeheftet.

Göttingen, den 26. Juli 1902.

Digitized by Google

Ueber die electromagnetische Masse des Elektrons.

Von

W. Kaufmann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Juli 1902.

In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich aus der magnetischen und elektrischen Ablenkung der Becquerelstrahlen nachgewiesen, daß für große Geschwindigkeiten die „Masse" des Elektrons veränderlich wird und mit der Geschwindigkeit wächst. Der damals gemachte Versuch, die beobachteten Aenderungen mit den von der Theorie verlangten zu vergleichen, bedarf aus mehreren Gründen einer Berichtigung und Verbesserung, die den Inhalt der folgenden Mitteilung bilden sollen.

Die damals benutzte theoretische Formel von Herrn Searle[2]) konnte mit den Beobachtungen nur dadurch in Einklang gebracht werden, daß zu der elektromagnetischen Masse des Elektrons noch eine mechanische Masse von geeigneter Größe hinzugefügt wurde. Aus der inzwischen erschienenen Theorie von Herrn M. Abraham[3]) geht nun aber hervor, daß der theoretische Ausdruck für die Masse ein anderer ist, je nachdem es sich um longitudinale oder transversale Beschleunigungen handelt, und daß die Searle'sche Formel nur die longitudinale Masse darstellt, während für die hier in Betracht kommende transversale Masse ein Ausdruck gilt, der sich bedeutend langsamer mit der Geschwindigkeit ändert, der aber auch für Lichtgeschwindigkeit unendlich wird.

Ein Versuch, diese Formel mit meinen Beobachtungen in Einklang zu bringen, schlug damals fehl; durch Hinzufügung einer

---

1) Göttinger Nachrichten 1901, Heft 1.
2) Phil. Mag. (5) 44. 340; 1897.
3) Göttinger Nachrichten, 1902, Heft 1.

Digitized by Google

„mechanischen" Masse konnte nichts erreicht werden, denn diese hätte negativ sein müssen (s. Abraham l. c. pag. 21). Ebenso wenig konnte ich damals durch Konstantenverschiebung, etwa durch Annahme eines allen Beobachtungen anhaftenden gleichen Fehlers von einigen Prozenten eine bessere Uebereinstimmung erzielen. [Daß hierbei kleine prozentuale Aenderung großen Einfluß hat, liegt an der außerordentlich rasch ansteigenden Veränderlichkeit der elektromagnetischen Masse in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit].

Erst durch die Auffindung eines Rechenfehlers in meiner Arbeit, die ich Herrn Gehrke verdanke [1]), wurde ich veranlaßt, die Rechnung nochmals aufzunehmen u. zw., wie das Folgende zeigen wird, mit überraschend günstigem Erfolge. Die Prüfung geschah dabei von vornherein unter Elimination derjenigen Fehler, die von den Konstanten des elektrischen und magnetischen Feldes herrühren.

Für die theoretische Berechnung ist nämlich in erster Linie eine genaue Kenntnis der Größe $\beta = v/V$ notwendig [2]), wo v die Elektronen-, V die Lichtgeschwindigkeit. Nun muß der Wert von v für die schnellsten Elektronen, d. h. für die am wenigsten abgelenkten, gegen V hin konvergieren, sodaß, wenn ε_0 die magnetische Ablenkung:

$$(1) \qquad (v)_{\varepsilon_0 = 0} = V$$

und

$$(2) \qquad \beta = \frac{v}{(v)_{\varepsilon_0 = 0}}.$$

Man braucht also zur Ermittlung von β nur Relativwerte von v zu kennen.

Nun ist

$$(3) \qquad v = \frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho} \frac{F}{H} \qquad [9]\ [3]).$$

---

1) Das zweite Glied in Gl. 6 muß heißen:

$$+ \frac{x_1^2 \varepsilon_0}{4(\varepsilon_0^2 + x_2^2 + x_1 x_2)};$$

obgleich hierdurch die Resultate nur um wenige % sich ändern, ist doch der Einfluß auf die theoretische Kurve sehr groß (s. o.).

2) Die Bezeichnung stimmt mit der meiner früheren Abhandlung überein; bei Abraham stehen statt β, v, V die Bezeichnungen $\varkappa$, q, c.

3) Die eingeklammerten Zahlen sind die Gleichungsnummern meiner früheren Arbeit.

Digitized by Google

also

$$\beta = \frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho} : \left(\frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho}\right)_{x=0}. \tag{4}$$

Da nun für sehr kleine Ablenkungen eine genaue Messung nicht mehr möglich war [der kleinste von mir gemessene Wert ist durchaus unsicher und für die Rechnung garnicht zu verwenden] so muß $(y_0 \varrho)_{x_0=0}$ aus den Beobachtungen extrapoliert werden.

Zu diesem Zwecke soll zuerst versucht werden, die Beziehung zwischen der elektrischen und magnetischen Ablenkung, d. h. die auf der Photographie sichtbare sehr schwach gekrümmte Kurve (s. Fig. 3 der früheren Arbeit) empirisch darzustellen durch die Gleichung:

$$y_0 = a\varepsilon_0 + b\varepsilon_0^2. \tag{5}$$

[Daß eine ungerade Funktion gewählt werden muß, folgt aus der Voraussetzung, daß für kleine ε_0 der Wert $y_0 \varrho$ und somit nach Gl. [7] auch die Größe y_0/ε_0 konstant werden muß.]

Unter Auslassung des kleinsten gemessenen Wertes (aus oben erwähntem Grunde) erhält man als wahrscheinlichste Werte

$$a = 0.232 \qquad b = 0.115 \tag{6}$$

und damit:

Tab. I.

y_0 (beob.):	0.198	0.1565	0.1175	0.0839
y_0 (berech.):	0.196	0.156	0.118	0.086.

Gleichung 5) stellt demnach die Beobachtungen völlig hinreichend dar.

Es ist also:

$$\left(\frac{y_0}{\varepsilon_0}\right)_{x_0=0} = 0.232 \tag{7}$$

und da

$$(\varrho)_{x_0=0} = \frac{8.15}{2\varepsilon_0} \qquad [7] \tag{8}$$

so wird:

$$\underline{(y_0 \varrho)_{x_0=0}} = \frac{8.15}{2} \cdot 0.232 = \underline{0.945.} \tag{9}$$

Ferner ist für $\varepsilon_0 = 0$ resp. $\varrho = \infty$ (Gl. [8])

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{1.775}{2} \\ s_1 = 2 \end{cases} \quad \text{also 11)} \; s_1 s_2 = 1.775 \tag{10}$$

Digitized by Google

somit:

$$\underline{\beta = \frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho} \Big| \frac{1.775}{0.945} = \frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho} \cdot 0.532.} \tag{12}$$

Mittels Gl. (12) läßt sich β aus den Beobachtungen ermitteln, ohne daß die Absolutwerte von v bekannt zu sein brauchen. Es ist weiter:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho^2} \frac{F}{H^2} \tag{13}$$

und nach M. Abraham (l. c.) Gl. 26)

$$\mu = \frac{3}{4} \mu_0 \psi(\beta) \tag{14}$$

wobei

$$\psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1+\beta^2}{2\beta} \lg \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right] \tag{15}$$

und somit

$$\psi(0) = \frac{4}{3} \tag{16}$$

Folglich ist:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\varepsilon}{\mu_0} \frac{4}{3} \frac{1}{\psi(\beta)} = \frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho^2} \frac{F}{H^2} \tag{17}$$

oder

$$\frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho^2} \psi(\beta) = \frac{\varepsilon}{\mu_0} \frac{4}{3} \frac{H^2}{F} \tag{18}$$

d. h.

$$\underline{\frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho^2} \psi(\beta) = \text{const.}} \tag{19}$$

Letztere Beziehung, die wiederum das elektrische und magnetische Feld nicht mehr enthält, ist direkt prüfbar. [Das in der Gl. (19) ebenso wie in (12) noch enthaltene Produkt $s_1 s_2$ ist sehr wenig veränderlich und würde auch bei etwas geändertem Feldverlauf sich bloß um eine angenähert konstante Größe verändern. Folgendes sind die Resultate der Berechnung.

Tabelle II.

y_0	ϱ[1])	$y_0 \varrho$	s_1	s_2	β	$\psi(\beta)$	$\frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho^2}$	$\frac{s_1 s_2}{y_0 \varrho^2} \psi(\beta)$
0,198	6,36	1,257	0,890	2,12	0,799	1,96	0,235	0,462
0,1565	7,43	1,165	0,889	2,09	0,847	2,13	0,214	0,455
0,1175	9,13	1,073	0,889	2,06	0,907	2,49	0,1855	0,462
0,0839	11,95	1,002	0,888	2,03	0,957	3,08	0,1505	0,463
0,000	∞	0,945	0,8875	2,00	1,000	∞		0,4605 im Mittel

1) Gegen Tab. I der früheren Arbeit verändert entsprechend der Gehrkeschen Richtigstellung (s. o.).

Digitized by Google

Die Zahlen der letzten Reihe sind in der That, wie Gl. (19) verlangt, konstant, die Abweichungen vom Mittel betragen: $+0{,}3$; $-1{,}2$; $+0{,}3$; $-0{,}5$ %.

Die Beobachtungen sind demnach durch die Abraham'sche theoretische Formel wirklich darstellbar, d. h.:

Die Masse der Elektronen ist rein elektromagnetischer Natur.

Es bleibt noch zu untersuchen, wie weit die Absolutwerte sich von den theoretisch verlangten unterscheiden. Für $(y_0 \varrho)_{z=0}$ war gefunden 0,945.

Das ergiebt nach Gl. (3):

$$(20) \qquad \underline{V} = \frac{1{,}775}{0{,}945}\frac{F}{H} = \frac{1{,}775}{0{,}945}\cdot\frac{44{,}3.10^{11}}{299} = \underline{2{,}785.10^{10}}$$

während die Lichtgeschwindigkeit $3{,}00.10^{10}$ beträgt.

Die Abweichung beträgt 7,2 %, während ich früher den möglichen Fehler der Absolutwerte zu 5 % geschätzt hatte.

Es ist wahrscheinlich, daß dieser Fehler in den gemachten vereinfachten Annahmen über den Verlauf des elektrischen Feldes beruht; nehmen wir dies an, so wären alle v-Werte mit $\frac{3{,}00}{2{,}785}$ zu multiplizieren und dasselbe würde auch für die Werte von ε/μ gelten.

Nun ist nach Gl. (18):

$$(21) \qquad \frac{\varepsilon}{\mu_0} = 0{,}4605\cdot\frac{3}{4}\frac{F}{H^2}$$

oder nach Anbringung oben erwähnter Korrektur:

$$(22) \qquad \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0}\right)_{\text{corr}} = 0{,}4605\cdot\frac{3}{4}\frac{F}{H^2}\cdot\frac{3{,}00}{2{,}785} = \underline{1.84\cdot 10^7}$$

während für Kathodenstrahlen gefunden wurde:

$$(23) \qquad \frac{\varepsilon}{\mu_0} = \underline{1{,}865\cdot 10^7}.$$

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen:

Der relative Zusammenhang zwischen elektrischer und magnetischer Ablenkung entspricht der theoretischen Formel unter der Annahme rein elektromagnetischer Masse. Die Absolutwerte weichen von den theoretischen [Grenzwert von $v = V$ $\varepsilon/\mu_0 = 1{,}86\cdot 10^7$] nur innerhalb der Grenzen der möglichen Beobtungsfehler ab.

Digitized by Google

Um so wünschenswerther erscheint es natürlich, auch die direkte Beobachtung der Absolutwerte bis zu der Genauigkeit zu bringen, daß an diesen selbst die Theorie geprüft werden kann, oder wenigstens der noch restirende hypothetische Fehler von 7,2 % auf einen möglichst kleinen Betrag herabgedrückt wird. Zu diesem Zwecke ist augenblicklich eine Untersuchung im Gange, über deren Resultate ich demnächst berichten zu können hoffe.

Göttingen, Juli 1902.

Digitized by Google

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen XI.

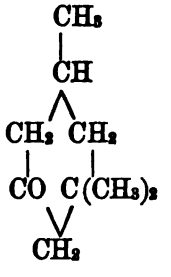
Von

O. Wallach.

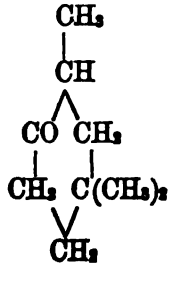
Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Juli 1902.

1) Ueber Isomerisirung cyclischer Kohlenwasserstoffe und Ketone.

Für das durch Reduction des Isophorons durch das Bihydroisophorol hindurch erhältliche Bihydroisophoron ist die Constitutionsformel



sicher gestellt. Es ist mir nun gelegentlich einer gemeinsam mit Herrn U. Franke ausgeführten Untersuchung gelungen, dieses Keton in die isomere Verbindung

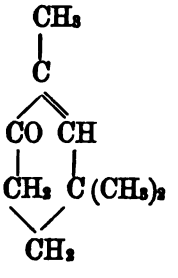


Digitized by Google

umzuwandeln und damit das Problem zu lösen, die Stellung des Ketonsauerstoffatoms in cyclischen Verbindungen zu verschieben.

Die Vorgänge, welche zu dieser Umformung führten, sind folgende.

Bihydroisophorol wurde durch Wasserabspaltung mit Hülfe von Phosphorpentaoxyd oder von Chlorzink in den Kohlenwasserstoff C_9H_{16} verwandelt. Dieser Kohlenwasserstoff erwies sich aber identisch mit dem Cyklogeraniolen. Wie dieses bildete er leicht ein Nitrosat, aus dem einerseits ein bei 136° schmelzendes Nitrolpiperidid, andererseits ein Oxim $C_9H_{14}NOH$ zu gewinnen war, das bei 128° schmolz und sich auch bei der von Hrn. Kaltenbach freundlichst ausgeführten krystallographischen Untersuchung als vollkommen identisch mit der neulich aus dem Cyklogeraniolen hergestellten Verbindung erwies (Nachr. d. Ges. d. W. m.-ph. Kl. 1902, 101). Da sich dieses Oxim nun in ein Methylcyklohexenon überführen läßt, dessen Constitution, wie inzwischen nachgewiesen wurde, durch folgende Formel wiedergegeben werden muß:



und dieses ungesättigte Keton sich weiter zu dem gesättigten Trimethylcyklohexanon reduciren läßt, so ist damit der oben angedeutete Uebergang verwirklicht.

Im Anschluß hieran haben wir zu untersuchen begonnen, ob sich das Methyl(1)hexanon(3) aus Pulegon vielleicht in ähnlicher Weise umformen läßt.

Das Keton wurde zu dem zugehörigen Alkohol, dem Methyl(1)-hexanol(3) reducirt und dem Alkohol durch Erwärmen mit Zinkchlorid Wasser entzogen. Es wurde dabei ein Methylcyklohexen C_7H_{12} (Tetrahydrotoluol) von folgenden Eigenschaften erhalten:

Siedepunkt 106–107°, d = 0.799, n_D = 1.44234 bei 20°
M = 31.81 (berechnet für C_7H_{12} F = 31.83).

Digitized by Google

Dieser Kohlenwasserstoff ist verschieden von dem Tetrahydrotoluol, das ich früher durch Salzsäureabspaltung aus Methylcyklohexylchlorid gewonnen habe und das folgende Eigenschaften besaß: Siedepunkt 103—105°, d = 0.806, n_D = 1.4445 bei 20°.

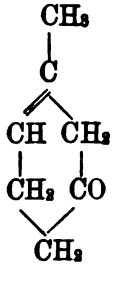
Der neu dargestellte bei 106—107° siedende Kohlenwasserstoff zeichnet sich durch seine Fähigkeit aus ein schwer lösliches Nitrosat zu liefern, welches bei 103—104° schmilzt und beim Erwärmen mit Piperidin in ein schön krystallisirendes bei 152—153° schmelzendes Nitrolpiperidid übergeht.

Beim Erwärmen mit Natriummethylat entsteht aus dem Nitrosat ein Methylcyklohexenonoxim, C_7H_{10} : NOH. Die Verbindung wird als Flüssigkeit erhalten, die unter 11mm bei 113—115° siedet und beim Schütteln mit Benzoylchlorid und Natronlauge leicht eine erstarrende Benzoylverbindung giebt. Beim Umkrystallisiren aus Methylalkohol ließ sich dieselbe in zwei Antheile zerlegen, einen schwer löslichen, vom Schmelzpunkt 142—143° und einen leicht löslichen, vom Schmelzpunkt 90—91°.

Beim Erwärmen mit Schwefelsäure wurde aus dem Oxim das freie Cyklomethylhexenon $C_7H_{10}O$ erhalten. Die Verbindung wurde durch Destillation mit Wasserdampf gereinigt, wobei ein erheblicher Theil im Wasser gelöst bleibt. Das ungelöste Oel wurde mit Pottasche getrocknet und fractionirt. Die Hauptmenge siedete zwischen 179—181° und zeigte d = 0,97, n_D = 1.4843 bei 20°. M = 32.4 (berechnet für $C_7H_{10}O$ F = 32.01).

Aus der wässrigen Lösung des Ketons wurde durch Semicarbazidlösung ein nach dem Umkrystallisiren bei 207—208° schmelzendes Semicarbazon erhalten. Die Verbindung ist selbst in kochendem Alkohol schwer löslich.

Aus den angegebenen Eigenschaften folgt, daß dies Methylcyklohexenon verschieden ist von dem bisher bekannten der Formel



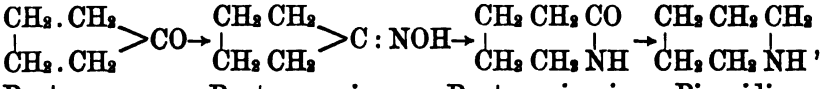
denn diese Verbindung siedet bei 199—201° und ihr Oxim liefert eine bei 155° schmelzende Benzoylverbindung. Ob das neue Keton sich nur durch die Lage der Aethylenbindung oder durch die

Digitized by Google

Stellung des Carbonyls von dem bekannten unterscheidet, sind wir im Begriff zu untersuchen.

2) Ueber die Umwandlung cyclischer Ketone in Basen stickstoffhaltiger Ringsysteme.

Wie ich früher mitgetheilt habe (Ges. d. W. 1900, 241), lassen sich die Oxime cyclischer Ketone zu „Isoximen“ isomerisiren, welche in der Art zu Stande kommen, daß sich der Stickstoff des Oxims in den kohlenstoffhaltigen Ring einschiebt und so Verbindungen entstehen, welche man von dem allgemeinen Typus $(CH_2)_x{<}\begin{smallmatrix}CO\\|\\NH\end{smallmatrix}$ ableiten kann. Wenn es nun gelang den Sauerstoff in diesen Verbindungen durch Wasserstoff zu ersetzen, mußte man zu cyclischen Basen $(CH_2)_xNH$ kommen, als deren Repräsentanten man bisher wesentlich das Piperidin kennt. Die Entstehung letzterer Verbindung selbst müßte man z. B. bei folgendem Reactionsverlauf aus dem Pentanon erwarten:



Pentanon — Pentanonoxim — Pentanonisoxim (Piperidon) — Piperidin

während die noch unbekannten höheren Ringhomologen des Piperidins aus den entsprechenden Homologen des Pentanons entstehen sollten.

Diese Reactionen haben sich nun in der That verwirklichen lassen. Die Isoxime lassen sich in amylalkoholischer Lösung durch Natrium reduciren. Aber die entstehenden Producte sind nicht einheitlich, vielmehr können sich bei der Reduction verschiedene Processe abspielen, die im Folgenden gekennzeichnet sind.

1) Die störendste Nebenreaction ist die Ringsprengung der cyclischen Isoxime durch einfache hydrolytische Spaltung, welche zur Bildung von Amidosäuren führt, die sich in Form der Natriumsalze weiterer Umsetzung entziehen. Ein solcher Verlauf tritt natürlich umsomehr in den Vordergrund, je unbeständiger die Ringsysteme sind, von denen man ausgeht. Als verhältnißmäßig beständig haben sich die Systeme vom Typus des Piperidons erwiesen.

2) Der erste Schritt der eigentlichen Reduction setzt unzweifelhaft an der Carbonylgruppe ein, die dabei zur Alkohol-Gruppe CH(OH) wird. D. h. es entstehen **cyclische Alkamine**.

3) Auch die cylischen Alkamine können Ringsprengung er-

Digitized by Google

leiden, als deren Producte aliphatische Alkamine, d. h. Oxybasen und zwar mit größter Fernstellung des Hydroxyl- vom Amin-Radical entstehen.

4) Die cyclischen Alkamine werden zu sauerstofffreien Basen reducirt, wobei es vorläufig dahin gestellt bleiben mag, ob ein directer Austausch von OH gegen H erfolgt, oder ob als weiteres Zwischenproduct zunächst — unter Wasseraustritt — eine ungesättigte Ringbase sich bildet.

Endlich wäre als fünfter möglicher und auch beobachteter Fall noch in Rechnung zu ziehen, daß die aliphatischen Alkamine zu gewöhnlichen primären Basen $C_nH_{(2n+1)}NH_2$ reducirt werden könnten. Die etwaige Bildung stickstofffreier Reactionsproducte kann unberücksichtigt bleiben, zumal sie practisch nicht in Betracht kommt.

Die wichtigsten der besprochenen Vorgänge lassen sich durch folgende Formelbilder zur Anschauung bringen:

$$1)\quad (CH_2)_x\begin{cases}CO\\ |\\ NH\end{cases} + H_2O = (CH_2)_x\begin{cases}COOH\\ NH_2\end{cases}$$

$$2)\quad (CH_2)_x\begin{cases}CO\\ |\\ NH\end{cases} + H_2 = (CH_2)_x\begin{cases}CH(OH)\\ |\\ NH\end{cases}$$

$$3)\quad (CH_2)_x\begin{cases}CH(OH)\\ |\\ NH\end{cases} + H_2 = (CH_2)_x\begin{cases}CH_2OH\\ NH_2\end{cases}$$

$$4)\quad (CH_2)_x\begin{cases}CH(OH)\\ |\\ NH\end{cases} + H_2 = (CH_2)_x\begin{cases}CH_2\\ |\\ NH\end{cases} + H_2O$$

$$5)\quad (CH_2)_x\begin{cases}CO\\ |\\ NH\end{cases} + H_2 = (CH_2)_x\begin{cases}CH_2\\ NH_2\end{cases} + H_2O.$$

Nachstehend sollen die bisher erhaltenen experimentellen Resultate kurz Erwähnung finden.

1) Aus dem α-Piperidon, welches aus Pentanonoxim durch Umlagerung erhalten wurde, entsteht bei der Reduction in sehr reichlicher Menge Piperidin, welches sowohl durch seinen Siedepunkt, 106°, als auch durch sein Chlorhydrat vom Schmelzpunkt 234—236°, sein Platinsalz (Schmelzpunkt 194—195°) und das bei 145—146° schmelzende Pikrat identificirt wurde.

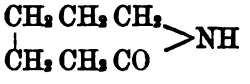
Außer Piperidin wurden, als Nebenproduct bei der Reduction, höher siedende Basen beobachtet, und zwar eine krystallinisch erstarrende und eine, höher siedende, flüssige. Die erstere wird wahrscheinlich als das cyclische, die letztere als das acyclische

Digitized by Google

Alkamin aufzufassen sein, jedoch sind die Verbindungen noch nicht näher untersucht.

2) Aus β-Methylcyklopentanon, welches aus β-Metyladipinsäure gewonnen war, wurde durch das Oxim und Isoxim hindurch ein Methylpiperidin erhalten.

3) Cyklohexanon, aus Pimelinsäure gewonnen, wurde in das schön krystallisirte Isoxim

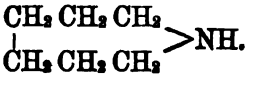


übergeführt und dieses reducirt.

Die Ausbeute an Reductionsproduct ließ zu wünschen übrig, da das Isoxim (= α Ketohexamethylenimin) zum Theil bei der Reduction hydrolytisch gespalten wird. Die bei der Reduction entstandenen Basen ließen sich schon bei ihrer Isolirung aus dem Reactionsproduct mit Wasserdämpfen in einen leicht und einen schwerer flüchtigen Antheil sondern. Der erstere enthält wesentlich die sauerfreie, der letztere sauerstoffhaltige Base.

Die sauerstofffreien basischen Producte siedeten in ziemlich weiten Grenzen.

Die Hauptfraction ging gegen 140° über und besteht aus dem bisher unbekannten Hexamethylenimin



Das Chlorhydrat dieser Base schmilzt bei 221—224°, das Platinsalz bei 201—203° unter Zersetzung. Bei der erschöpfenden Methylirung giebt die Base eine Ammoniumverbindung $(CH_3)_6N(CH_3)_2J$, welche erst gegen 260° unter Zersetzung schmilzt.

Neben der sauerstofffreien Base tritt eine sauerstoffhaltige auf, welche zwischen 238—241° siedet und zu einer krystallinischen Masse erstarrt. Die Analysen führen für diese Verbindung zu der Formel $C_6H_{15}NO$, woraus man schließen sollte, daß das acyclische Alkamin

$$HO\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,NH_2$$

vorliegt. Jedoch verläuft die Umsetzung der Base mit salpetriger Säure nicht in erwartetem Sinn, d. h. unter Bildung eines Glycols, so daß die Constitution der Verbindung noch dahin gestellt bleiben muß.

Digitized by Google

Ganz ähnliche Producte wie das Hexanonisoxim geben bei der Reduction die beiden Isoxime (α und β), welche durch Umlagerung des Methyl(3)cyklohexanonoxims früher von mir gewonnen wurden. Auch in diesem Fall entstehen sauerstofffreie cyclische Basen (Methyl-Hexamethylenimin) und sauerstoffhaltige von erheblich höherem Siedepunkt.

Das Menthonisoxim, welches Hr. Fr. Jäger nach dieser Richtung untersucht hat, schließt sich diesem Verhalten vollkommen an. Es gab bei der Reduction 1) eine bei 200—205° siedende Base $C_{10}H_{20}NH$, die ein gut characterisirtes Chlorhydrat und Platinsalz liefert. Das durch Methyliren gewonnene Ammoniumjodid $C_{10}H_{20}N(CH_3)_2J$ schmilzt bei 236°. 2) eine Oxybase $C_{10}H_{21}ON$ oder $C_{10}H_{23}ON$, die zwar nicht in krystallisirende Salze, aber in eine bei 109° schmelzende Benzoyl-Verbindung überführbar war. Wenn man dem Menthonisoxim die Formel

$$\left.\begin{matrix} CH(CH_3)CH_2CO \\ | \\ CH_2 . CH_2 CH(C_3H_7) \end{matrix}\right\rangle NH$$

zuschreiben darf, wäre die sauerstofffreie Base daraus als γ-Methyl-α' Isopropyl-Hexamethylenimin

$$\left.\begin{matrix} CH(CH_3)CH_2CH_2 \\ | \\ CH_2 CH_2 CH(C_3H_7) \end{matrix}\right\rangle NH$$

zu betrachten.

Das Suberonisoxim (α-Ketoheptamethylenimin) verhält sich bei der Reduction genau so wie die niederen Homologen, nur treten hier die sauerstofffreien basischen Antheile, in denen man das Heptamethylenimin zu suchen hat, noch mehr zurück. Man beobachtet dagegen das Auftreten eines leicht erstarrenden basischen Reactionsproducts in verhältnißmäßig großer Menge, für welches die Analyse Werthe ergab, welche am besten auf die Formel $C_7H_{17}NO$, also die einer aliphatischen Oxybase stimmen.

Eine eigenthümliche sauerstoffhaltige Base wurde aus dem Suberonisoxim bei der Behandlung mit Chlorphosphor und Zersetzung des entstandenen Products mit Alkali erhalten. Die Verbindung hat die Formel $C_{14}H_{24}N_2O$ und ist nicht ohne Zersetzung destillirbar. Sie krystallisirt im großen bei 82° schmelzenden Krystallen und scheint bei der Reduction zum Theil dieselben Producte zu liefern, wie das Isoxim.

Ein besonders bemerkenswerthes Verhalten zeigt das Isoxim des Thujamenthons, $C_{10}H_{19}ON$. Diese Verbindung läßt sich in

Digitized by Google

amylalkoholischer Lösung bei der Einwirkung von Natrium sehr glatt in eine sauerstofffreie secundäre Bahn $C_{10}H_{20}NH$ verwandeln. Diese Bahn hat einen ziemlich angenehmen Geruch, siedet bei 200—203° und läßt sich in folgende characteristische Derivate überführen.

Die Benzoylverbindung schmilzt bei 95°, die Nitrosoverbindung ist flüssig, bei der erschöpfenden Methylirung entsteht ein quaternäres Jodid $C_{10}H_{20}N(CH_3)_2J$, das gut krystallisirt und bei 202—203° schmilzt.

Digitized by Google

Neue Beobachtungen über magnetooptische Erscheinungen in Absorptionsstreifen.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Juli 1902.)

1) Herr Zeeman hat die Freundlichkeit gehabt, mir Photogramme einer neuen Erscheinung zu schicken, die er in den Absorptionsstreifen einer in einem Magnetfeld befindlichen *Na*-Flamme parallel zu den Kraftlinien beobachtet hat. Er ließ lineär polarisirtes Licht, sagen wir im Azimuth 0^0 gegen die Horizontale, in die Flamme eintreten, darnach eine $\frac{1}{4}\lambda$-Platte aus Glimmer passiren, deren Polarisationsrichtungen die Azimuthe $\pm 45^0$ besaßen, hierauf das bei seinen früheren Beobachtungen[1]) benutzte Quarzkeilsystem mit horizontalen Keilkanten und endlich einen Nicol durchsetzen; das austretende Licht wurde mit dem Rowland'schen Gitter spectral zerlegt.

Die Photogramme zeigen außerhalb der verticalen Absorptionsstreifen ein System nur schwacher horizontaler Interferenzfransen, innerhalb derselben aber eine sehr intensive Interferenzerscheinung, die bei dem einen mit sehr dichtem *Na*-Dampf erhaltenen Bild weniger Details erkennen läßt, dagegen bei dem mit dünnen Dampf gewonnenen ganz klar ist. Die nebenstehende Figur 1 giebt eine ungefähre Vorstellung von dem Aussehen der letzteren.

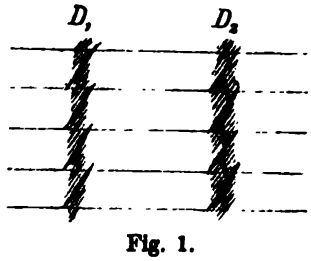


Fig. 1.

1) P. Zeeman, Versl. Kgl. Ac. d. Wiss. Amsterdam 12. Juni 1902.

Digitized by Google

Was in ihr besonders frappirt, ist der stark verschiedene Character der Erscheinungen in den Absorptionsstreifen D_1 und D_2. Während in D_1 nur ein System anscheinend geradliniger schiefer Brücken zwischen den schwachen äußeren Interferenzfransen sichtbar ist, zeigen sich in D_2 zwischen diesen Brücken wiederum tiefdunkle Querverbindungen entgegengesetzter Neigung, sodaß die ganze Erscheinung hier als eine vertical gestellte Zickzacklinie mit aus den Ecken abwechselnd nach unten und nach oben austretenden Zweigen beschrieben werden kann.

Die Photogramme, die mit dichterem Dampf erhalten sind, lassen sich etwa als eine Vergröberung des letzteren Bildes ansehen.

Nachdem die Theorie[1]) alle übrigen in der Umgebung der Absorptionsstreifen beobachteten Erscheinungen befriedigend erklärt hat, ist es wohl nahezu selbstverständlich, daß sie auch von den neuen Beobachtungen Rechenschaft geben wird. Das Interesse liegt sonach nicht mehr auf der Seite der Bestätigung der Theorie, sondern auf der Seite der Erklärung der Erscheinung. Letzteres scheint mir aber immer noch groß genug zu sein, um die Anwendung der Theorie auf die neuen Zeeman'schen Beobachtungen zu rechtfertigen.

2) Ich benutze ein Coordinatensystem XY, dessen Axen mit den Polarisationsrichtungen des $\frac{1}{4}\lambda$-Glimmers zusammenfallen, und setze voraus, daß das einfallende lineärpolarisirte Licht die Amplitude F besitzt, und daß seine Polarisationsrichtung den Winkel ψ mit der $+X$-Axe, $\frac{1}{2}\pi - \psi$ mit der $+Y$-Axe einschließt. Dann haben die aus der Na-Flamme austretenden Polarisations-Componenten die in complexer Form geschriebenen Werthe

$$1) \qquad \begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2} F \left[e^{-i(L_1+\psi)} + e^{-i(L_2-\psi)}\right] e^{iT}, \\ v &= \tfrac{1}{2} Fi \left[e^{-i(L_1+\psi)} - e^{-i(L_2-\psi)}\right] e^{iT}. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$2\pi/\tau = T, \quad 2\pi l/\tau o_h = L_h$$

gesetzt, und es bedeutet τ die Periode, l den in der Flamme zurückgelegten Weg, o_h die complexe Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle h in der Flamme.

Die Wirkung des $\frac{1}{4}\lambda$-Glimmers drückt sich (da der Anfangspunkt von t beliebig geändert werden kann) dadurch aus, daß man v den Factor $\mp i$ ertheilt, also für die austretende Schwin-

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 67, p. 345, 1899.

Digitized by Google

gung schreibt

$$2) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \tfrac{1}{2} F [e^{-i(L_1+\psi)} + e^{-i(L_2-\psi)}] e^{iT}, \\ v_1 &= \pm \tfrac{1}{2} F [e^{-i(L_1+\psi)} - e^{-i(L_2-\psi)}] e^{iT}. \end{aligned}$$

Diese Formeln stellen zwei lineäre Schwingungen dar, welche die Winkel der Quadranten $(+X, +Y)$ und $(+X, -Y)$ halbiren. Beide Schwingungen werden im Quarzkeil um den gleichen, aber von dem Ort des Durchganges abhängigen Winkel ϑ gedreht, sodaß resultirt

$$3) \qquad \begin{aligned} u_2 &= u_1 \cos\vartheta - v_1 \sin\vartheta, \\ v_2 &= u_1 \sin\vartheta + v_1 \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Wird schließlich mit einem Nicol beobachtet, dessen Polarisationsrichtung den Winkel φ mit der X-Axe einschließt, so kommt eine Schwingung zur Geltung, gegeben durch

$$4) \qquad \begin{aligned} U &= u_2 \cos\varphi + v_2 \sin\varphi = u_1 \cos(\vartheta-\varphi) - v_1 \sin(\vartheta-\varphi) \\ &= \tfrac{1}{2} F [e^{-i(L_1+\psi)} (\cos(\vartheta-\varphi) \mp \sin(\vartheta-\varphi)) \\ &\quad + e^{-i(L_2-\psi)} (\cos(\vartheta-\varphi) \pm \sin(\vartheta-\varphi))] e^{iT}. \end{aligned}$$

Diese Schwingung besitzt eine reelle Amplitude A, für welche gilt

$$5) \qquad \begin{aligned} A^2 = \tfrac{1}{2} F^2 [&(e_1^2 + e_2^2) \mp (e_1^2 - e_2^2) \sin 2(\vartheta-\varphi) \\ &+ 2 e_1 e_2 \cos 2(\vartheta-\varphi) \cos(l_1 - l_2 + 2\psi)], \end{aligned}$$

wobei

$$e^{-2\pi \varkappa_h l/\tau \omega_h} = e_h, \qquad 2\pi l/\tau \omega_h = l_h$$

gesetzt ist, und ω_h die reelle Geschwindigkeit, $\varkappa_h$ den Absorptionsindex der Welle h in der Flamme bezeichnet. Bei der Zeeman'schen Anordnung ist die Periode τ der Schwingung zugleich sehr nahezu die horizontale Coordinate ξ der beobachteten Erscheinung; ϑ ist eine lineäre Function der verticalen Coordinate η. Der Winkel φ modificirt nur den Anfangspunkt von η und kann gleich Null gesetzt werden, wenn es sich, wie hier, nur um vergleichende Beobachtungen handelt. Der Winkel ψ war bei Zeeman beiläufig 45^0, und wir wollen diesen Werth einsetzen, obgleich er vielleicht nicht mit derjenigen Genauigkeit erreicht war, die bei der Art des Vorkommens von ψ neben $(l_1 - l_2)$ unter dem sinus für seine Benutzung erforderlich wäre.

Hiernach gilt für die Zeeman'schen Beobachtungen, wenn wir uns noch der Einfachheit halber auf das obere Vorzeichen beschränken,

Digitized by Google

$$6) \qquad A^2 = \tfrac{1}{2} F^2 [(e_1^2 + e_2^2) - (e_1^2 - e_2^2) \sin 2\vartheta - 2 e_1 e_2 \cos 2\vartheta \sin (l_1 - l_2)].$$

A^2 nimmt ein Maximum oder ein Minimum in Bezug auf ϑ (und somit η) an, wenn

$$7) \qquad \operatorname{tg} 2\bar{\vartheta} = \frac{e_1^2 - e_2^2}{2 e_1 e_2 \sin (l_1 - l_2)}.$$

Die Maxima, wie die Minima wiederholen sich also im Abstand $\vartheta = \pi$; die Minima fallen in die Mitte zwischen die Maxima.

Eliminirt man ϑ aus dem Ausdruck für A^2, so erhält man für die extremen Werthe $\bar{A}^2$

$$8) \qquad \bar{A}^2 = \tfrac{1}{2} F^2 [(e_1^2 + e_2^2) \pm \sqrt{(e_1^2 - e_2^2)^2 + 4 e_1^2 e_2^2 \sin^2 (l_1 - l_2)}].$$

3) Bei der großen Complicirtheit der Gesetze, welche die e_h und die l_h befolgen[1]), würde eine genaue Discussion der Formeln (7) und (8) überaus umständlich sein. Wir beschränken uns auf solche, zumeist qualitative Ueberlegungen, die das Wesentliche des von der Theorie geforderten Vorganges erkennen lassen.

In größerer Entfernung von den Absorptionsstreifen ist sowohl $e_1 - e_2$, als $l_1 - l_2$ sehr klein, aber $e_1 - e_2$ darf als klein von höherer Ordnung betrachtet werden. Hier liefert (7), wenn das Zeichen (=) die angenäherte Gleichheit bezeichnet,

$$9) \qquad \operatorname{tg} 2\bar{\vartheta} \,(=)\, 0,$$

also $\bar{\vartheta} \,(=)\, \frac{1}{2} h\pi$; und aus (8) folgt, wenn man $e_1 = e_2 = e_a$ setzt,

$$10) \qquad \bar{A}^2 \,(=)\, F^2 e_a^2 [1 \pm \sin (l_1 - l_2)].$$

Der Unterschied zwischen den Maxima und Minima ist hier sehr gering, die Interferenzstreifen sind schwach, wie das die Zeeman'schen Aufnahmen in der That zeigen. Die Minima entsprechen den Werthen $\vartheta \,(=)\, h\pi$.

Der Verlauf der dunkeln Interferenzfransen in dem Bereiche der Absorptionsstreifen wird am besten durch geometrische Hülfsmittel erschlossen, wie sie auf der nachstehenden Figurentafel schematisch für zwei interessante Fälle I und II verschieden großer Doppelbrechung $l_1 - l_2$ im Absorptionsstreifen dargestellt sind.

---

1) W. Voigt, l. c. p. 349.

Digitized by Google

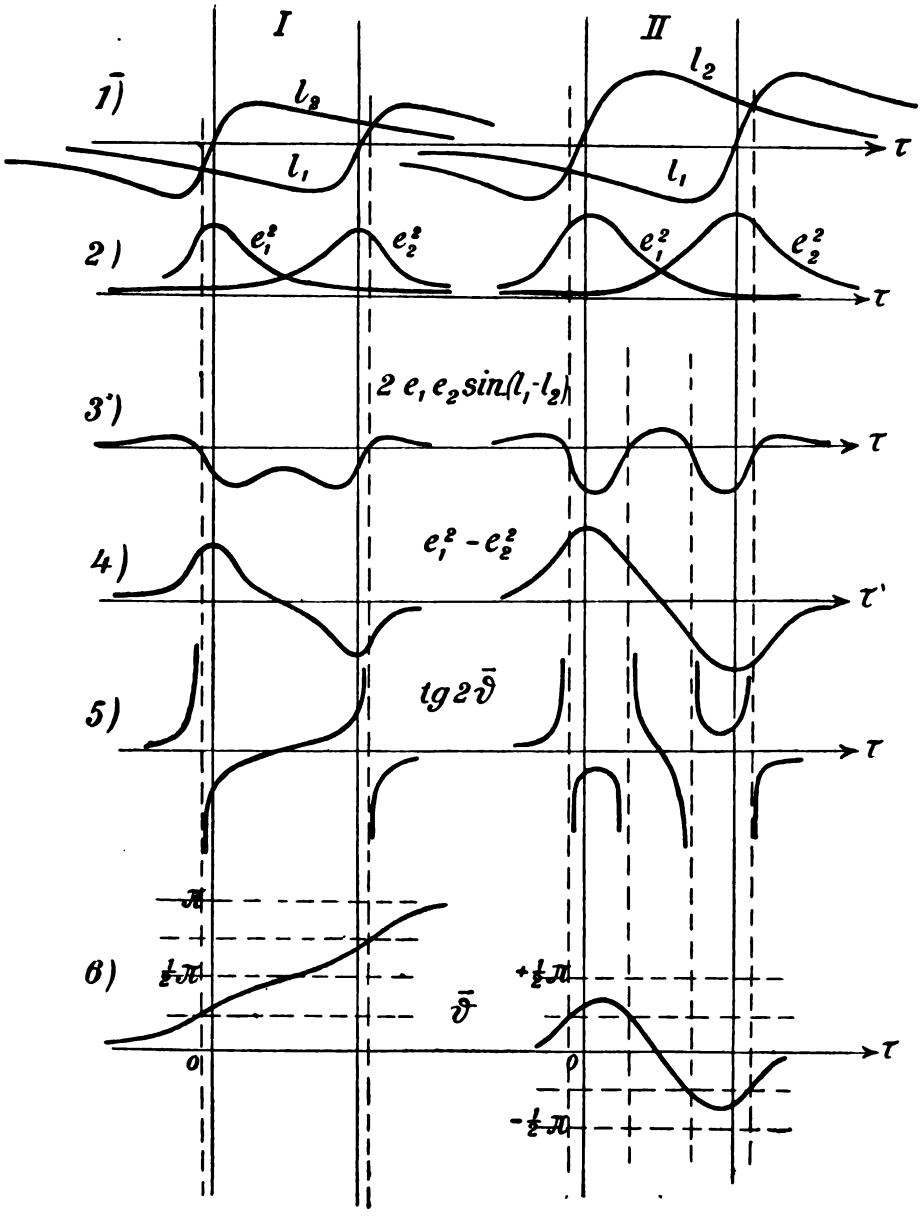


Fig. 2.

Digitized by Google

Die oberste Reihe giebt den Verlauf von l_1 und l_2, die zweite den von e_1^2 und e_2^2 als Function der Schwingungsperiode τ; in der dritten ist eine schematische Curve für $2e_1e_2\sin(l_1-l_2)$, in der vierten eine solche für $e_1^2-e_2^2$ enthalten. Die Curven für $2e_1e_2\sin(l_1-l_2)$ lassen den Unterschied der beiden Fälle I und II hervortreten: im Falle I ist l_1-l_2 nirgends kleiner als $-\pi$, in II unterschreitet es diesen Werth, ohne -2π zu erreichen, und $\sin(l_1-l_2)$ nimmt deshalb nicht nur zwei, sondern vier Mal den Werth Null an. Kleinere Werthe l_1-l_2 als -2π scheinen bei den beschriebenen Zeeman'schen Beobachtungen nicht vorgekommen zu sein.

In der fünften Reihe ist der nach (7) aus der dritten und vierten folgende Verlauf von $\operatorname{tg} 2\bar{\vartheta}$, in der sechsten das ihm entsprechende $\bar{\vartheta}$ wiedergegeben. Die letzten — natürlich, abgesehen von den Punkten, die $\bar{\vartheta} = 0, \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\pi$ entsprechen, nur nach Schätzung gezeichneten — Curven stellen gemäß dem zu (5) Gesagten zugleich schematisch den Verlauf der dunkeln Interferenzfransen im Bereiche der Absorptionsstreifen dar.

Man erkennt, daß die Curve des Typus I eine angenähert geradlinige schiefe Brücke zwischen zweien der benachbarten horizontalen, im Gebiete der unmerklichen Absorption liegenden Streifen darstellt, wie das die Photographie bei der Linie D_1 in der That zeigt. Daß diese Brücken im Photogramm gegen die horizontalen Streifen ein klein wenig nach oben verschoben sind, kann sowohl auf der nur angenäherten Erfüllung der Gleichung (9), als auf dem nicht ganz genau stattfindenden Werth $\psi = \frac{1}{4}\pi$ beruhen.

Die Curve des Typus II führt (im Gegensatz zu I) zu demselben horizontalen Interferenzstreifen zurück; aber die Erscheinung, welche das Photogramm bei der Linie D_2 zeigt, scheint auf den ersten Blick mit dieser Curve garnichts gemeinsam zu haben. Sieht man indessen genauer zu, so erkennt man, daß im Photogramm die verticale Zickzacklinie, welche den Stamm der Figur bildet, durch Partien von ein wenig geringerer Tiefe in Stücke zerfällt, die mit den daran hängenden Zweigen zusammen in der That gerade jene Theile liefern, deren Gestalt von der Theorie gefordert wird. Wie in so vielen Fällen lehrt auch hier erst die Theorie das Beobachtungsbild richtig auffassen.

Eine gewisse Schwierigkeit scheint zunächst der stetige Anschluß der beiden Typen I und II an einander und an die bei verschwindender Feldwirkung stattfindende Erscheinung zu bieten. Man muß sich da wohl folgende Vorstellung bilden.

Vor Erregung des Feldes sind die außerhalb und innerhalb des Absorptionsstreifens horizontal verlaufenden Interferenzfransen

Digitized by Google

mit einander verbunden durch eine verticale, in den Absorptionsstreifen verlaufende, von verschwindender Intensität. Bei anwachsendem Felde und demgemäß wachsenden $e_1^2 - e_2^2$ und $l_1 - l_2$ nimmt die Intensität dieses Streifens zu, und jeder seiner von $\vartheta (=) h\pi$ und $\vartheta (=) (h+1)\pi$ (wobei $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) begrenzten Abschnitte dreht sich um seine Mitte (nach rechts), wobei die Enden sich nahezu mit den auseinanderrückenden Absorptionsstreifen nach rechts und links bewegen (Typus I). Dies dauert solange an, bis $l_1 - l_2$ an einer Stelle des Absorptionsstreifens den Werth $-\pi$ erreicht. Hier können wir uns wiederum einen verticalen Interferenzstreifen von der Intensität Null, an der Stelle der ursprünglichen Absorptionslinie befindlich, hinzudenken, und die Abschnitte desselben mit je zwei Hälften der benachbarten wirklichen Interferenzfransen nach dem Schema $/|/$ zusammenfassen. Der weitere Verlauf ist dann der, daß der verticale Streifen sich (nach links) neigt und zugleich an Intensität zunimmt. So entstehet der Typus II aus I.

Das Gesetz der maximalen Dunkelheit (8) ist wenig übersichtlich und soll nicht ausführlich discutirt werden. Man erkennt indessen durch Anwendung auf specielle Fälle leicht, daß es bei verticaler Fortschreitung im Bereich der Absorptionsstreifen größere Intensitätscontraste verlangt, als außerhalb. In der That ist in der Mitte des ganzen Absorptionsstreifens $e_1 = e_2 = e_0$, wobei e_0 eine neue Bezeichnung ist, also

$$\bar{A}_0^2 = F^2 e_0^2 [1 \pm \sin(l_1 - l_2)];$$

die Formel stimmt mit (10) überein, aber $\sin(l_1 - l_2)$ hat in dem jetzt betrachteten Bereich einen ganz beträchtlichen, unter Umständen bis zu Eins ansteigenden Werth.

Die von Herrn Zeeman beobachteten neuen Phänomene erklären sich also durch die Theorie auf das Einfachste. Von besonderem Interesse ist es wohl, daß das so auffallend verschiedene Verhalten der Absorptionsstreifen D_1 und D_2 allein auf der verschieden großen Geschwindigkeitsdifferenz der beiden in der Flamme fortgepflanzten Wellen für die betreffenden Perioden beruht, die ja auch durch directere Beobachtungen festgestellt ist.

Göttingen, 12. Juli 1902.

Digitized by Google

Digitized by Google

Ueber die pharmakologische Wirkung der cyclischen Isoxime.

Von

C. Jacobj.

Vorgelegt in der Sitzung am 29. November 1902 von O. Wallach.

Im Jahre 1888 hat Schotten[1]) die Aufmerksamkeit auf eine von ihm dargestellte Verbindung, das Oxypiperidin (Piperidon) gelenkt, welche dadurch ein besonderes Interesse bot, daß sie ein künstliches, physiologisch wirksames Alkaloid darstellte, welches aus der an sich unwirksamen, kettenförmig aufgebauten δ Amidovaleriansäure durch Zusammenschluß der Kette zu einem Ring gewonnen und durch Sprengung des Ringes wieder in die unwirksame Säure zurückgeführt werden konnte. Die Wirkung dieses Oxypiperidins wurde als der des Strychnins nahestehend geschildert.

Bei seinen Untersuchungen über die Terpene und deren Abkömmlinge hat Herr Geheimrath Wallach neuerdings eine Reihe gleichartig aufgebauter, ringförmiger Verbindungen, sogenannte Cyclische Isoxime dargestellt, welche, sowohl hinsichtlich der Größe des Ringes, als auch der, demselben an- und eingefügten Alkylgruppen eine große Mannigfaltigkeit bieten, dabei aber doch gleichzeitig eine gewisse systematische Zusammengehörigkeit zeigen.

Eines dieser Präparate, ein Gemisch des $\alpha + \beta$ Methylhexanonisoxims, welches in reichlicheren Mengen hatte gewonnen werden können, wurde mir von Herrn Geheimrath Wallach vor 2 Jahren zur pharmakologischen Untersuchung gütigst überlassen.

1) Ber. d. d. chem. S. 21. 2243.

Digitized by Google

Es ergaben die Thierversuche, daß auch dieser Verbindung eine sehr typische Krampfwirkung zukommt, aber nicht in dem Sinne, wie sie Schotten s. Z. für das Piperidon angegeben hatte. Es handelt sich nicht um eine strychninartige Reflexkrampfwirkung, sondern vielmehr um Krämpfe, welche auf Erregung des, in der Medulla oblongata gelegenen Krampfcentrums beruhend, den durch Pikrotoxin und Kampher erzeugten, gleichen.

Im Hinblick auf die characteristische Wirkungsart dieser Verbindung mußte es einerseits von Interesse sein, zu erfahren, ob das Piperidon Schotten's und das mit ihm, wie aus chemischen Gründen angenommen werden muß, identische, von Herrn Geheimrath Wallach auf anderem Wege gewonnene Pentanonisoxim wirklich gegenüber dem Methylhexanonisoxim eine ihrem Wesen nach so verschiedene Krampfform bedingt, oder ob etwa hier nur eine Verwechslung beider Krampfformen seitens Schotten's vorlag und es sich auch bei diesen Verbindungen um Pikrotoxinartige Krämpfe handle, andererseits stand zu hoffen, daß eine pharmakologische Untersuchung der verschiedenen von Prof. Wallach dargestellten Verbindungen vielleicht eine Beziehung zwischen Constitution und Wirkung derselben werde erkennen lassen, da hiefür das Material besonders geeignet erschien.

So begrüßte ich das Anerbieten Herrn Professor Wallach's, mir Proben der verschiedenen, von ihm hergestellten Präparate zur pharmakologischen Prüfung zur Verfügung stellen zu wollen, mit größter Freude, und möge es mir gestattet sein, auch hier nochmals meinen Dank für die Ueberlassung des zum Theil sehr kostbaren Materials zum Ausdruck zu bringen.

Die Versuche wurden zunächst von meinem Assistenten, Herrn Dr. Szubinsky unter meiner Leitung und nach dem Ausscheiden desselben aus seiner Stellung eine Zeit von mir allein, seit letztem Sommer aber von Herrn Dr. Hajashi aus Japan ausgeführt, und hatte ich die Freude, in letzterem einen mit ebenso verständnißvollem Interesse, wie umsichtigem Geschick sich dem Gegenstand widmenden Mitarbeiter gefunden zu haben.

Herr Dr. Hajashi wird demnächst über die gesammten Untersuchungen, welche er speciell mit Rücksicht auf die Nervenend- und Muskelwirkung der Substanzen noch erweitert hat, eingehend berichten. Hier möge mir zunächst nur eine kurze, zusammenfassende Darstellung der wichtigsten Ergebnisse unserer Versuche zu geben, gestattet sein.

Da es sich zunächst vor Allem um eine systematische Vergleichung der Wirkung der verschiedenen Verbindungen handelte,

Digitized by Google

so mußte hauptsächlich darauf Bedacht genommen werden, die Versuche so anzustellen, daß sie sich für alle Präparate möglichst gleichmäßig durchführen ließen. Es waren deshalb bei der zum Theil sehr geringen Menge an Substanz, welche von einzelnen kostbaren Verbindungen sich nur beschaffen ließ, als Versuchsthiere möglichst kleine zu wählen.

Als Kaltblüter verwendeten wir, wie üblich, den Frosch, als kleinsten Warmblüter die weiße Maus, die, so ungeeignet sie anfangs, zumal für Dosirungsversuche auch erschien, doch bald, bei der nöthigen technischen Uebung in der Beibringung des Giftes, sich als recht brauchbar erwies und zu gut übereinstimmenden, einen Vergleich der Wirkungen in qualitativer und quantitativer Hinsicht sehr wohl zulassenden Resultaten führte.

Die in den Kreis der Untersuchung gezogenen Substanzen, welche sämmtlich im chemischen Laboratorium des Herrn Professor Wallach in sorgfältigster Weise für die pharmakologischen Untersuchungen hergestellt wurden, mögen hier zunächst in einer systematischen Zusammenstellung aufgeführt werden, um den für die spätere Besprechung nöthigen Ueberblick über die chemische Beziehung derselben unter einander zu erleichtern. Es handelte sich um die in der folgenden Tabelle, einerseits in den vertikalen Spalten nach der Größe des Ringes, andererseits in den horizontalen Reihen nach den die Ringe neben dem CH_2-Gruppen bildenden Gliedern, sowie den, den Ringen an- oder eingefügten Alkylen geordneten 20 Verbindungen.

Digitized by Google

	I. 5. Ring	II. 6. Ring	III. 7. Ring	IV. 8. Ring
1. Ohne NH mit CO	1. Pentanon	2. Hexanon	9. Suberon	
2. mit NH ohne CO		3. Piperidin	10. Hexamethylenimin	
3. mit NH und CO Isoxime		4. Piperidon (Schotten) 5. Piperidon (Wallach) = Pentanonisoxim	11. Hexanonisoxim	20. Suberonisoxim.
4. Einfach methylirte Isoxime		6. Methylpentatonisoxim	12. α Methylhexanonisoxim 13. β Methylhexanonisoxim	
5. 1 CH_3 u. 1 C_3H_7 am Ring angelagert enthaltende Isoxime		*) *)	14. Linksmenthonisoxim 15. Tetrahydrocarvonisoxim 16. Bihydrolinksmenthonisoxim 17. Benzoylbihydrolinksmenthonisoxim	
6. 1 CH_3 u. 1 C_3H_6 letzteres im Ringe			18. Isofenchonoxim	
7. 3 CH_3 am Ring		7. Trimethylpiperidin	19. Trimethylcyclohexanonisoxim	
8. 2 CH_3 u. 1 C_3H_7 am Ring		8. Thujamenthonisoxim		

*) Bei diesen Verbindungen ist noch nicht sichergestellt, ob sie cyclisch sind, oder nicht doch schon aliphatische Structur besitzen. Ihre Wirkungsart scheint indessen das Letztere auszuschließen.

Wie man sieht, enthalten die Vertical-Reihen die Ringe verschiedener Größe von 5—8 Gliedern.

Von den Horizontalreihen aber zeigt die erste als Ringverbindungen, welche neben den CH_2-Gruppen eine CO-Gruppe enthalten das Pentanon, Hexanon u. Suberon; die 2. Reihe enthält in dem Piperidin u. Hexamethylenimin zwei Ringe, welche nur eine NH-Gruppe führen; in der 3. finden wir in dem Pentanonisoxim (Piperidon) Hexanonisoxim, Suberonisoxim, s. g. cyclische Isoxime, d. h. Ringe, welche ein CO neben der NH-Gruppe stehend enthalten. Die 4. Reihe enthält die Monomethylisoxime des 5- und 6-Ringes; das Methylpentanonisoxim und Methylhexanonisoxim und zwar letzteres wahrscheinlich mit dem Methyl einerseits an zweiter, andererseits in vierter Stelle von N.

Digitized by Google

Die 5. Reihe umfaßt verschiedene Methylpropylisoxime und daraus abgeleitete Verbindungen des 7-Ringes, in welchen die Propylgruppe am Ring angelagert; die 6. Reihe eine gleichartige Verbindung das Isofenchonoxim, in welchem die Propylgruppe aber nicht als solche vorhanden ist, sondern nach Art der Campher den inneren Theil eines Doppelringes ausmacht. Die 7. Reihe enthält zwei trimethylirte Ringe, das Trimethylpiperidin und Trimethylcyclohexanonisoxim und die 8. endlich in dem Thujamenthonisoxim wahrscheinlich ein Hexanonisoxim mit zwei CH_3 und einer C_3H_7-Gruppe.

Ringverbindungen, in welchen die CO u. NH-Gruppe nicht nebeneinander, sondern getrennt im Ringe stehen, wie solche ja bereits bekannt sind, wurden zunächst in die Untersuchung noch nicht hineingezogen, doch werden auch solche in nächster Zeit noch von uns untersucht werden.

Wie man sieht, liegen hier die verschiedenartigsten, dabei aber doch in gegenseitig naher constitutioneller Beziehung zu einander stehenden Ringverbindungen vor, die wenn ihre Wirkungen Unterschiede klar hervortreten ließen, einen Zusammenhang zwischen Constitution und Wirkung zu finden hoffen ließen. Bemerkt sei hier, daß alle Angaben von Dosen im folgenden auf freie Base und pro Gramm Thier sich beziehen, da nur auf diese Weise Vergleiche möglich sind.

In der That ergaben nun die von Szubinsky, Hajashi und mir, zum Theil ganz unabhängig, wiederholt angestellten Versuche, eine Reihe constant beobachteter Thatsachen.

Die wichtigste derselben war die, daß allen, die Gruppen CO—NH enthaltenden Verbindungen d. h. also allen untersuchten Isoximen, sofern sie überhaupt Wirkung äußerten, als Grundwirkung, regelmäßig nachweisbare mehr oder weniger ausgeprägte Krampfsymptome zukommt, die indessen nicht, wie Schotten bei seinen Piperidon meinte, und bereits erwähnt wurde, den Typus des Strychnins d. h. eines Reflexkrampfes zeigt, vielmehr ihre Ursache in directer Erregung des in der Medulla oblongata gelegenen Krampfcentrums hat. Es zeigte sich denn auch, daß dem von Herrn Prof. Wallach genau nach der Methode Schotten's dargestellten Piperidon ebenfalls diese Wirkung, aber keine strychninartige zukommt und ein wirklicher Unterschied zwischen ihm und dem Wallach'schen Piperidon (Pentanonisoxim), das auf anderem Wege gewonnen war, nicht zu constatiren ist. Wenn letzteres zuerst etwas wirksamer erschien, so ist das wohl auf Rechnung der bei der leicht eintretenden Dissociation, des hier zu den Ver-

Digitized by Google

suchen benutzten Salzes, frei werdenden Salzsäure zu setzen, da mit kohlensaurem Natron neutralisirte Lösungen sich wieder weniger wirksam erwiesen.

Es dürften somit die cyclischen Isoxime der pharmakologischen Gruppen der Medullar-Krampfgifte, repräsentirt durch das Pikrotoxin und den Campher, zugehörig zu betrachten sein.

Dahingegen erwiesen sich die übrigen untersuchten Verbindungen, denen, sei es die CO oder NH Gruppe im Ringe fehlte, alle als typische Lähmungsgifte, welche eine Krampfwirkung nicht erkennen ließen; so das Pentanon, Hexanon u. Suberon, sowie das Piperidin, Hexamethylenimin und Trimethylpiperidin.

Stellt man die tödtlichen Gaben der einfachen Isoxime aber für den Frosch und die Maus zusammen, so ergiebt sich folgendes:

	Frosch	Verhältnisszahl	Maus	Verhältnisszahlen
Pentanonisoxim	4,7—5 mg. p. g.	(20)	über 3,2 mg. p. g.	(16)
Hexanonisoxim	3,5 mg. p. g.	(7)	0,85 mg. p. g.	(4)
Suberonisoxim	über 2,0 mg. p. g.	(4)?	0,4 mg. p. g.	(2).

Man sieht, es steigt also mit der Größe des Ringes hier die Wirksamkeit, was bei dem Hexamethyleminin gegenüber dem Piperidin nicht der Fall zu sein scheint, da für die Maus als tödtliche Gabe ersteres 0,88, letzteres 0,7 ergab. Dahingegen tritt die Steigerung der Wirkung ebenfalls hervor bei dem Pentanon, Hexanon u. Suberon, welche als tödtliche Gabe am Frosch 3—5 mg., 2,3 mg. u. 1,2 mg. p. g. ergaben, nur daß es sich bei diesen Verbindungen um reine Lähmungswirkung handelt.

Es zeigte sich weiter, daß die Wirksamkeit der Ringisoxime durch den Eintritt einer Methylgruppe an den Ring gesteigert wird, wie sich aus dem Umstand ergiebt, daß, bemessen an der tödtlichen Gabe, das Methylpentanonisoxim und α Methylhexanonisoxim, welches, wie zur Zeit angenommen wird, die CH_3 Gruppen an 2. Stelle neben dem N enthält, doppelt so giftig sind, wie die entsprechenden, methylfreien Verbindungen.

Der Umstand aber, daß das β Methylhexanonisoxim, bei welchem die Methyl-Gruppe an 4. Stelle vom N angefügt ist, ohne nachweisbare qualitative Aenderung der Krampfwirkungen an der Maus 10 mal, am Frosch 5 mal giftiger als die CH_3 freie Verbindung und $2^1/_2$ mal, sowie 5 mal so giftig als die α Verbindung ist, deutet darauf hin, daß auch die Stellung, in welcher die

Digitized by Google

Methyl-Gruppe am Ringe sich befindet, von Bedeutung für den quantitativen Wirkungseffect ist, d. h. daß dieselbe Gruppe an 4. Stelle die Wirkung gegenüber ihrer Anlagerung an 2. Stelle erheblich steigert.

Freilich könnte in diesem Falle möglicherweise die Wirkungssteigerung auch noch von sehr geringen Mengen Verunreinigungen abhängen, da die Verbindung außerordentlich schwer völlig rein zu erhalten ist. Es haften z. B. sehr leicht geringe Mengen der α-Verbindungen an und auch eine andere, nicht näher bisher untersuchte Base kommt in geringen Mengen im Rohpräparat vor. Diese letztere Base erwies sich indessen bei der Untersuchung zwar gleichartig aber schwächer wirksam als die β-Verbindung, sodaß auf Verunreinigungen mit ihr keinesfalls die Wirkungssteigerung beruhen kann, man also schon noch einen andern Körper als Ursache derselben ansehen müßte. Ein solcher hat sich bisher indessen nicht isolieren lassen.

Diejenigen Verbindungen, bei welchen mehrere Alkyle an den Isoxim Ring angelagert sind, zeigten dagegen eine qualitative Veränderung der Wirkung, welche in einem verstärkten Hervortreten, der den Alkylen im Allgemeinen zukommenden Lähmungserscheinungen, sich äußerte. Am Frosch, für welchen die Lähmung offenbar eine weit mehr das Leben gefährdende Schädigung als der Krampf ist, zeigt sich dies in der Steigerung der Giftigkeit, in einem Herabgehen der Größe der tödtlichen Dosis, wie man dies erkennt bei einem Vergleich zwischen Piperidin und Trimethylpiperidin, welch letzteres bei reiner Lähmung zu 0,5—0,6 mg. p. g. tödtet, während ersteres erst zu 1 mg. p. g. diesen Effect bedingt; an der Maus tritt dieser Unterschied nicht so hervor.

Noch deutlicher zeigt sich diese Steigerung des Lähmungseffectes bei dem Trimethylcyclohexanonisoxim gegenüber der das α und β Methylhexanonisoxims am Frosch, wo diese bei β durch den Krampf nahezu verdeckte, bei α schon mehr hervortretende Lähmung, bei der Trimethylbase das in Erscheinungtreten der Krampfsymptome so gut wie vollständig verhindert. Eine Steigerung der letalen Dosis ist hier allerdings gegenüber β nicht weiter zu konstatiren.

Bei der Maus ist bei Trimethylcyclohexanonisoxim ein directes Hervortreten von Lähmungssymptomen freilich nicht nachzuweisen, aber die Giftigkeit ist eine, gegenüber dem β-Monomethyl-Verbindung, um das 4fache herabgesetzte, sie geht von 0,075 auf 0,3 mg. p. g. als dos. let. zurück und kommt so der α Verbindung mit 0,4 mg. p. g. wieder nahe. Diese Abschwächung der Wirk-

Digitized by Google

samkeit dürfte aber eben vielleicht als Ausdruck des antagonistischen, die Krampfwirkung vermindernden Lähmungseffectes aufzufassen sein.

In weit prägnanterer Weise als die Methylgruppen läßt die Anlagerung der Propylgruppe an den Ring die Lähmung zum Ausdruck gelangen. Bei dem Linksmenthonisoxim, dem Tetrahydrocarvonisoxim und Thujamenthonisoxim drückt sich dies am Frosch in der gesteigerten letalen Wirkung aus, da diese Verbindungen mit einer tödtlichen Dosis von 0,33 mg. p. g.; 0,47 mg. p. g. und 0,40 mg. p. g. am Frosch von allen untersuchten als die wirksamsten sich erwiesen, ein Vergleich der letzten Verbindung mit dem Methylpentanonisoxim, dessen Dosis letalis bei 2,3 mg. p. g. liegt, läßt dies am deutlichsten erkennen. Beim Frosch finden wir bei allen diesen Verbindungen die Isoximkrampfwirkung nur angedeutet. Bei der Maus ergaben sich die tödtlichen Dosen zu 0,55 mg. p. g. 0,67 mg. p. g. und 0,44; bei ihr fällt das Hervortreten der Lähmung im Wirkungsbilde noch mehr auf, weil gerade bei ihr, die für den Krampf disponirt ist, die Lähmung sonst leicht von der Erregung verdeckt wird.

Auch hier scheint die Stellung der Propylgruppe, wie bei den Methylhexanonisoximen die des Methyls, von Bedeutung für den Grad des Effectes zu sein, da bei dem Menthonisoxim, welches das C_3H_7 an 2. Stelle hat bei der Maus die Krämpfe rudimentär noch vorhanden sind und zwar zu Beginn der Vergiftung, also weniger durch die Lähmung verdeckt werden, als bei dem Tetrahydrocarvonisoxim, bei dem sie nur im Stadium der Erholung nach schwerer Vergiftung schließlich sich noch angedeutet finden, während sie bei tödtlicher Vergiftung ganz fehlen in Folge überwiegender Lähmung.

In durchaus anderer Weise verändert aber die Propylgruppe die Wirkung, wenn sie statt an den Ring, gewissermaßen in denselben eingefügt wird, wie dies bei dem Isofenchonoxim der Fall ist. Hier bewirkt sie zusammen mit der CH_3-Gruppe eine Steigerung der Wirksamkeit, die wie die tödtliche Dosis an der Maus mit 0,053 mg. p. g. zeigt, die des β-Methylhexanonisoxims mit 0,075 mg. p. g. noch übertrifft, und zwar ist es hier die Krampfwirkung, welche in noch deutlicherer Weise an Maus und Frosch sich bemerkbar macht. Wir werden deshalb vielleicht nicht fehlgehen, wenn wir die Krampfwirkung auch bei den Campher-Verbindungen, in denen wir die gleiche Gruppe C_3H_6 neben der CO-Gruppe als Querkette im Ringe finden, mit dieser Eigenart im molekularen Aufbau dieser Ringverbindung in ursachlichen Zusammenhang

Digitized by Google

bringen. Hierfür spricht auch der Umstand, daß das Fenchon, welches sich vom Campher nur durch die Stellung der CH_3-Gruppe unterscheidet, ebenfalls, wenn auch schwächere Krampfwirkung an der Maus zeigte.

Das Bihydrolinksmethonisoxim, bei welchem sich an Stelle der Gruppe CO die Gruppe CHOH findet, und das deshalb nicht ganz den übrigen Oximen an die Seite gestellt werden kann, von welchem es sogar noch nicht entschieden ist, ob man es wirklich bei ihm mit einer hydrirten, cyclischen oder nicht etwa mit einer durch Ringsprengung entstandenen aliphatischen Verbindung zu thun hat, läßt am Frosch die Lähmung wie beim Linksmenthonisoxim überwiegen, es ist aber etwa 4—5 mal weniger giftig, da die Dosis letalis bei ihm 1,5 mg. p. g. beträgt; bei der Maus hingegen fehlt die Lähmung ganz und gehen die Thiere bei annähernd gleich großen Gaben (0,48 mg. p. g.) wie beim Linksmenthonisoxim (0,55 mg. p. g.) in den Krämpfen zu Grunde.

Wenn bei dem Benzoylbihydrolinksmenthonisoxim eine Wirkung überhaupt nicht konstatirt werden konnte, so liegt dies nicht bloß an der Unlöslichkeit in Wasser, denn auch mit Hülfe von Alkohol in Lösung gebracht, ließen sich keine deutlichen Wirkungen erzielen. Jedenfalls scheint ihm jede Krampfwirkung zu fehlen. Auch eine Lähmung der sensiblen Nervenenden, wie sie bei der, dem Cocaïn ähnlichen Structur, vielleicht zu erwarten wäre, zeigte sich nicht, selbst wenn das Präparat, in Substanz oder in Alkohol zu 10 % gelöst, auf die Lippe gebracht wurde.

Eine interessante Beobachtung machte Herr Dr. Hajashi, indem er konstatiren konnte, daß den von uns untersuchten Isoximen des 7. und 8. Ringes auch eine Wirkung auf die motorischen Nervenendapparate zukommt, die sich als eine mehr oder weniger hochgradige und anhaltende, gesteigerte Erschöpfbarkeit dieser Apparate zeigte, welche wohl als eine nur quantitativ sich von der Curare-Lähmung unterscheidende Veränderung dieser Theile aufzufassen ist. Bei dem Trimethylpiperidin, wie bereits bekannt, aber auch bei dem Trimethylcyclohexanonisoxim zeigte sich dahingegen die Curarewirkung in typischer Weise. Die Erschöpfbarkeit trat besonders deutlich hervor bei dem Suberonisoxim, Tetrahydrocarvonisoxim und Isofenchonoxim. Wir haben somit in dieser Erscheinung ein weiteres Wirkungssymptom, das diese Ring-Isoxime der Camphergruppe zugehörig erscheinen läßt, bei welcher ja ebenfalls Curarewirkung vorhanden ist.

Auch auf die Muskelsubstanz haben, wie Hajashi nachwies, die Ring-Isoxime zweifellos einen Einfluß, der sich documentirt

Digitized by Google

in einem verlangsamten Verlauf des Contractions- und Erschlaffungsvorganges und bei dem Thujamenthonisoxim zu Erscheinungen führte, welche sehr an die Coffeïnwirkung erinnern.

Die Retardirung der Contraction und Relaxation tritt besonders gut hervor bei dem β-Methylhexanonisoxim und Tetrahydrocarvonisoxim, während es bei der α-Verbindung und dem Linksmenthonisoxim nur schwach ausgebildet ist. Also auch hier bedingt offenbar wieder die Stellung des Alkyl's in 2. oder 4. Position von N einen Unterschied der Wirksamkeit der Gruppen zu Gunsten der letzteren 4. Stellung, wie wir dies schon oben gesehen.

Auf die Drüsenapparate hatte, abgesehen vom α Methylhexanonisoxim, das beim Frosch zu wirklichem Schäumen, infolge gesteigerter Hautsecretion führte, keine der Verbindungen erheblichere Wirkung. Etwas vermehrte Hautsecretion konnte an Fröschen nach allen Präparaten nachgewiesen werden.

Die Reflexsphäre zeigte auch hin und wieder eine geringe Steigerung, aber nirgends in besonders beachtenswerther Weise. Auch am Herzen wurde eine specifische Einwirkung nicht konstatirt; bei den am Frosch lähmend wirkenden Verbindungen konnte man ein allmähliches Abnehmen des Pulses sehen, das aber nie von Vaguserregung, vielmehr offenbar von der allgemeinen Lähmung, abhing, da es durch Atropin unbeeinflußt blieb.

Durch einige Versuche waren wir endlich auch in der Lage analog dem Schotten'schen Versuch zu zeigen, daß dem durch Sprengung des Ringes aus dem Hexanonisoxim entstehende Amidohexylalkohol eine besondere Wirksamkeit, abgesehen von einer an der Maus schwach ausgeprägten, narkotischen Wirkung, welche ja den einsäurigen Alkoholen überhaupt zukommt, nicht besitzt.

Die Beantwortung der Frage, ob nun diese Ringisoxime für die Therapie etwa eine Bedeutung gewinnen könnten, da sie doch offenbar der Camphergruppe nicht fernstehen, mußte natürlich zunächst davon abhängig erscheinen, ob hier wie beim Campher neben der Erregung des Krampfcentrums in der Medulla auch eine solche des ebenfalls in der Medulla gelegenen Gefäßnerven- und Athemcentrums zu Stande komme und ob diese letzteren Wirkungen sich getrennt von ersterer hervorrufen lasse und so eine Verwendung im Sinne der Analeptica gestatte.

Einige mit dem $\alpha + \beta$ Methylhexanonisoxim am Linksmenthonisoxim und Isofenchonoxim an Kaninchen angestellte Versuche über ihren Einfluß auf den Blutdruck, führten nun allerdings zu keinem sehr günstigen Ergebniß.

Digitized by Google

Es zeigte sich nämlich, daß allerdings das Gefäßnervencentrum erregt und so Blutdrucksteigerung durch diese Verbindungen bewirkt werden kann, daß aber diese Wirkung, wie sich an curarisirten Thieren ergab, gleichzeitig mit der Erregung des Krampfcentrums auftritt, sodaß an eine praktische Verwendung dieser Substanzen im Sinne von Collapsmitteln jedenfalls nicht gedacht werden kann.

Ob bei anderen Ringisoximen durch entsprechende Einführung von Alkylen die Verhältnisse sich besser gestalten lassen, wäre zu untersuchen.

Jedenfalls aber schädigten diese Verbindungen den Blutdruck nicht und das war wichtig, denn die Athmung konnte in der That als wesentlich beeinflußt nachgewiesen werden. Eine Steigerung der Frequenz und des p. Min. ausgeathmeten Luftvolumens traten, auch ohne daß es zum Krampf kam, sehr prägnant hervor und es wäre diese Wirkung eventuell therapeutisch nicht ohne Werth in solchen Krankheitsfällen, wo es sich nur darum handeln würde, eine allgemeine ergiebigere Athmung zu erzielen.

In letzter Zeit haben mich indessen einige Versuche noch auf eine ganz unerwartete, eigenartige Wirkung dieser Verbindungen geführt, welche in der That practisch eventuell von großen Interesse zu werden verspricht, und über die ich mir ausführlich zu berichten für nächste Zeit vorbehalten möchte.

Digitized by Google

Messungen der Electricitätszerstreuung in der freien Atmosphäre auf Capri.

Von

Dr. V. Cuomo.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 26. Juli 1902.

März 1902.

Datum	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkunge
1./III. 1902	h 1.23′	h 1.38′	+	23.0 = v. 201.3	13.3 = v. 155.5	3.44 %								
	h 1.44′	h 1.59′	—	22.4 = v. 198.9	13.0 = v. 154	3.41 %	16.5	10.1	73 %	SE	15	6	3	
	h 2.06′	h 2.21′	—	22.8 = v. 200.5	22.5 = v. 199.3	0.038 %								
2./III. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	22.9 = v. 200.9	15.5 = v. 166.5	2.48 %								
	h 1.46′	h 2.01′	—	23.0 = v. 201.3	16.8 = v. 173	2.02 %	14.0	10.8	91 %	W	10	4	2	
	h 2.07′	h 2.22′	—	21.0 = v. 193.3	20.7 = v. 192.1	0.040 %								
4./III. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.8 = v. 200.5	12.9 = v. 153.5	3.56 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	22.6 = v. 199.7	13.3 = v. 155.5	3.33 %	11.8	7.3	71 %	W	16	3	4	
	h 2.12′	h 2.27′	—	23.2 = v. 202.1	23.0 = v. 201.3	0.022 %								
5./III. 1902	h 1.15′	h 1.30′	+	24.0 = v. 205.3	19.0 = v. 184	1.47 %								
	h 1.36′	h 1.51′	—	24.1 = v. 205.8	19.1 = v. 184.5	2.06 %	11.2	6.3	63 %	W	21	1	3	
	h 1.57′	h 2.12′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.022 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
6./III. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	23.9 = v. 204.9	18.0 = v. 179	1.80 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	23.2 = v. 202.1	16.5 = v. 171.5	2.18 %	11.2	4.3	43 %	NW	4	1	4	
	h 2.41′	h 2.56′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								
7./III. 1902.														Heftiger Wind.
8./III. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	23.2 = v. 202.1	12.6 = v. 152	3.79 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	23.1 = v. 201.7	13.2 = v. 155	3.57 %	11.4	8.5	85 %	ENE	12	1	4	
	h 2.12′	h 2.27′	—	21.5 = v. 195.3	21.3 = v. 194.5	0.016 %								
9./III. 1902	h 1.27′	h 1.42′	+	23.6 = v. 203.7	18.0 = v. 179	1.74 %								
	h 1.48′	h 2.03′	—	24.0 = v. 205.3	20.0 = v. 189	1.12 %	12.6	6.6	60 %	W	2	2	3	
	h 2.09′	h 2.24′	—	23.0 = v. 201 3	22.9 = v. 200.9	0.024 %								
10./III. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	23.4 = v. 202.9	15.8 = v. 168	2.52 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	23.2 = v. 202.1	14.8 = v. 160.5	3.06 %	11.6	8.4	83 %	NNW	20	4	2	
	h 2.12′	h 2.27′	—	21.5 = v. 195.3	21.3 = v. 194.5	0.016 %								
12./III. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	23.3 = v. 202.5	15.5 = v. 166.5	2.61 %								
	h 2.01′	h 2.16′	—	22.5 = v. 199.3	14.1 = v. 159.5	2.97 %	9.7	4.1	54 %	NW	10	1	4	
	h 2.22′	h 2.37′	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.028 %								
13./III. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	24.6 = v. 208.3	18.9 = v. 183.5	1.66 %								
	h 1.52′	h 2.07′	—	24.8 = v. 206.8	18.4 = v. 181	1.78 %	11 8	6.7	63 %	E	8	1	3	
	h 2.13′	h 2.28′	—	23.2 = v. 202.1	23.0 = v. 201.3	0.022 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkunge
14./III. 1902	h 1.20′	h 1.35′	+	23.6 = v. 203.7	15.2 = v. 165	2.82 %								
	h 1.41′	h 1.56′	—	23.0 = v. 201.3	15.8 = v. 168	2.41 %	10.2	4.9	56 %	E	8	1	4	
	h 2.02′	h 2.17′	—	22.5 = v. 199.3	22.3 = v. 198.5	0.028 %								
15./III. 1902	h 1.32′	h 1.47′	+	22.8 = v. 200.5	13.8 = v. 158	3.17 %								
	h 1.53′	h 2.08′	—	22.0 = v. 197.3	12.5 = v. 151.5	3.52 %	10.2	4.9	52 %	ENE	17	0	5	
	h 2.14′	h 2.29′	—	20.4 = v. 190.9	20.1 = v. 189 5	0.052 %								
16.—17.—18./III./1902.														Regen Wind.
19./III. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	23.6 = v. 203.7	17.2 = v. 175	2.04 %								
	h 2.01′	h 2.16′	—	22.6 = v. 199.7	16.1 = v. 169.5	2.18 %	11.8	7.7	74 %	NNW	12.5	3	3	
	h 2.22′	h 2.37′	—	22.6 = v. 199.7	22.3 = v. 198.5	0.039 %								
20./III. 1902	h 1.28′	h 1.33′	+	23.3 = v. 202.5	16.9 = v. 173.5	2.06 %								
	h 1.39′	h 1.54′	—	22.5 = v. 199.3	15.7 = v. 167.5	2.80 %	12.4	8.3	76 %	W	13	1	4	
	h 2.0′	h 2.15′	—	20.8 = v. 192.5	20.5 = v. 191.3	0.052 %								
21./III. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	22.9 = v. 200.9	12.0 = v. 149	3.96 %								
	h 2.01′	h 2.16′	—	22.8 = v. 200.5	11.5 = v. 146.2	4.19 %	12.6	6.4	59 %	SE	21	0	5	
	h 2.22′	h 2.37′	—	22.4 = v. 198.9	22.2 = v. 198	0.033 %								
23./III. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.5 = v. 199.3	14.3 = v. 160.5	2.88 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	21.5 = v. 195.3	12.1 = v. 149.5	3.54 %	14.1	9.9	82 %	SW	20	4	2	
	h 2.12′	h 2.27′	—	22.5 = v. 199.3	22.3 = v. 198.5	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
24./III. 1902	h 1.27′	h 1.42′	+	22.6 = v. 199.7	14.5 = v. 161.5	2.83 %								
	h 1.48′	h 2.03′	—	21.7 = v. 196.1	13.2 = v. 155	3.13 %	12.2	7.2	67 %	SW	17	8	3	
	h 2.09′	h 2.24′	—	21.6 = v. 195.7	21.4 = v. 194.9	0.032 %								
25./III. 1902	h 1.45′	h 2.0′	+	22.0 = v. 197.3	12.8 = v. 153	3.39 %								
	h 2.06′	h 2.21′	—	21.7 = v. 196.1	11.5 = v. 146.2	3.89 %	12.0	5.8	56 %	NW	25	1	5	
	h 2 27′	h 2.42′	—	22.0 = v. 197.3	21.7 = v. 196.1	0.045 %								
26./III. 1902	h 1.33′	h 1.48′	+	23.8 = v. 204.5	14.1 = v. 159.5	3.32 %								
	h 1.54′	h 2.09′	—	22.7 = v. 200.1	14.0 = v. 159	3.05 %	14.1	10	84 %	SW	23	7	2	
	h 2.15′	h 2.30′	—	20.9 = v. 192.9	20.6 = v. 191.7	0.046 %								
27./III. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	22.9 = v. 200.9	15.9 = v. 168.5	2.32 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	23.0 = v. 201.3	16.1 = v. 169.5	2.29 %	12.8	7.9	72 %	NW	13	2	2	
	h 2.42′	h 2.57′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.022 %								
28./III. 1902	h 1.20′	h 1.35′	+	23.7 = v. 204.1	14.0 = v. 159	3.34 %								
	h 1.41′	h 1.56′	—	22.3 = v. 198.5	12.5 = v. 151.5	3.60 %	13.6	9.3	80 %	S	11	6	4	
	h 2.2′	h 2.17′	—	21.2 = v. 194.1	21.0 = v. 193.3	0.020 %								
29./III. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	22.0 = v. 197.3	12.2 = v. 150	3.65 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	22.3 = v. 198.5	12.1 = v. 149.5	3.78 %	14.3	9.4	78 %	SE	3	5	3	
	h 2.43′	h 2.58′	—	21.2 = v. 194.1	21.0 = v. 193.3	0.020 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
31./III. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.9 = v. 200.9	14.5 = v. 161.5	2.88 %								
	h 1.56′	h 2.11′	−	22.1 = v. 197.7	13.3 = v. 155.5	3.13 %	14.8	9.8	78 %	NE	11	2	2	
	h 2.17′	h 2.32′	−	21.5 = v. 195.3	21.3 = v. 194.5	0.016 %								

April 1902.

1./IV. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.1 = v. 197.7	13.0 = v. 154.0	3.32 %								
	h 1.51′	h 2.06′	−	22.0 = v. 197.3	13.2 = v. 155	3.22 %	14.3	6.9	57 %	SW	3	0	5	
	h 2.12′	h 2.27′	−	20.0 = v. 189.0	19.8 = v. 188	0.036 %								
2./IV. 1902.														Sehr windig.
3./IV. 1902	h 1.45′	h 2.0′	+	22.1 = v. 197.7	13.3 = v. 155.5	3.19 %								
	h 2.07′	h 2.22′	−	22.0 = v. 197.3	13.4 = v. 156	3.13 %	17.8	6.9	46 %	SE	23	1	5	
	h 2.28′	h 2.43′	−	21.8 = v. 196.5	21.6 = v. 195.7	0.034 %								
4./IV. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	23.0 = v. 201.3	15.2 = v. 165	2.65 %								
	h 2.01′	h 2.16′	−	21.3 = v. 194.5	12.9 = v. 153.5	3.15 %	17.2	10.4	72 %	S	5.5	2	3	
	h 2.22′	h 2.37′	−	22.1 = v. 197.7	22.0 = v. 197.3	0.010 %								
6./IV. 1902	h 1.46′	h 2.01′	+	22.0 = v. 150.3	12.2 = v. 152	3.65 %								
	h 2.07′	h 2.22′	−	21.2 = v. 194.1	12.5 = v. 151.5	3.51 %	14.2	9.9	84 %	E	1	5	2	
	h 2.28′	h 2.43′	−	21.6 = v. 195.7	21.3 = v. 194.5	0.034 %								
7./IV. 1902.														Regen.

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
8./IV. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.2 = v. 198.1	14.2 = v. 160	2.84 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.3 = v. 198.5	14.0 = v. 159	2.95 %	14.8	6.3	50 %	NE	6	0	4	
	h 2.17′	h 2.42′	—	20.3 = v. 190.5	20.0 = v. 189	0.052 %								
9./IV. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	22.2 = v. 198.1	12.1 = v. 149.5	3.74 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	21.8 = v. 196.5	12.3 = v. 150.5	3.55 %	13.8	5.3	44 %	E	6.5	0	4	
	h 2.42′	h 2.57′	—	22.3 = v 198.5	22.0 = v. 197.3	0.039 %								
11./IV. 1902	h 12.0′	h 12.15′	+	22.5 = v. 199.3	16.0 = v. 169	2.20 %								
	h 12.21′	h 12.36′	—	22.3 = v. 198.5	15.9 = v. 168.5	2.18 %	14.0	10.6	89 %	SE	29	1	4	
	h 12.42′	h 12.57′	—	21.8 = v. 196.5	21.7 = v. 196.1	0.017 %								
13./IV. 1902	h 2.20′	h 2.35′	+	21.0 = v. 193.3	9.5 = v. 135.7	4.74 %								
	h 2.41′	h 2.56′	—	21.9 = v. 196.9	10.0 = v. 137.7	4.77 %	15.0	10.0	78 %	SW	12.5	4	3	
	h 3.03′	h 3.18′	—	21.2 = v. 194.1	20.9 = v. 192.9	0.032 %								
14./IV. 1902	h 1 30′	h 1.45′	+	21.5 = v. 195.3	12.5 = v. 151.5	3.36 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	21.8 = v. 196.5	12.7 = v. 152.5	3.38 %	18.1	9.8	63 %	W	15	0	5	
	h 2.12′	h 2.27′	—	20.6 = v. 191.7	20.3 = v. 190.5	0.052 %								
15./IV. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	22.0 = v. 197.3	12.6 = v. 152	3.48 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	21.9 = v. 196.9	12.3 = v. 150.5	3.58 %	17.0	9.8	68 %	WSW	7	1	4	
	h 2.43′	h 2.58′	—	20.9 = v. 192.9	20.6 = v. 191.7	0.046 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
18./IV. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.0 = v. 197.3	13.0 = v. 154	3.30 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.9 = v. 200.9	11.0 = v. 143.2	4.27 %	17.2	11.4	78 %	SW	15	7	4	
	h 2.17′	h 2.32′	—	21.1 = v. 193.7	20.9 = v. 192.9	0.023 %								
19./IV. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	22.5 = v. 199.3	15.0 = v. 164	2.60 %								
	h 2.02′	h 2.17′	—	21.2 = v. 194.1	14.1 = v. 159.5	2.62 %	18.6	10.2	64 %	WSW	14	0	4	
	h 2 23′	h 2.38′	—	20.8 = v. 192.5	20.6 = v. 191.7	0.034 %								
20./IV. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.2 = v. 198.1	16.4 = v. 171.0	1.95 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	21.2 = v. 194.1	13.0 = v. 154	3.09 %	19.8	9.9	61 %	WSW	1	1	3	
	h 2.18′	h 2.33′	—	20.4 = v. 190.9	20.3 = v. 190.5	0.034 %								
21./IV. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.5 = v. 199.3	15.0 = v. 164	2.60 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	21.2 = v. 194.1	13.1 = v. 154.5	3.05 %	17.8	11.9	78 %	W	16	2	3	
	h 2.12′	h 2.27′	—	21.0 = v. 193.3	20.8 = v. 192.5	0.022 %								
22./IV. 1902	h 1.37′	h 1.52′	+	21.0 = v. 193.3	12.2 = v. 150	3.40 %								
	h 1.58′	h 2.13′	—	21.0 = v. 193.3	11.8 = v. 148	3.58 %	17.0	10.5	73 %	SW	19	6	3	
	h 2.19′	h 2.34′	—	19.5 = v. 186.5	19.2 = v. 185	0.054 %								
24./IV. 1902	h 1.15′	h 1.30′	+	22.6 = v. 199.7	16 2 = v. 170	2.14 %								
	h 1.37′	h 1.52′	—	22.5 = v. 199.3	16.0 = v. 169	2.20 %	14.0	10.1	70 %	SW	14	9	2	
	h 1.58′	h 2.13′	—	21.6 = v. 195.7	21.4 = v. 194.9	0.032 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
25./IV. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.1 = v. 197.7	9.8 = v. 186.9	4.88 %								
	h 1.52′	h 2.07′	—	21.0 = v. 193.3	9.0 = v. 183.8	4.91 %	17.2	9.4	64 %	SE	28	8	2	
	h 2.13′	h 2.28′	—	20.1 = v. 189.5	19.8 = v. 188	0.053 %								
26./IV. 1902	h 12.33′	h 12.48′	+	22.1 = v. 197.7	16.1 = v. 169.5	2.04 %								
	h 12.55′	h 1.10′	—	23.0 = v. 201.3	16.7 = v. 172.5	2.06 %	17.4	10.2	68 %	SE	14	1	4	Am Meere, vor der blauen Grotte
	h 1.17′	h 1.32′	—	23.0 = v. 201.3	22.9 = v. 197.3	0.024 %								
27./IV. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	22.0 = v. 197.3	13.9 = v. 158.5	2.95 %								
	h 2.02′	2.17′	—	21.9 = v. 196.9	10.7 = v. 141.2	4.47 %	16.8	9.9	70 %	S	8	8	2	
	h 2.23′	h 2.38′	—	22.1 = v. 197.7	21.9 = v. 196.9	0.022 %								
28./IV. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	23.1 = v. 201.7	14.2 = v. 160	3.08 %								
	h 1.47′	h 2.02′	—	21.2 = v. 194.1	12.3 = v. 150.5	3.40 %	19.5	9.7	57 %	W	9	1	4	
	h 2.09′	h 2.24′	—	20.9 = v. 192.9	20.7 = v. 192.1	0.028 %								

Mai 1902.

1./V. 1901. 2./V. 1902.														Starker Wind Regen.
3./V. 1902	h 1.0′	h 1.15′	+	23.0 = v. 201.3	16.5 = v. 171.5	2.14 %								
	h 1.21′	h 1.36′	—	23.0 = v. 201.3	16.7 = v. 172.5	2.06 %	16.4	10.4	70 %	W	5	3	2	
	h 1.42′	h 1.57′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.022 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
4./V. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.0 = v. 197.3	11.2 = v. 144.4	4.16 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	21.0 = v. 193.3	10.7 = v. 141.2	4.23 %	16.1	10.3	76 %	S	27	1	5	
	h 2.17′	h 2.32′	–	20.5 = v. 191.3	20.3 = v. 190.5	0.036 %								
5./V. 1902	h 1.36′	h 1.51′	+	24.0 = v. 205.3	14.2 = v. 160	3.33 %								
	h 1.57′	h 2.12′	—	24.1 = v. 205.8	16.0 = v. 169	2.64 %	17.3	11.1	76 %	W	14.5	1	3	
	h 2.18′	h 2.33′	—	22.0 = v. 197.3	21.9 = v. 192.9	0.011 %								
6./V. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	23.0 = v. 201.3	14.5 = v. 161.5	2.94 %								
	h 2.57′	h 2.36′	—	21.5 = v. 195.3	11.0 = v. 143.2	4.13 %	15.8	9.5	71 %	NW	8.8	4	2	
	h 2.43′	h 2.58′	—	21.5 = v. 195.3	21.3 = v. 194.3	0.016 %								
7./V. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	23.5 = v. 203.3	15.3 = v. 165.5	2.75 %								
	h 1.46′	h 2.01′	—	23.2 = v. 202.1	15.2 = v. 165.0	2.69 %	17.6	8.4	56 %	S	4	5	4	
	h 2.08′	h 2.23′	—	23.0 = v. 202.1	22.8 = v. 200.5	0.028 %								
8.—9./V. 1902.														Sehr windig.
10./V. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	21.5 = v. 195.3	9.5 = v. 135.7	4.96 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	21.0 = v. 193.3	10.0 = v. 137.7	4.55 %	15.4	7.1	55 %	WSW	29	5	3	
	h 2.42′	h 2.57′	—	21.2 = v. 194.1	21.0 = v. 193.3	0.020 %								
11./V. 1902	h 1.45′	h 2.0′	+	23.5 = v. 203.3	13.6 = v. 157	3.45 %								
	h 2.06′	h 2.21′	—	22.4 = v. 198.9	12.4 = v. 151	3.68 %	14.5	5.8	47 %	WSW	14	2	5	
	h 2.28′	h 2.43′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.3	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
12./V. 1902	h 2.02′	h 2.17′	+	22.1 = v. 197.7	11.5 = v. 146.2	4.01 %								
	h 2.23′	h 2.38′	—	22.0 = v. 197.3	10.1 = v. 138.1	4.76 %	14.6	9.4	74 %	WSW	22	3	4	
	h 2.44′	h 2.59′	—	20.9 = v. 192.9	20.6 = v. 191.7	0.046 %								
13./V. 1902	h 2.10′	h 2.25′	+	24.0 = v. 205.3	17.0 = v. 174	2.22 %								
	h 2.31′	h 2.46′	—	23.1 = v. 201.7	15.1 = v. 164.5	2.71 %	15.6	8.3	62 %	WSW	10	6	4	
	h 2.52′	h 3.07′	—	21.0 = v. 193.3	20.7 = v. 192.1	0.040 %								
14./V. 1902.														Regen.
15./V. 1902	h 2 05′	h 2.20′	+	23.4 = v. 202.9	16.0 = v. 169	2.44 %								
	h 2.26′	h 2.41′	—	22.2 = v. 198.1	14.1 = v. 159.5	2.88 %	15.0	8.0	64 %	W	7	7	3	
	h 2.47′	h 3.02′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								
16./V. 1902	h 1.20′	h 1.35′	+	23.5 = v. 203.3	17.1 = v. 174.5	2.05 %								
	h 1.42′	h 1.57′	—	23.6 = v. 203.7	17.2 = v. 175	2.04 %	15.8	8.2	61 %	WSW	13.5	1	2	
	h 2.05′	h 2.20′	—	22.4 = v. 198.9	22.1 = v. 197.7	0.045 %								
17./V. 1902	h 2.05′	h 2.20′	+	22.2 = v. 198.1	13.8 = v. 158	3.0 %								
	h 2.26′	h 2.41′	—	22.0 = v. 197.3	13.4 = v. 156	3.13 %	16.2	8.8	63 %	WNW	26	8	2	
	h 2.48′	h 3.03′	—	22.1 = v. 197.7	21.9 = v. 196.9	0.022 %								
18./V. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.2 = v. 198.1	13.9 = v. 158.5	2.30 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.0 = v. 197.3	14.8 = v. 163	2.54 %	17.8	10.7	71 %	SSW	17.5	1	2	
	h 2.17′	h 2.32′	—	20.0 = v. 189	19.9 = v. 188.5	0.018 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
19.—20./V. 1902.														Heftiger Wind.
21./V. 1902	h 1.32′	h 1.47′	+	24.4 = v. 207.3	14.5 = v. 161.5	3.33 %								
	h 1.58′	h 2.08′	—	23.1 = v. 201.7	13.1 = v. 154.5	3.55 %	15.6	7.6	56 %	WNW	11	4	2	
	h 2.16′	h 2.31′	—	21.0 = v. 193.3	20.8 = v. 192.5	0.022 %								
22./V. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	23.0 = v. 201.3	13.1 = v. 154.5	3.53 %								
	h 2.22′	h 2.37′	—	22.9 = v. 200.9	13.4 = v. 156	3.35 %	12.6	7.6	70 %	WNW	11	9	3	
	h 2.42′	h 2.57′	—	23.0 = v. 201.3	22.7 = v. 200.1	0.044 %								
23./V. 1902	h 1.17′	h 1.32′	+	23.2 = v. 202.1	13.4 = v. 156	3.44 %								
	h 1.38′	h 1.53′	—	22.5 = v. 199.3	11.3 = v. 145	4.24 %	15.6	7.1	54 %	S	12.5	1	5	
	h 1.59′	h 2.14′	—	21.3 = v. 194.5	21.0 = v. 193.3	0.029 %								
24./V. 1962	h 1.45′	h 2.0′	+	23.5 = v. 203.3	15.2 = v. 165	2.79 %								
	h 2.07′	h 2.22′	—	22.0 = v. 197.3	14.3 = v. 160.5	2.78 %	16.8	6.8	47 %	NE	10	2	4	
	h 2.28′	h 2.43′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 196.1	0.034 %								
26./V. 1902	h 2.10′	h 2.25′	+	22.3 = v. 198.5	13.0 = v. 154	3.38 %								
	h 2.32′	h 2.47′	—	21.5 = v. 195.3	12.2 = v. 150	3.49 %	16.2	7.9	58 %	W	16	6	3	
	h 2.53′	h 3.08′	—	23.4 = v. 202.9	23.1 = v. 201.7	0.044 %								
27./V. 1902	h 1.20′	h 1.35′	+	24.7 = v. 208.8	18.0 = v. 179	2.03 %								
	h 1.41′	h 1.56′	—	23.7 = v. 204.1	16.9 = v. 173.5	2.18 %	20.6	10.2	56 %	SW	9.5	3	3	
	h 2.11′	h 2.26′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 195.7	0.034 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
28./V. 1902	h 1.18′	h 1.33′	+	23.6 = v. 203.7	16.2 = v. 170	2.43 %								
	h 1.39′	h 1.54′	—	23.2 = v. 202.1	16.5 = v. 171.5	2.18 %	20.8	12.1	67 %	SW	10	2	4	
	h 2.01′	h 3.16′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.022 %								
29./V. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.7 = v. 200.1	11.0 = v. 143.2	4.47 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.0 = v. 197.3	9.5 = v. 135.7	4.99 %	20.6	7.5	43 %	E	3	1	4	
	h 2.17′	h 2.32′	—	21.3 = v. 194.5	21.0 = v. 193.7	0.029 %								
30./V. 1602	h 1.10′	h 1.25′	+	22.5 = v. 199.3	12.8 = v. 153	3.52 %								
	h 1.32′	h 1.47′	—	21.9 = v. 196.9	12.0 = v. 149.0	3.72 %	23.9	7.9	35 %	SE	28	4	4	
	h 1.54′	h 2.09′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								
31./V. 1902.														Keine Messungen.

Juni 1902.

1./VI. 1902	h 1.16′	h 1.31′	+	24.0 = v. 205.3	9.0 = v. 133.5	5.70 %								
	h 1.37′	h 1.52′	—	22.0 = v. 197.3	8.9 = v. 133.5	5.19 %	24.4	6.5	28 %	S	22.5	1	5	
	h 1.59′	h 2.14′	—	23.0 = v. 201.3	22.7 = v. 200.1	0.044 %								
2./VI. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.0 = v. 197.3	8.2 = v. 130	5.56 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	21.7 = v. 196.1	7.8 = v. 126	5.88 %	25.3	6.5	27 %	SE	32.5	1	5	
	h 2.18′	h 2.33′	—	21.2 = v. 194.1	20.9 = v. 192.9	0.032 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt
3./VI. 1902	h 2.05′	h 2.20′	+	21.0 = v. 193.3	10.8 = v. 141.8	4.16 %							
	h 2.27′	h 2.42′	—	21.8 = v. 196 5	12.0 = v. 149	3.68 %	24.6	12.3	54 %	S	4.5	6	2
	h 2.48′	h 3.03′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %							
4./VI. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	22.2 = v. 198.1	10.0 = v. 137.7	4.84 %							
	h 1.47′	h 2.02′	—	21.0 = v. 193.3	10.0 = v. 137.7	4.55 %	20.5	13.2	75 %	N	5.5	0	5
	h 2.08′	h 2.23′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 197.1	0.034 %							
5./VI. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.2 = v. 198.1	11.8 = v. 148	3.88 %							
	h 1.52′	h 2.07′	—	21.6 = v. 195.7	12.0 = v. 149	3.62 %	22.1	12.6	63 %	SW	5	2	3
	h 2.13′	h 2.28′	—	20.1 = v. 189 5	19.9 = v. 188.5	0.035 %							
6./VI. 1902	h 1.43′	h 1.58′	+	22.7 = v. 200.1	13.8 = v. 158	3.14 %							
	h 2.04′	h 2.19′	—	21.1 = v. 193.7	11.5 = v. 146.2	2.76 %	20.5	13.2	75 %	SW	15	2	3
	h 2 25′	h 2.40′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.027 %							
7./VI. 1902	h 12.55′	h 1.30′	+	22.5 = v. 199.3	13.0 = v. 150	3.84 %							
	h 1.16′	h 1.31′	—	23 0 = v. 201.3	12.2 = v. 150	3.98 %	21 0	13.5	73 %	WNW	22.5	1	4
	h 1.37′	h 1.52′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.022 %							
8.—9.—10.—11./VI. 1902.													Ke Messı weger weser
12./VI. 1902	h 1.27′	h 1.42′	+	23.0 = v. 201.3	10.0 = v. 137.7	5.06 %							
	h 1.47′	h 2.02′	—	22.2 = v. 198.1	8.7 = v. 132.9	5.30 %	19.8	10	58 %	WNW	15	5	4
	h 2.08′	h 2.23′	—	22.4 = v. 198.9	22.1 = v. 197.7	0.045 %							

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
13./VI. 1902	h 2.02′	h 2.17′	+	21.0 = v. 193.3	10.0 = v. 137.7	4.55 %								
	h 2.23′	h 2.38′	—	21.2 = v. 194.1	11.3 = v. 145	3.90 %	20.4	9.6	54 %	SW	5	1	5	
	h 2.45′	h 3.0′	—	20.9 = v. 192.9	20.6 = v. 191.7	0.046 %								
14./VI. 1902	h 1.17′	h 1.32′	+	22.9 = v. 200.9	12.0 = v. 149	3.48 %								
	h 1.38′	h 1.53′	—	22.4 = v. 198.9	10.7 = v. 141.2	4.59 %	20.4	14.5	81 %	W	12.5	6	3	
	h 2.0′	h 2.15′	—	21.2 = v. 194.1	21.0 = v. 193.3	0.026 %								
15./VI. 1902	h 1.31′	h 1.46′	+	23.0 = v. 201.3	12.6 = v. 152	3.74 %								
	h 1.52′	h 2.07′	—	22.9 = v. 200.9	12 0 = v. 149	3.96 %	20.0	9.7	55 %	WSW	6.5	3	4	
	h 2.13′	h 2.28′	—	24.5 = v. 207.8	24.1 = v. 205.8	0.053 %								
16./VI. 1902	h 1.17′	h 1.33′	+	22.0 = v. 197.3	9.9 = v. 137.3	4.83 %								
	h 1.39′	h 1.54′	—	21.9 = v. 196.9	9.5 = v. 135.7	4.97 %	19.2	11	66 %	W	6.2	1	4	
	h 2.0′	h 2.15′	—	22.1 = v. 197.7	21.9 = v. 196.9	0.022 %								
17./VI. 1902	h 1.12′	h 1.27′	+	22.3 = v. 198.5	11.6 = v. 146.8	4.00 %								
	h 1.33′	h 1.48′	—	22.0 = v. 197.3	10.0 = v. 137.7	4.80 %	18.4	9.8	62 %	W	4	7	4	
	h 1.55′	h 2.10′	—	22.9 = v. 200.9	22.5 = v. 199.3	0.042 %								
18./VI. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	23.0 = v. 201.3	10.9 = v. 142.6	4.62 %								
	h 1.47′	h 2 02′	—	22.5 = v. 199.3	12.0 = v. 149	3.88 %	18.2	9	58 %	WSW	10	1	5	
	h 2.08′	h 2.23′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt
19./VI. 1902	h 2.20′	h 2.35′	+	22.3 = v. 198.5	5.3 = v. 101	9.0 %							
	h 2.41′	h 2.56′	—	22.5 = r. 199.3	5.2 = v. 100	9.19 %	17.6						
	h 3.02′	h 3.17′	—	22.0 = v. 197.3	21.6 = v. 195.7	0.062 %							
20./VI. 1902	h 1.02′	h 1.17′	+	23.0 = v. 201.3	12.9 = v. 153.5	3.61 %							
	h 1.23′	h 1.38′	—	22.2 = v. 198.1	11.0 = v. 143.2	4.34 %	19.2	11.6	70 %	S	27	1	5
	h 1.44′	h 1.59′	—	22.5 = v. 199.3	22.2 = v. 198.1	0.044 %							
21./VI. 1902.													
22./VI. 1902	h 1.10′	h 1.25′	+	23.0 = v. 201.3	12.0 = v. 149.0	4.01 %							
	h 1.32′	h 1.47′	—	22.0 = v. 197.3	11.0 = v. 143.2	4.29 %	21.7	12.8	67 %	SW	17.5	1	4
	h 1.53′	h 2.08′	—	22 2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.022 %							
23./VI. 1902	h 1.20′	h 1.35′	+	22.0 = v. 197.3	12.1 = v. 149	3.70 %							
	h 1.41′	h 1.56′	—	22.2 = v. 198.1	13.8 = v. 158.0	3.00 %	23.6	11.6	54 %	SW	10	1	4
	h 2.03′	h 2.18′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.022 %							
24./VI. 1902	h 1.19′	h 1.34′	+	22.9 = v. 200.9	14.0 = v. 159	3.09 %							
	h 1.40′	h 1.55′	—	22.9 = v. 200.9	13.2 = v. 155	3.48 %	22.8	12.7	62 %	W	11	2	3
	h 2.01′	h 2.16′	—	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.022 %							
25./VI. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	20.1 = v. 189.5	7.1 = v. 119	6.00 %							
	h 1.46′	h 2.01′	—	20.0 = v. 189	7.6 = v. 124	6.28 %	22.7	11.7	56 %	SW	10	0	5
	h 2.07′	h 2.22′	—	20.0 = v. 189	19.5 = v. 186.5	0.250 %							

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
26./VI. 1902	h 1.10′	h 1.25′	+	22.8 = v. 200.5	13.0 = v. 154	3.51 %								
	h 1.32′	h 1.47′	−	23.0 = v. 201.3	13.0 = v. 154	3.57 %	24.8	14.2	61 %	N	7	1	4	
	h 1.53′	h 2.08′	−	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.022 %								
27./VI. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	23.0 = v. 201.3	14.5 = v. 161.5	2.94 %								
	h 1.56′	h 2.11′	−	23.0 = v. 201.3	15.0 = v. 164	2.73 %	23.8	10.7	49 %	N	5.5	2	4	
	h 2.17′	h 2.32′	−	22.1 = v. 197.7	21.9 = v. 196.9	0.056 %								
28./VI. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	24.4 = v. 207.3	16.2 = v. 170	2.64 %								
	h 1.51′	h 2.06′	−	23.5 = v. 203.3	16.8 = v. 173	2.16 %	23.8	10.5	48 %	N	6	2	3	
	h 2.12′	h 2.27′	−	24.0 = v. 204.3	23.7 = v. 204.1	0.038 %								
29./VI. 1902	h 1.27′	h 1.42′	+	24.1 = v. 205.8	14.0 = v. 159	3.45 %								
	h 1.48′	h 2.03′	−	23.0 = v. 201.3	13.0 = v. 154	3.57 %	25.8	10.9	44 %	WSW	10	1	5	
	h 2.09′	h 2.24′	−	23 0 = v. 201.3	22.9 = v. 200.9	0.031 %								
30./VI. 1902	h 1.23′	h 1.38′	+	22.0 = v. 197.3	9.7 = v. 136.5	4.91 %								
	h 1.45′	h 2.0′	−	22.0 = v. 197.3	11.4 = v. 145.6	4.04 %	25.8	10.8	48 %	N	12	1	5	
	h 2.06′	h 2.21′	−	21.0 = v. 193.3	20.6 = v. 192.5	0.034 %								

Juli 1902.

1./VII. 1902	h 1.0′	h 1.15′	+	22.5 = v. 199.3	14.0 = v. 159	3.01 %								
	h 1.21′	h 1.36′	−	22.3 = v. 198.5	14.3 = v. 160.5	2.96 %	25.2	11.6	49 %	SW	12 5	1	4	
	h 1.43′	h 1.58′	−	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
2./VII. 1902	h 1.38′	h 1.53′	+	23.5 = v. 203.3	13.0 = v. 154	3.71 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	22.2 = v. 198.1	12.5 = v. 151.5	3.56 %	26.4	10.2	40 %	SSW	15	1	5	
	h 2.21′	h 2.36′	—	24.5 = v. 207.8	24.3 = v. 206.2	0.021 %								
3./VII. 1902	h 1.27′	h 1.42′	+	22.0 = v. 197.3	14.0 = v. 159	2.88 %								
	h 1.49′	h 2.04′	—	22.0 = v. 197.3	12.5 = v. 151.5	3.52 %	25.0	15	63 %	SSW	11	1	3	
	h 2.11′	h 2.26′	—	21.0 = v. 193.3	20.8 = v. 192.5	0.022 %								
4./VII. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	23.0 = v. 201.3	16.0 = v. 169	2.33 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.5 = v. 199.3	14.9 = v. 163.5	2.64 %	24.8	7.5	33 %	N	5	2	3	
	h 2.18′	h 2.33′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								
5./VII. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.0 = v. 197.3	12.5 = v. 151.5	3.52 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	22.2 = v. 197.3	13.8 = v. 158	3.00 %	25.6	14.0	57 %	W	10	2	4	
	h 2.12′	h 2.27′	—	23.5 = v. 203.3	23.2 = v. 202.1	0.049 %								
6./VII. 1902	h 1.27′	h 1.42′	+	22.0 = v. 197.3	12.0 = v. 149	3.74 %								
	h 1.48′	h 2.03′	—	22.6 = v. 199.7	12.7 = v. 152.5	3.59 %	24.8	10.5	46 %	WSW	10	0	5	
	h 2.09′	h 2.14′	—	22.1 = v. 197.7	21.8 = v. 196.5	0.038 %								
7./VII. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	22.9 = v. 200.9	15.0 = v. 164	2.68 %								
	h 1.47′	h 2.02′	—	22.6 = v. 199.7	15.4 = v. 166	2.46 %	26.2	11.9	47 %	WSW	12	1	3	
	h 2.08′	h 2.23′	—	22.4 = v. 198.9	22.1 = v. 197.7	0.045 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
8./VII. 1902	h 1.20′	h 1.35′	+	22.8 = v. 200.5	15.4 = v. 166	2.51 %								
	h 1.42′	h 1.57′	—	23.2 = v. 202.1	17.0 = v. 174	1.98 %	27.2	11.6	43 %	SW	4	1	3	
	h 2.05′	h 2.20′	—	21.0 = v. 193.3	20.8 = v. 192.5	0.022 %								
9./VII. 1902	h 1.0′	h 1.15′	+	23.1 = v. 201.7	16.0 = v. 169	2.35 %								
	h 1.22′	h 1.37′	—	23.3 = v. 202.5	15.6 = v. 167	2.57 %	27.9	9.0	33 %	SW	6	1	4	
	h 1.43′	h 1.58′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.027 %								
10./VII. 1902	h 1.46′	h 2.01′	+	22.5 = v. 199.3	15.0 = v. 164.0	2 60 %								
	h 2.07′	h 2.22′	—	23.8 = v. 204.5	15.5 = v. 166.5	2.75 %	26.8	18.1	69 %	WSW	6.5	0	4	
	h 2.28′	h 2.43′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.027 %								
11./VII. 1902	h 1.38′	h 1.53′	+	22.4 = v. 198.9	13.0 = v. 154	3.41 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	22.0 = v. 197 3	10 8 = v. 141.8	4.41 %	27.3	17.3	64 %	SSW	12.5	6	4	
	h 2.21′	h 2.36′	—	22.4 = v. 198.9	22.2 = v. 198.1	0.033 %								
12./VII. 1902.														Sehr windig.
13./VII. 1902	h 1.33′	h 1.48′	+	22.9 = v. 200.9	12.0 = v. 149	3.96 %								
	h 1.55′	h 2.10′	—	22.8 = v. 200.5	13.0 = v. 154	3.51 %	26.4	10.1	40 %	WSW	7	1	5	
	h 2.17′	h 2.32′	—	21.2 = v. 194.1	21.0 = v. 193.3	0.020 %								
14./VII. 1902	h 1.15′	h 1.30′	+	22.4 = v. 198.9	10.7 = v. 141.2	4.59 %								
	h 1.36′	h 1.51′	—	23.0 = v. 201.3	12.0 = v. 151	4.01 %	26.8	11.8	45 %	W	10	1	5	
	h 1.58′	h 2.13′	—	23.0 = v. 201.3	22.9 = v. 200.9	0.024 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^o	V'	$\frac{200(\log V^o - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
15./VII. 1902	h 1.27′	h 1.42′	+	22.0 = v. 191.3	14.0 = v. 159	2.88 %								
	h 1.49′	h 2.04′	—	22.1 = v. 197.7	14.0 = v. 159	2.90 %	26.5	13.1	50 %	W	15	0	5	
	h 2.10′	h 2.25′	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.028 %								
16./VII. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.3 = v. 198.5	11.5 = v. 146.2	4.06 %								
	h 1.57′	h 2.12′	—	21.9 = v. 196.9	10.4 = v. 139.3	4.60 %	26.1	11.1	44 %	NW	5.5	1	5	
	h 2.18′	h 2.33′	—	21.0 = v. 193.3	20.9 = v. 192.9	0.011 %								
17./VII. 1902	h 1.12′	h 1.27′	+	23.0 = v. 201.3	16.0 = v. 169	2.33 %								
	h 1.33′	h 1.48′	–	22.7 = v. 200.1	15.0 = v. 164	2.64 %	26.4	18.2	70 %	S	19	4	5	
	h 1.55′	h 2.10′	—	22.8 = v. 200.5	22.7 = v. 200.1	0.016 %								
18./VII. 1902	h 1.23′	h 1.38′	+	23.8 = v. 204.5	15.0 = v. 164	2.95 %								
	h 1.44′	h 1.59′	—	23.3 = v. 202.5	14.8 = v. 163	2.89 %	26.1	17.9	71 %	NW	6	3	3	
	h 2.06′	h 2.21′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								
19./VII. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	23.3 = v. 202.5	15.0 = v. 164	2.81 %								
	h 2.01′	h 2.16′	—	23.8 = v. 204.5	15.0 = v. 164	2.95 %	25.6	14.0	57 %	WSW	6	1	4	
	h 2.22′	h 2.37′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								
20./VII. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.8 = v. 200.5	13.3 = v. 155.5	3.38 %								
	h 1.52′	h 2.07′	—	23.2 = v. 202.1	15.4 = v. 166	2.61 %	25.8	10.8	44 %	SSE	12	1	5	
	h 2.14′	h 2.29′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
21./VII. 1902	h 1.20′	h 1.35′	+	22.8 = v. 200.5	13.9 = v. 158.5	3.13 %								
	h 1.41′	h 1.56′	−	22.9 = v. 200.9	13.5 = v. 156.5	3.30 %	26.4	9.2	36 %	WNW	3	2	4	
	h 2.03′	h 2.18′	−	22.5 = v. 199.3	22.3 = v. 198.5	0.028 %								
22./VII. 1902	h 1.10′	h 1.25′	+	23 2 = v. 202.1	15.1 = v. 164.5	2.73 %								
	h 1.32′	h 1.47′	−	22.9 = v. 200.9	14.1 = v. 159.5	3.05 %	26.2	16.4	65 %	WNW	8	3	4	
	h 1.53′	h 2.08′	−	23.4 = v. 202.9	23.2 = v. 202.1	0.032 %								
23./VII. 1902	h 1.38′	h 1.53′	+	23.1 = v. 201.7	14.0 = v. 159	3.16 %								
	h 1.59′	h 2.14′	−	22.5 = v. 199.3	14.1 = v. 159.5	2.97 %	24.8	14.8	63 %	SW	5	0	4	
	h 2.21′	h 2.36′	−	21.2 = v. 194.1	21.0 = v. 193.3	0.020 %								
24./VII. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	21.8 = v. 196.5	14.0 = v. 159	2.82 %								
	h 1.57′	h 2.12′	−	21.8 = v. 196.5	13.2 = v. 155	3.16 %	25.8	11.9	48 %	SW	7	1	5	
	h 2.18′	h 2.33′	−	22.0 = v. 197.3	21.9 = v. 196 9	0.011 %								
25./VII. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	21.5 = v. 195.3	9.0 = v. 133.8	5.00 %								
	h 1.52′	h 2.07′	−	22.5 = v. 199.3	9.4 = v. 135.3	5.16 %	26.0	12.7	50 %	W	16	0	5	
	h 2.13′	h 2.28′	−	22.6 = v. 199.7	22.3 = v. 198.5	0.039 %								
26./VII. 1902	h 1.45′	h 2.0′	+	23.8 = v. 204.5	16.0 = v. 169	2.55 %								
	h 2.07′	h 2.22′	−	23.2 = v. 202.1	15.9 = v. 168.5	2.41 %	27.2	14.4	54 %	WSW	11.5	1	5	
	h 2.28′	h 2.43′	−	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkung
27./VII. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	23.7 = v. 204.1	17.0 = v. 174	2.14 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	23.6 = v. 203.7	15.0 = v. 164	2.90 %	28.8	12.7	43 %	W	5.5	0	4	
	h 2.43′	h 2.58′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.020 %								
28./VII. 1902	h 1.15′	h 1.30′	+	22.1 = v. 197.7	13.8 = v. 158	2.98 %								
	h 1.37′	h 1.52′	—	23.0 = v. 201.3	14.0 = v. 159	3.14 %	29.1	14.1	47 %	SW	10	1	4	
	h 1.58′	h 2.13′	—	22.0 = v. 197.3	21.9 = v. 196.9	0.011 %								
29./VII. 1902	h 1.20′	h 1.35′	+	23.6 = v. 203.7	15.5 = v. 166.5	2.74 %								
	h 1.42′	h 2.57′	—	23.9 = v. 204.9	16.3 = v. 170.5	2.45 %	28.4	19.1	66 %	SW	7.5	0	3	
	h 2.04′	h 2.19′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								
30./VII. 1902	h 12.32′	h 12.47′	+	23.0 = v. 201.3	12.2 = v. 150	3.92 %								
	h 12.53′	h 1.08′	—	23.9 = v. 204.9	14.0 = v. 159	3.38 %	27.2	9.6	35 %	NNE	7.5	1	3	
	h 1.15′	h 1.30′	—	22.5 = v. 199.3	22.3 = v. 198.5	0.028 %								
31./VII. 1902	h 1.05′	h 1.20′	+	23.0 = v. 201.3	12.5 = v. 151.5	3.79 %								
	h 1.26′	h 1.41′	—	23.1 = v. 201.7	13.8 = v. 158	3.25 %	26.6	15.8	60 %	SW	9	0	4	
	h 1.48′	h 2.03′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.020 %								

August 1902.

1./VIII. 1902	h 12.25′	h 12.40′	+	23.9 = v. 204.9	13.2 = v. 155	3.72 %								
	h 12.46′	h 1.01′	—	24.0 = v. 205.3	14.6 = v. 162	3.17 %	25.2	16.8	69 %	S	2	0	5	
	h 1.07′	h 1.22′	—	23.4 = v. 202.9	23.2 = v. 202.1	0.032 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
2./VIII. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	23.6 = v. 203.7	13.0 = v. 154	3.74 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	23.0 = v. 201.3	12.8 = v. 153	3.52 %	26.8	15.2	58 %	N	1	0	5	
	h 2.13′	h 2.28′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.027 %								
3./VIII. 1902	h 12.20′	h 12.35′	+	22.7 = v. 200.1	14.5 = v. 161.5	3.26 %								
	h 12.42′	h 12.57′	—	23.0 = v. 201.3	13.2 = v. 155	3.48 %	27.2	14.7	55 %	SE	12	1	4	
	h 2.03′	h 2.18′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.028 %								
4./VIII. 1902	h 1.10′	h 1.25′	+	23.5 = v. 203.3	15.1 = v. 164.5	2.83 %								
	h 1.31′	h 1.46′	—	22.5 = v. 199.3	13.8 = v. 158	3.09 %	26.2	15	59 %	NW	15	1	2	
	h 1.53′	h 2.08′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								
5./VIII. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	23.9 = v. 204.9	16.9 = v. 173.5	2.22 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	24.0 = v. 205.3	17.0 = v. 174	2.21 %	25.8	14.8	59 %	NW	5	1	2	
	h 2.18′	h 2.33′	—	23.2 = v. 202.1	23.0 = v. 201.3	0.022 %								
6./VIII. 1902	h 1.32′	h 1.47′	+	23.9 = v. 204.9	15.5 = v. 166.5	2.77 %								
	h 1.53′	h 2.08′	—	24.2 = v. 206.3	17.2 = v. 175	2.22 %	26.4	17.0	66 %	NW	4.5	1	2	
	h 2.14′	h 2.29′	—	23.2 = v. 202.1	23.0 = v. 201.3	0.022 %								
7./VIII. 1902	h 1.34′	h 1.49′	+	23.0 = v. 201.3	16.5 = v. 171.5	2.13 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.6 = v. 199.7	16.7 = v. 172.5	1.95 %	27.1	15.7	59 %	NW	3	1	3	
	h 2.18′	h 2.33′	—	22.4 = v. 198.9	22.3 = v. 198.5	0.016 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
8./VIII. 1902	h 12.17′	h 12.32′	+	25.0 = v. 210.3	16.0 = v. 169	2.89 %								
	h 12.39′	h 12.54′	—	23.5 = v. 203.3	14.6 = v. 162	3.04 %	25.8	18.8	76 %	SE	5	1	3	
	h 1.0′	h 1.15′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								
9./VIII. 1902	h 1.33′	h 1.48′	+	22.2 = v. 198.1	10.2 = v. 138.5	4.76 %								
	h 1.54′	h 2.09′	—	22.2 = v. 198.1	9.2 = v. 134.5	5.14 %	28.7	9.9	34 %	SE	15	4	5	
	h 2.15′	h 2.30′	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.028 %								
10./VIII. 1902	h 1.05′	h 1.20′	+	24.0 = v. 205.3	15.8 = v. 168	2.68 %								
	h 1.26′	h 1.41′	—	23.5 = v. 203.3	15.3 = v. 165.5	2.75 %	25.4	16.8	69 %	WNW	12	2	2	
	h 1.48′	h 2.03′	—	23.7 = v. 204.1	23.5 = v. 203.3	0.027 %								
11./VIII. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	23.6 = v. 203.7	15.1 = v. 164.5	2.86 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	23.7 = v. 204.1	16.0 = v. 169	2.53 %	27.4	16.1	59 %	W	6	3	3	
	h 2.13′	h 2.28′	—	23.2 = v. 202.1	23.0 = v. 201.3	0.022 %								
12./VIII. 1902.														Sehr windig.
13./VIII. 1902	h 12.27′	h 12.42′	+	23.0 = v. 201.3	13.0 = v. 154	3.57 %								
	h 12.48′	h 1.03′	—	23.4 = v. 202.9	13.3 = v. 155.5	3.55 %	22.7	8.9	44 %	WNW	15	0	5	
	h 1.09′	h 1.24′	—	23.0 = v. 201.3	22.7 = v. 200.1	0.044 %								
14./VIII. 1902	h 12.35′	h 12.50′	+	23.6 = v. 203.7	16.1 = v. 169.5	2.46 %								
	h 12.56′	h 1.11′	—	23.9 = v. 204.9	15.5 = v. 166.5	2.77 %	24.0	11.7	53 %	NW	5	6	4	
	h 1.17′	h 1.32′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	Beobachtet bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
15./VIII. 1902	h 12.0′	h 12.15′	+	23.3 = v. 202.5	14.0 = v. 159	3.22 %								
	h 12.21′	h 12.36′	—	22 5 = v. 199.3	12.6 = v. 152	3.61 %	22.4	12.3	62 %	WNW	4	3	5	
	h 12.43′	h 12.58′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.022 %								
16./VIII. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	24.0 = v. 205.3	15.8 = v. 168	2.68 %								
	h 1.47′	h 2.02′	—	23.8 = v. 204.5	15.5 = v. 166.5	2.75 %	25.0	14.1	60 %	NNW	6	1	4	
	h 2.08′	h 2.23′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.020 %								
17./VIII. 1902	h 1.28′	h 1.43′	+	23.5 = v. 203.3	15.4 = v. 176	2.70 %								
	h 1.49′	h 2.04′	—	23.2 = v. 202.1	14.4 = v. 161	2.32 %	26.2	11.9	47 %	NW	3	1	5	
	h 2.10′	h 2.25′	—	21.2 = v. 194.1	21.0 = v. 193.3	0.020 %								
18./VIII. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	23.6 = v. 203.7	15.2 = v. 165	2.82 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	23.4 = v. 202.9	15.5 = v. 166.5	2.64 %	26.4	17.3	67 %	W	2	0	5	
	h 2.17′	h 2.32′	—	22.8 = v. 200.5	22 6 = v. 199.7	0.027 %								
19./VIII. 1902	h 1.22′	h 1.37′	+	22.0 = v. 197.3	16.1 = v. 169.5	2.02 %								
	h 1.44′	h 1.59′	—	22.2 = v. 198.1	16.2 = v. 170	2.03 %	26.3	17.2	77 %	NW	5	1	3	
	h 2.05′	h 2.20′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 196.1	0.034 %								
20./VIII. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	23.2 = v. 202.1	14.9 = v. 163.5	2.81 %								
	h 1.57′	h 2.12′	—	23.1 = v. 201.7	14.1 = v. 159.5	3.12 %	28.0	15.3	55 %	NW	1	0	3	
	h 2.18′	h 2.33′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.027 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
21./VIII. 1902	h 1.03′	h 1.18′	+	23.0 = v. 201.3	15.3 = v. 165.5	2.61 %								
	h 1.24′	h 1.39′	−	22.0 = v. 197.3	14.8 = v. 163	2.54 %	27.4	18.2	67 %	WNW	4	2	4	
	h 1.45′	h 2.0′	−	22.2 = v. 198.1	22.1 = v. 197.7	0.012 %								
22./VIII. 1902	h 1.07′	h 1.22′	+	23.2 = v. 201.3	16.0 = v. 160	2.37 %								
	h 1.28′	h 1.43′	−	23.6 = v. 203.7	17.0 = v. 174	2.12 %	26.8	17.0	65 %	WNW	8	1	4	
	h 1.50′	h 2.05′	−	23.1 = v 201.7	22.9 = v. 200.9	0.035 %								
23./VIII. 1902	h 1.37′	h 1.52′	+	23.5 = v. 203.3	15.2 = v. 165	2.79 %								
	h 1.59′	h 2.14′	−	23 4 = v. 202.9	15.6 = v. 167	2.60 %	24.8	7.8	34 %	NW	7	1	2	
	h 2.21′	h 2.36′	−	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.022 %								
25./VIII. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	23.4 = v. 202.9	15.0 = v. 164	2.84 %								
	h 2 02′	h 2.17′	−	22.2 = v. 198.1	14.0 = v. 159	2.92 %	26.0	13.4	54 %	SSW	7	1	2	
	h 2 23′	h 2.38′	-	22.1 = v. 197.7	21.8 = v. 196.5	0.038 %								
26./VIII. 1902	h 1.20′	h 1 35′	+	22.0 = v. 197.3	15.0 = v. 164	2.46 %								
	h 1.41′	h 1.56′	−	22.1 = v. 197.7	14 9 = v. 163.5	2.52 %	25.4	12.8	48 %	SE	1	0	5	
	h 2.02′	h 2.17′	−	23.6 = v. 203.7	23.4 = v. 202.9	0.032 %								
27./VIII. 1902	h 1.0′	h 1.15′	+	22.3 = v. 198.5	12.4 = v. 151	3.64 %								
	h 1.22′	h 1.37′	−	22.6 = v. 199.7	13.6 = v. 157	3.21 %	26.4	10.9	42 %	SE	5	7	5	
	h 1.43′	h 1.58′	−	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
28./VIII. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	22.2 = v. 198.1	14.8 = v. 163	2.59 %								
	h 1.52′	h 2.07′	—	22.3 = v. 198.5	14.4 = v. 161	2.79 %	27.0	14	53 %	O	0	1	4	
	h 2.13′	h 2.28′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								
29./VIII. 1902	h 1.15′	h 1.30′	+	23.0 = v. 201.3	12.4 = v. 151	3.83 %								
	h 1.37′	h 1.52′	—	22.4 = v. 198.9	12.0 = v. 149	3.85 %	30.3	9.9	30 %	ESE	4	1	5	
	h 1.58′	h 2.13′	—	22 4 = v. 198.9	22.2 = v. 198.1	0.033 %								
30./VIII. 1902	h 1.07′	h 1.22′	+	23.9 = v. 204.9	15.1 = v. 164.5	2.37 %								
	h 1.28′	h 1.43′	—	22.6 = v. 199.7	15.0 = v. 164	2.12 %	26.8	17	65 %	WNW	8	1	5	
	h 1.50′	h 2.05′	—	23.1 = v. 201.7	22.9 = v. 200.9	0.035 %								
31./VIII. 1902	h 12.25′	h 12.40′	+	23.0 = v. 201.3	17.0 = v. 174	1.93 %								
	h 12.47′	h 1.02′	—	22 9 = v. 200.9	16.2 = v. 170	2.20 %	31.3	10.3	29 %	SE	2	0	3	
	h 1.08′	h 1.23′	—	22.3 = v. 198.5	22.2 = v. 198.1	0.016 %								

September 1902.

1./IX. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.8 = v. 200.5	14.1 = v. 159.5	3.04 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.2 = v. 198.1	13.6 = v. 157	3.09 %	29.6	11.6	36 %	SSE	5	0	3	
	h 2.17′	h 2.32′	—	22.1 = v. 197.7	21.9 = v. 196.9	0.022 %								
2./IX. 1902	h 1.47′	h 2.02′	+	22.0 = v. 197.3	14.8 = v. 163	2.54 %								
	h 2.08′	h 2.23′	—	22.2 = v. 198.1	15.1 = v. 164.5	2.47 %	28.2	15.5	54 %	SE	4	0	4	
	h 2.29′	h 2.44′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 196.1	0.034 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^o	V'	$\frac{200(\log V^o - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
3./IX. 1902	h 12.48′	h 1.03′	+	23.0 = v. 201.3	14.6 = v. 162	2.89 %								
	h 1.10′	h 1.25′	—	23.8 = v. 204.5	14.3 = v. 160.5	3.24 %	27.2	14.7	55 %	NW	3	0	5	
	h 1.31′	h 1.46′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.027 %								
4./IX. 1902	h 1.30′	h 1.45′	+	23.1 = v. 201.7	15.7 = v. 167.5	2.46 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	24.1 = v. 205.8	17.4 = v. 176	2.09 %	28.0	15.3	55 %	WSW	8	0	4	
	h 2.13′	h 2.38′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								
5./IX. 1902	h 1.33′	h 1.50′	+	22.0 = v. 197.3	13.0 = v. 154	3.28 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.2 = v. 198.1	14.8 = v. 163	2.80 %	28.5	11.4	39 %	SW	7	0	5	
	h 2.17′	h 2.32′	—	22.0 = v. 197.3	21.7 = v. 196.1	0.026 %								
6./IX. 1902	h 12.58′	h 1.13′	+	23.8 = v. 204.5	14.2 = v. 160	3.28 %								
	h 1.19′	h 1.34′	—	24.0 = v. 205.3	15.5 = v. 166.5	2.80 %	28.4	11.3	39 %	SW	3	0	4	
	h 1.40′	h 1.55′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.026 %								
7./IX. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	21.8 = v. 196.5	13.2 = v. 155	3.16 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	22.5 = v. 199.8	14.4 = v. 161	2.84 %	25.6	15.0	61 %	WSW	9	0	4	
	h 2.43′	h 2.58′	—	21.0 = v. 193.3	20.7 = v. 192.1	0.040 %								
8./IX. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	22.1 = v. 197.7	13.6 = v. 157	3.06 %								
	h 1.46′	h 2.01′	—	21.6 = v. 195.7	12.9 = v. 153.5	3.22 %	25.7	14.0	57 %	SW	5	0	5	
	h 2.07′	h 2.22′	—	21.8 = v. 196.5	21.6 = v. 195.7	0.020 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
9./IX. 1902	h 1.55′	h 2.10′	+	23.0 = v. 201.3	15.9 = v. 168.5	2.37 %								
	h 2.16′	h 2.31′	—	23.2 = v. 202.1	15.8 = v. 168	2.45 %	26.8	14.0	53 %	SW	2	0	4	
	h 2.37′	h 2.52′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.022 %								
10./IX. 1902	h 1.28′	h 1.43′	+	22.2 = v. 198.1	15.0 = v. 164	2.51 %								
	h 1.49′	h 2.05′	—	23.4 = v. 202.9	15.9 = v. 168.5	2.48 %	26.8	16.0	61 %	SW	1	0	3	
	h 2.12′	h 2.27′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								
11./IX. 1902	h 1.08′	h 1.23′	+	21.8 = v. 196.5	12.9 = v. 153.5	3.29 %								
	h 1.29′	h 1.44′	—	22.8 = v. 200.5	14.3 = v. 160.5	2.90 %	26.7	13.5	52 %	SE	3	0	5	
	h 1.50′	h 2.05′	—	22.8 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.028 %								
12./IX. 1902	h 1.33′	h 1.48′	+	21.8 = v. 196.5	12.5 = v. 151.5	3.46 %								
	h 1.54′	h 2.09′	—	22.0 = v. 197.3	12.6 = v. 152	3.48 %	27.0	15.8	59 %	SW	5.5	0	4	
	h 2.15′	h 2.30′	—	21.8 = v. 196.5	21.6 = v. 195.7	0.034 %								
13.—14./IX. 1902.														Sehr windig.
15./IX. 1902	h 1.0′	h 1.15′	+	23.1 = v. 201.7	16.0 = v. 169	2.35 %								
	h 1.21′	h 1.36′	—	22.9 = v. 200.9	17.1 = v. 174.5	1.85 %	24.8	12.2	52 %	NW	5	3	4	
	h 1.42′	h 1.57′	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.028 %								
16./IX. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	22.3 = v. 198.5	12.8 = v. 153	3.47 %								
	h 2.22′	h 2.37′	—	22.0 = v. 197.3	14.0 = v. 159	2.88 %	22.8	12.3	60 %	NW	4	0	5	
	h 2.42′	h 2.57′	—	22.0 = v. 197.3	21.7 = v. 196.1	0.045 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
17./IX. 1902	h 2.0′	h 2.15′	+	21.0 = v. 193.5	12.5 = v. 151.5	3.33 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	21.4 = v. 194.9	13.0 = v. 154	3.11 %	22.0	12.2	63 %	NW	3	0	5	
	h 2.43′	h 2.58′	—	21.2 = v. 194.1	20.9 = v. 192.9	0.032 %								
18./IX. 1902	h 1.38′	h 1.53′	+	23.8 = v. 204.5	16.2 = v. 170	2.55 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	23.0 = v. 201.3	14.9 = v. 163.5	2.77 %	23.4	14.0	65 %	NW	6	1	3	
	h 2.21′	h 2.36′	—	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.022 %								
19./IX. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.0 = v. 197.3	15.8 = v. 168	2.14 %								
	h 1.57′	h 2.12′	—	22.2 = v. 198.1	16.0 = v. 169	2.11 %	23.6	12.9	60 %	S	2.5	0	3	
	h 2.19′	h 2.34′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 196.1	0.034 %								
20./IX. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	22 0 = v. 197.3	14.2 = v. 159.5	2.66 %								
	h 2.02′	h 2 17′	—	22.2 = v. 198.1	13.8 = v. 158	3.00 %	23.8	10.8	49 %	NW	1	0	4	
	h 2.25′	h 2.38′	—	21.8 = v. 196.5	21.6 = v. 195.7	0.034 %								
21./IX. 1902	h 1.18′	h 1.33′	+	22.0 = v. 197.3	14.2 = v. 160	2.79 %								
	h 1.40′	h 1.55′	—	21.8 = v. 196.5	13.5 = v. 156.5	3.03 %	22.4	9.1	45 %	NW	4	0	5	
	h 2.02′	h 2.17′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 196.1	0.033 %								
22./IX. 1902	h 1.37′	h 1.52′	+	22.2 = v. 198.1	16.9 = v. 178.5	1.78 %								
	h 1.58′	h 2.13′	—	22.7 = v. 200.1	16.1 = v. 169.5	2.20 %	23.2	11.1	53 %	NE	2	1	3	
	h 2.19′	h 2.34′	—	22.5 = v. 199.3	22.3 = v. 198.5	0.028 %								

Digitized by Google

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
23./IX. 1902	h 2.03′	h 2.18′	+	22.0 = v. 197.3	12.1 = v. 149.5	3.70 %								
	h 2.24′	h 2.39′	—	22.1 = v. 197.7	13.2 = v. 155	3.24 %	22.7	8.7	42 %	W	2	0	4	
	h 2.45′	h 3.0′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 196.1	0.034 %								
24./IX. 1902	h 1.38′	h 1.53′	+	22.8 = v. 200.5	12.5 = v. 151.5	3.66 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	22.1 = v. 197.7	12.8 = v. 153	3.38 %	20.4	7.5	42 %	N	4.5	0	5	
	h 2.20′	h 2.35′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.022 %								
25./IX. 1902	h 1.28′	h 1.48′	+	22.0 = v. 197.3	12.2 = v. 150	3.65 %								
	h 1.49′	h 2.04′	—	22.0 = v. 197.3	12.1 = v. 149.5	3.70 %	21.8	8.6	44 %	NE	4.5	8	4	
	h 2.10′	h 2.25′	—	24.0 = v. 205.3	23.9 = v. 204.9	0.016 %								
26./IX. 1902.														Heftiger Wind.
27./IX. 1902	h 1.10′	h 1.25′	+	23.2 = v. 202.1	16.1 = v. 169.5	2.33 %								
	h 1.32′	h 1.47′	—	23.0 = v. 201.3	16.8 = v. 173	2.02 %	21.2	8.0	47 %	SE	10	9	2	
	h 1.53′	h 2.08′	—	23.4 = v. 202.9	23.3 = v. 202.5	0.016 %								
28.—29./IX. 1902.														Sehr stürmisch.
30./IX. 1902	h 1.48′	h 2.08′	+	23.2 = v. 202.1	16.0 = v. 169	2.37 %								
	h 2.09′	h 2.24′	—	23.3 = v. 202.5	14.9 = v. 163.5	2.84 %	21.6	14.0	73 %	W	6	3	4	
	h 2.30′	h 2.45′	—	23.5 = v. 203.3	23.3 = v. 202.5	0.032 %								

Digitized by Google

Digitized by Google

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mittheilungen.

aus dem Jahre 1902.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1902.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhalt.

Bericht des abtretenden Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1901/1902 . . . . . S. 1
Bericht über die Preisaufgaben für 1903 und 1905 . . . . . „ 7
Bericht über die Mathematische Encyclopädie . . . . . „ 9
F. Klein, Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Fünfter Bericht . . . . . „ 10
Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden . „ 19
Bericht über den Thesaurus linguae latinae . . . . . „ 22
Verzeichnis der im Jahre 1901/1902 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mitteilungen . . . . . „ 24
Friedrich Leo, Zu Georg Kaibels Gedächtniß . . . . . „ 29
Hermann Wagner, Adolf Erik Nordenskiöld . . . . . „ 40
F. Frensdorf, Karl Hegel . . . . . „ 52
Adresse an Herrn Eduard Süß in Wien . . . . . „ 72
Adresse an Herrn Richard Dedekind in Braunschweig . . . . . „ 75
Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1902 . . . . . „ 77
Benekesche Preisstiftung . . . . . „ 87
Verzeichnis der im Jahre 1902 eingegangenen Druckschriften . . . . . „ 89
Berichtigungen . . . . . „ 124
Bericht über die öffentliche Sitzung am 15. November 1902 . . . . . „ 125
Bericht über die Wedekindstiftung . . . . . „ 126
Adresse der Kgl. Gesellschaft an die Universität Oxford . . . . . „ 184

Digitized by Google

Digitized by Google

Bericht des abtretenden Sekretärs der Gesellschaft über das Jahr 1901/1902.

Das abgelaufene Jahr ist durch die Feier des 150jährigen Bestehens der K. Gesellschaft der Wissenschaften am 8. und 9. November ausgezeichnet gewesen. Darüber ist ein besonderer Bericht bereits erstattet. (Geschäftliche Mittheilungen 1901, H. 2.)

Durch allerhöchsten Erlaß vom 27. Juni 1901 wurde in jeder Klasse der K. Gesellschaft die Zahl der Stellen für korrespondirende Mitglieder auf 100 erhöht, und durch gleichen Erlaß vom 25. Januar 1902 die Zahl der Stellen für auswärtige Mitglieder auf 30. Von diesen sind je fünf Stellen vorzugsweise mit Gelehrten aus dem niederdeutschen Sprachgebiet zu besetzen. Ferner wurde gleichzeitig den auswärtigen Mitgliedern das Stimmrecht ertheilt.

Die Gesellschaft hat in diesem Jahre 2 öffentliche, 15 ordentliche und 4 außerordentliche Sitzungen abgehalten. Die von ihr für besondere Angelegenheiten bestellten Commissionen traten in 18 Sitzungen zusammen.

Am 14. Mai 1901 hatte die K. Gesellschaft die Ehre, Se. Excellenz den Herrn Staatsminister Dr. Studt in ihrem Kreise zu begrüßen.

Von den Nachrichten der K. Gesellschaften sind die der mathematisch-physikalischen Klasse mit 3 Heften (1901) und 1 Heft (1902), die der philologisch-historischen Klasse mit 4 Heften (1901) und 1 Heft (1902) erschienen; ferner die geschäftlichen Mittheilungen mit 2 Heften.

Von den Abhandlungen der philologisch-historischen Klasse erschienen

Bd. III. Nr. 2. J. Marquart, Ērānšahr.

Bd. IV. Nr. 4. A. Rahlfs, Die berliner Handschrift der sahidischen Psalmenübersetzung.

Digitized by Google

Nr. 5. W. Meyer, Ueber den Gelegenheitsdichter Venantius Fortunatus.

Nr. 6. H. Lüders, Ueber die Grantharecension des Mahâbhârata.

Bd. V. Nr. 1. G. Röthe, Brentanos Ponce de Leon.

Nr. 2. J. Wellhausen, Die religiös-politischen Oppositionsparteien im alten Islam.

Die Göttingischen Gelehrten Anzeigen haben den gewohnten Fortgang genommen. Herr Professor Wentzel legte die Redaktion der Anzeigen am 31. December 1901 nieder, da er zu Ostern 1902 einen Ruf nach Marburg angenommen hatte. Für ihn wählte die K. Gesellschaft Herrn Dr. Rudolf Meißner, die Wahl wurde am 27. December 1901 vom vorgesetzten Herrn Minister bestätigt. — Zunächst führte Herr Professor Wentzel die Redaktion in Vertretung weiter.

Aus Anlaß des Jubiläums veröffentlichte die K. Gesellschaft Festschriften, und zwar zwei Bände Abhandlungen und einen Band Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingen.

Zu gleicher Zeit gelangte der im Auftrage der Gesellschaft von Herrn O. Wallach unter Mitwirkung von Herrn Dr. von Braun herausgegebene Briefwechsel von Berzelius und Wöhler zur Ausgabe. (2 Bd. Leipzig, W. Engelmann.)

Die der K. Gesellschaft im Schriftenaustausch und anderweitig zugegangenen Druckschriften sind der K. Universitäts-Bibliothek überwiesen. Ihre Zusammenstellung ist weiterhin abgedruckt. Sie dient als eine Empfangsbescheinigung, wo eine solche nicht auf besonderen Wunsch sofort nach dem Empfang einer Druckschrift gegeben wurde.

In der öffentlichen Sitzung am 27. April 1901 sprach Herr Kielhorn zum Gedächtniß von Max Müller (abgedruckt Geschäftl. Mittheilungen 1901. H. 1. p. 35) und Herr Klein zur Erinnerung an Charles Hermite. — Die am Anfang November abzuhaltende öffentliche Versammlung war mit der Jubiläumsfeier verbunden.

Die Gesellschaft bewilligte aus den ihr zur Verfügung stehenden Mitteln:

Herrn C. Dilthey für Herausgabe von Untersuchungen über altchristliche und mittelalterliche Elfenbeinschnitzwerke . . . . . M. 500.—

Herrn F. Kielhorn zur Vorbereitung einer Ausgabe des Mahâbhârata . . . . . „ 500.—

Digitized by Google

der Commission für die Herausgabe älterer Papsturkunden . . . . . M. 1200.—

Herrn H. Wagner für Herstellung eines Catalogs des in deutschen Bibliotheken enthaltenen älteren Kartenmaterials . . . . . „ 600.—

Herrn G. Röthe

a) für Inventarisirung niederdeutscher Handschriften . . . . . „ 1500.—

b) für die Ausgabe schönwissenschaftlicher Werke Kaestner's . . . . . „ 700.—

Herren F. Leo und G. Kaibel für Herausgabe antiker Scholien . . . . . „ 500.—

Herrn E. Riecke

a) für Untersuchungen über Luftelektricität . „ 900.—

b) für seismologische Untersuchungen . . . . „ 600.—

Herrn F. Klein für Reisen im Interesse der mathematischen Encyclopaedie . . . . . „ 100.85

Herrn F. Kielhorn als Beisteuer zu den Druckkosten von Aufrecht, Catalogus catalogorum, Bd. 3 „ 500.—

der Commission für die Samoa-Expedition zur Vornahme luftelektrischer Untersuchungen mit Drachen . „ 2000.—

Die Fortführung der Arbeiten für die Herausgabe älterer Papsturkunden wurde durch ein Geschenk von M. 15000, das aus Anlaß des bevorstehenden Jubiläums der Gesellschaft Se. Eminenz der Cardinal G. Kopp, Fürstbischof in Breslau, mit Zuschrift vom 26. Juli 1901 machte und dessen Annahme durch allerhöchsten Erlaß vom 23. December 1901 genehmigt wurde, gesichert, um so mehr, als Se. Excellenz der Herr Reichskanzler von Bülow mit Erlaß vom 7. November d. J. einen gleich hohen Betrag zu gleichem Zwecke der Gesellschaft überwies.

Ueber die Ergebnisse der Inventarisirung niederdeutscher Handschriften hat Herr Borchling einen Bericht erstattet, der als Beiheft zu den Nachrichten der philologisch-historischen Klasse erscheinen wird.

Der *Thesaurus linguae latinae* wird in der begonnenen Weise fortgeführt. Vom I. Bande ist der 56., vom II. der 35. Bogen ausgedruckt.

Digitized by Google

Der Bericht über die Oktober-Conferenz der Thesaurus-Commission wird unten abgedruckt werden.

Herr Dr. Rabe hat im Sommer und Herbst die Lukian-Handschriften in London, Paris und Rom theils neu verglichen, theils revidirt; er wird, um die Vorbereitungen für die Ausgabe der Scholien zu vollenden, noch eine Reise nach Paris und Italien unternehmen müssen.

Von der Ausgabe des Dioskorides wird demnächst der II. Band (Buch III. IV.) dem Drucke übergeben werden können. Vor der Drucklegung des I. und III. Bandes beabsichtigt Herr Dr. Wellmann die im Escorial befindliche Handschrift zu collationiren.

Herr Dr. Kuckuck auf Helgoland sendete einen Bericht über seine mit Unterstützung der Gesellschaft nach Tanger gemachte Reise ein. Die Ergebnisse der dort angestellten botanischen Untersuchungen werden an anderen Orten veröffentlicht.

Ueber andere von der K. Gesellschaft geförderte wissenschaftliche Unternehmungen werden weiterhin besondere Berichte erstattet.

Besondere Bewilligungen von 30000 M., die in zwei Jahresraten vom vorgesetzten Königlichen Ministerium und aus Reichsmitteln zur Verwendung gestellt wurden, setzten die Gesellschaft in den Stand, für erdmagnetische und seismische Beobachtungen, die mit den auf der Südpolarexpedition anzustellenden parallel gehen sollten, die Errichtung eines Observatoriums auf Samoa in Angriff zu nehmen. Die Gesellschaft stellte weitere 2000 M. bereit zur Beschaffung von Apparaten für die Vornahme luftelektrischer Untersuchungen mit Drachen. Für die Durchführung dieser Untersuchungen wurde Herr Dr. Tetens, bislang Assistent an der Sternwarte in Straßburg (Elsaß) gewonnen. Er ist mit der gesammten Ausrüstung auf dem Wege nach Samoa.

Zu der am 23. und 24. Mai 1901 in Leipzig zusammengetretenen Versammlung des Cartells hatte die K. Gesellschaft als ihre Vertreter die Herren Riecke und Kielhorn und als Sachverständigen für die seismologischen Untersuchungen Herrn Wiechert entsendet. Sie betheiligte sich damit an den geophysikalischen insbesondere luftelektrischen Untersuchungen, für die sie die Zuziehung der Herren Elster und Geitel in Wolfenbüttel und des Herrn Adolf Schmidt in Gotha als Sachverständige empfohlen

Digitized by Google

und erlangt hatte. Ebenso nahm sie an den Vorarbeiten zu einer Ausgabe des Mahâbhârata theil.

Auf der ersten Versammlung der internationalen Association der Akademien in Paris vom 16.—20. April 1901 war die K. Gesellschaft durch ihre Sekretäre und Herrn Riecke vertreten. Die Verhandlungen und Beschlüsse dieser Versammlung sind mittlerweile veröffentlicht in den Archives de l'Association internationale No. 3.

Zu Delegirten für das Comité der internationalen Association, dessen Leitung am 1. Januar 1902 die Royal Society of London übernommen hat, wählte die K. Gesellschaft ihre Sekretäre.

Der Universität Glasgow überbrachte zum Jubilaeum am 12.—14. Juni 1901 Herr Kielhorn die Glückwünsche der K. Gesellschaft.

An die naturforschende Gesellschaft in Nürnberg, die am 26. u. 27. October 1901 ihr 100jähriges Bestehen, und an die Société nationale des sciences naturelles et mathématiques in Cherbourg, die am 30. December 1901 das 50jährige Jubiläum feierte, richtete die Gesellschaft Glückwunschschreiben.

Dem Owen College in Manchester überbrachte zum 50jährigen Jubilaeum am 14. März 1902 Herr W. Voigt als Vertreter der K. Gesellschaft deren Glückwünsche.

Am 20. August 1901 sandte die K. Gesellschaft Herrn E. Sueß in Wien zum 70. Geburtstage, und am 12. Januar 1902 Herrn W. Hittorf in Münster zum 50jährigen Doctor-Jubilaeum ihre Glückwünsche, und richtete zu dem 18. März 1902 zu feiernden Doctor-Jubiläum ein Glückwunschschreiben an Herrn Richard Dedekind in Braunschweig.

Durch Tod verlor die Gesellschaft ihre ordentlichen Mitglieder

der mathematisch-physikalischen Klasse

Wilhelm Schur am 1. Juli 1901, ordentliches Mitglied seit 1893;

der philosophisch-historischen Klasse

Georg Kaibel, am 12. October 1901, ordentliches Mitglied seit 1897;

ihr Ehrenmitglied

Adolf Frhr. von Nordenskjöld zu Stockholm, am 12. August 1901, Correspondent seit 1871, Ehrenmitglied seit 1879;

Digitized by Google

das auswärtige Mitglied in der philol.-histor. Klasse
Carl Hegel in Erlangen, am 12. December 1901, Correspondent seit 1857, auswärtiges Mitglied seit 1871;

das corrrespondirende Mitglied der mathem.-physikal. Klasse
Henry A. Rowland in Baltimore, am 16. April 1901, Correspondent seit 1892.

Seinen Austritt aus der Gesellschaft zeigte am 24. Februar 1902 Herr Max Lehmann an, seit 1893 ordentliches Mitglied der Gesellschaft.

Die im Anschluß an die Jubilaeumsfeier vollzogenen Wahlen von Ehrenmitgliedern, auswärtigen und correspondirenden Mitgliedern sind in den Geschäftlichen Nachrichten 1901 Heft 2 veröffentlicht.

Seitdem wählte, am 24. Februar 1902, die Gesellschaft zum Ehrenmitgliede

S. Eminenz den Cardinal Georg Kopp, Fürstbischof zu Breslau.

Die Wahl ist durch allerhöchsten Erlaß vom 13. März 1902 bestätigt.

Bei der Lagarde-Stiftung ist, nachdem die bisherige Bewohnerin Frau de Lagarde Göttingen und das Haus verlassen hat, dieses vermiethet, der obere Stock für das philologische Seminar an das Königliche Universitäts-Curatorium, das Erdgeschoß an einen Privatmann. Das Haus wurde an das städtische Elektricitätswerk angeschlossen.

Die Stiftung der Freunde Lagardes erhielt wiederum einen namhaften Betrag als Geschenk.

Digitized by Google

Bericht
über die ausgesetzten Preisaufgaben.

Für die auf das Jahr 1901 gestellte Preisaufgabe war deren Bearbeiter, Herrn Dr. Philipp Furtwängler in Potsdam, der volle Preis zuerkannt. (Geschäftliche Mittheilungen 1901 H. 1.)

Die Preisaufgabe für das Jahr 1903 lautet:

Durch die Arbeiten des letzten Jahrzehntes, neuerdings vornehmlich aus Anlaß der vorgefundenen Papyrustexte poetischen und theoretischen Inhaltes, ist die metrische Forschung in eine neue Bewegung geraten. Es scheint an der Zeit, die Grundlage der lyrischen Metrik einer durchgehenden Prüfung zu unterziehen. Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften wünscht eine auf Beobachtung der überlieferten Texte gegründete, auf die Erkenntnis des historischen Zusammenhanges gerichtete Untersuchung der wichtigsten im lesbischen und jonischen Liede, der chorischen Lyrik, den lyrischen Teilen des Dramas angewendeten metrischen Formen unter Berücksichtigung der hellenistischen und der älteren römischen Poesie.

Für das Jahr 1905 stellt die Königliche Gesellschaft folgende Preisaufgabe:

Gegenüber den ausgedehnten Kenntnissen, über die die pathologische Anatomie der Wirbelthiere verfügt, ist die Erfahrung über krankhafte Zustände der Organe und Gewebe bei Wirbellosen gering. Die K. Gesellschaft der Wissenschaften wünscht zu Untersuchungen anzuregen, mit denen hier die wissenschaftliche Erkenntnis gefördert wird. Sie stellt daher als Aufgabe, dass, ausser einer Berücksichtigung des in der Literatur vorhandenen Materiales, systematische Untersuchungen über krankhafte Zustände und Vor-

Digitized by Google

gänge an Organen und Geweben wirbelloser Metazoen gemacht und mitgetheilt werden.

Um die Aufgabe an Beispielen zu erläutern, so sind in Betracht zu ziehen: die Vorgänge der Degeneration und Regeneration nach Verwundungen sowohl bei der Autotomie, wie bei Verletzung durch Schnitt, Quetschung und andere Eingriffe, und die mit der senilen Degeneration verbundenen Vorgänge; die Veränderung der Organe und Gewebe unter parasitären Einflüssen, sei es von Mikroorganismen oder Pflanzen und Thieren, wie bei Muskardine, Faulbrut, Flatterie, parasitärer Castration u. a. Insbesondere ist darauf zu achten, ob krankhafte Neubildungen, die Geschwulstbildungen im Wirbelthierkörper entsprechen, zur Beobachtung kommen oder erzeugt werden können. Erwünscht ist es, dass bei experimentellen Untersuchungen dieser Art die verschiedenen großen Abtheilungen der wirbellosen Metazoen herangezogen werden.

Bei der großen Ausdehnung des Gebietes wird die Aufgabe auch dann als gelöst anzusehen sein, wenn die eingelieferte Arbeit Ergebnisse bringt, die auf eigenen Untersuchungen fußend die pathologische Anatomie in der bezeichneten Richtung erweitern und fördern.

Der Arbeit sind auf alle Fälle erläuternde Abbildungen und beweisende Präparate beizulegen. Es soll auch die Möglichkeit gegeben sein, das solche durch die Mittheilung einer anonymen Adresse nöthigenfalls vom Verfasser eingefordert werden können, ohne daß der Name des Bewerbers bekannt wird.

Die zur Bewerbung um den Preis bestimmten Arbeiten müssen vor dem 1. Februar 1905 an die königliche Gesellschaft der Wissenschaften eingeliefert werden, mit einem Spruch versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und Wohnort des Verfassers. Der Preis beträgt 1000 Mark.

Digitized by Google

Bericht über die Mathematische Encyclopädie.

Im Laufe des Berichtsjahres sind erschienen: das (sehr starke) sechste Heft des ersten Bandes und das erste Heft der zweiten Hälfte von Bd. II., ferner das erste Heft der ersten und das erste Heft der zweiten Hälfte von Bd. IV. Ende März fand, wie schon im Vorjahre, eine Zusammenkunft von Vertretern der beteiligten Akademien mit den Herausgebern der verschiedenen Bände in der Teubnerschen Officin in Leipzig statt; diese Zusammenkünfte haben sich sehr bewährt und sollen dementsprechend nach Möglichkeit regelmäßig wiederholt werden.

Digitized by Google

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

Fünfter Bericht.

Von

F. Klein.

An neuem Material ist uns im verflossenen Jahre zugegangen:

1) 10 Originalbriefe Gauß an Schumacher.
2) Manuskripte zu 2 Aufsätzen in den Astronomischen Nachrichten.

} Aus dem Nachlaß von Rich. Schumacher, Kiel.

3) 2 Copien von Briefen Gauß an den Prorector R. Wagner, geschenkt von Herrn Professor Stäckel.

4) Ein Originalbrief Gauß an ?, angekauft.

5) Ein Originalbrief Olbers an Heeren, betr. Vorschlag von Gauß für den Direktorposten der Sternwarte in Göttingen (3. November 1802). Von Herrn Hermann Kieser in Stuttgart geschenkt.

6) Ein Originalbrief Gauß an seinen Sohn Joseph (1. Dez. 1842), geschenkt von Herrn Kieser.

7) Copie eines Briefes Gerling an Pfaff vom 21. Oktober 1810, von Herrn Professor von Brill.

8) Concept zu Scherings Gedächtnißrede auf Gauß, vom 4. Dezember 1867, von Frau Geheimrat Schering.

Zur Einsicht und Anfertigung von Copien erhielten wir leihweise:

9) 2 Originalbriefe Gauß an Voigtländer, durch Herrn Professor Zincke, Braunschweig.

Durch Verlegung des geophysischen Instituts in den auf dem Hainberg errichteten Neubau sind in der Sternwarte im Laufe des Winters die sogenannten Gaußzimmer frei geworden; es bietet sich

Digitized by Google

daher jetzt die Möglichkeit, in denselben den gesammten wissenschaftlichen Nachlaß von Gauß in übersichtlicher Weise aufzustellen. Hierüber ist zwischen dem Prorector der Universität, dem geschäftsführenden Secretär der Gesellschaft der Wissenschaften und dem Direktor der Sternwarte eine vom 5. März 1902 datirte Vereinbarung zu Stande gekommen, deren wesentliche Bestimmungen folgendermaßen lauten:

1. Die wissenschaftliche Hinterlassenschaft von Gauß, welche im Mai 1856 vom Staate für die Universität erworben wurde, war bisher getrennt in den schriftlichen Nachlaß, der der K. Gesellschaft der Wissenschaften zur Verwahrung und Bearbeitung anvertraut war, und die Bibliothek, die der Sternwarte zur Aufbewahrung und Benutzung überwiesen war.

2. Diese Trennung soll jetzt rückgängig gemacht und sollen beide Theile des Nachlasses bis auf Weiteres unter der Verwaltung des Direktors der K. Sternwarte im Gebäude der Sternwarte aufbewahrt werden.

3. Beide Theile werden daselbst in den ursprünglichen Gaußzimmern vereinigt unter der gemeinsamen Bezeichnung „Gaußarchiv" eine würdige Aufstellung finden.

4. Der Direktor der Sternwarte übernimmt die Verpflichtung, diesen Gesammtnachlaß der K. Gesellschaft der Wissenschaften für die Zwecke der Herausgabe beständig zur Verfügung zu halten und dessen literarische Verwerthung bis auf Weiteres ohne Genehmigung der Gesellschaft der Wissenschaften keinem andern zu gewähren.

Die hiermit festgelegte Transferirung des Gesammtnachlasses in die Gaußzimmer der Sternwarte ist im Monat April erfolgt.

Was den Fortschritt der Bearbeitung des Gaußnachlasses angeht, so ist vorab zu bemerken, daß das im 2. Berichte (1899) genannte, Hrn. Gauß in Hameln gehörige Tagebuch von Gauß (das von Gauß' wissenschaftlichen Entdeckungen in den Jahren 1796 bis 1800, bez. mit großen Unterbrechungen bis 1814, handelt) durch den Berichterstatter unter Benutzung einschlägiger Theile des sonstigen Nachlasses in der historischen Festschrift, welche die Gesellschaft der Wissenschaften zur Feier ihres 150jährigen Bestehens herausgab, mit Anmerkungen versehen veröffentlicht worden ist (Festschrift, p. 1—44). Diese Veröffentlichung ist nur erst eine vorläufige, die später, in Band X der Werke, durch eine definitive zu ersetzen sein wird. Immerhin hat dieselbe jetzt bereits für unsere Kenntniß der geschichtlichen Aufeinanderfolge von Gauß' Entdeckungen einige bemerkenswerthe Beiträge geliefert,

Digitized by Google

insbesondere was die Theorie der elliptischen Functionen angeht[1]). Ferner ist zu berichten, daß der Druck von Bd. VII (Astronomie) durch Herrn Brendel entsprechend dem im vorigen Bericht aufgestellten Programm planmäßig weitergeführt wurde, sowie, daß die Herren Krüger und Börsch die in Bd. IX zu veröffentlichende Bearbeitung des geodätischen Theils von Gauß' Nachlass jetzt vollendet haben; das fertig vorliegende Manuskript soll baldigst in Druck genommen werden. Ueber den Inhalt desselben erstatten die Herren Krüger und Börsch folgenden Bericht:

„Gauß' theoretische Arbeiten in der Geodäsie scheinen im zweiten Jahrzehnt des vergangenen Jahrhunderts begonnen zu sein. Die Anfänge seiner geodätischen Thätigkeit liegen aber weiter zurück. Schon 1803 hatte Gauß aus eigenem Antriebe an eine Aufnahme des braunschweigischen Landes gedacht und zu diesem Zwecke Winkelmessungen ausgeführt. In demselben Jahre nahm er auch an den Beobachtungen der Pulversignale zu Längenbestimmungen und an Breitenbestimmungen für die von v. Zach geleitete trigonometrische und astronomische Aufnahme von Thüringen Theil. Für die kurz vorher stattgehabte Vermessung Westphalens durch den preußischen Generalmajor von Lecoq sind von ihm Berechnungen astronomischer Bestimmungen geliefert worden. In dem darüber in Zach's monatlicher Correspondenz, 1803, erschienenen Aufsatze Lecoq's wird gesagt: „Im astronomischen Theile ist mir der Doctor Gauß von großem Nutzen gewesen, seine Ausrechnungen und Briefe haben zu meinem Unterrichte viel beigetragen."

„Aber erst die in Aussicht genommene dänische Gradmessung, mit deren Ausführung Schumacher im Sommer 1816 betraut worden war, und die dadurch angeregte Hoffnung, sie durch Hannover fortzusetzen, dürfte Gauß veranlaßt haben, ein größeres Interesse geodätischen Untersuchungen zuzuwenden. Am 5. Juli 1816 schreibt er an Schumacher: „Ueber die Art, die gemessenen Dreiecke im Calcül zu behandeln, habe ich mir eine eigene Methode entworfen."

1) Bei dieser Gelegenheit möge erwähnt werden, daß sich in Folge von Studien, mit denen mein früherer Assistent, Herr Conrad Müller hier, über die an der Göttinger Universität um die Wende des 18. Jahrhunderts wirkenden Mathematiker beschäftigt ist, herausgestellt hat, daß die sog. „Dissertatiuncula", die unter dem Namen von Gauß 1893 in den Göttinger Nachrichten publicirt wurde und die dementsprechend in Bd. VIII der Werke wieder abgedruckt ist, nicht von Gauß, sondern von Thibaut herrührt. Letzterer hat dieselbe der Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1799 eingereicht und es folgt dann 1800 in den Göttinger Anzeigen, Stück 81, eine Besprechung durch Kästner, die im wesentlichen eine vom Verf. selbst herrührende Inhaltsangabe reproducirt.

Digitized by Google

In demselben Briefe heißt es: „Mir ist eine interessante Aufgabe eingefallen, nämlich: allgemein eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projiciren (abzubilden), daß das Bild dem Original in den kleinsten Theilen ähnlich werde"; die Aufgabe scheint ihm „eine schickliche Preisfrage für eine Societät" zu sein. Die in der Bearbeitung derselben, die von Gauß am 11. December 1822 an die Königliche Societät der Wissenschaften in Copenhagen eingeschickt wurde, festgestellten Principien haben ihm dazu gedient, die Ergebnisse geodätischer Messungen darzustellen.

„Bekanntlich hat Gauß als Projectionsmethode für die hannoversche Gradmessung und die sich anschließende Landesvermessung die conforme Uebertragung des Rotationsellipsoids auf die Ebene gewählt. Hierbei wird die Abbildungsfunction dadurch bestimmt, daß ein Meridian durch eine Gerade, die Abscissenaxe, dargestellt wird, deren Abschnitte gleich den entsprechenden elliptischen Meridianbögen sind. Die Ergebnisse der Messungen erscheinen bei dieser Projection in der Form von ebenen rechtwinkligen Coordinaten der Beobachtungspunkte. Der Anfangspunkt des Coordinatensystems entspricht dem Mittelpunkte der Axe des Reichenbach'schen Meridiankreises der Göttinger Sternwarte (bei der früheren Aufstellung). Wenn sich nun auch im Nachlaß keine zusammenhängende Darstellung dieser Uebertragungsmethode gefunden hat, so ließ sich doch mit Hülfe der Niederschriften in Handbüchern und auf losen Rechenzetteln ein Bild des Gauß'schen Verfahrens herstellen. Gauß entwickelt zunächst die Reihen, welche die geographische Länge und Breite, die Meridianconvergenz und das Vergrößerungsverhältniß aus den ebenen rechtwinkligen Coordinaten, und umgekehrt diese sowie die Meridianconvergenz aus den geographischen Coordinaten zu berechnen gestatten. Für das Vergrößerungsverhältniß werden verschiedene Entwicklungen gegeben. Die Ableitung der Unterschiede in den Azimuten und in der linearen Länge zwischen einer geodätischen Linie des Ellipsoids und der Geraden in der Ebene, die durch die Projectionen der Endpunkte der ersteren geht, erfolgt nicht wie in den späteren „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung, 1843", Art. 12 und 13, sondern nach einem auch jetzt noch ganz neuen Verfahren. Es werden allgemein für eine geodätische Linie, die einer beliebigen Fläche angehört, diese Reductionen bei der conformen Abbildung auf die Ebene abgeleitet, aus denen sich dann leicht die speciellen, für die geodätische Linie des Erdellipsoids herstellen lassen. Bei den Reihen für die ebenen

Digitized by Google

rechtwinkligen Coordinaten und für die geographischen Coordinaten braucht man die geographische Breite, die einer bestimmten Abscisse entspricht, und umgekehrt die Abscisse, die zu einer gegebenen Breite gehört. Um diese Uebergänge leicht zu erhalten, werden Reihen zwischen der ellipsoidischen Breite φ und der Breite ψ auf einer Kugel, die gleichen Meridianumfang mit dem Erdellipsoid hat, und wobei die Bögen zwischen dem Aequator und den Breiten φ und ψ gleich sind, gegeben. Außerdem werden aber noch Reihen zwischen ψ, φ und einer fingirten Polhöhe ω, die mit φ durch die Beziehung $\frac{d\omega}{\cos\omega} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \cdot \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}$ verbunden ist, entwickelt, mit deren Hülfe eine andere, neue Berechnung der ebenen Coordinaten aus den geographischen und umgekehrt ermöglicht wird.

„Gleichzeitig mit der conformen Uebertragung des Ellipsoids auf die Ebene hat Gauß noch die folgenden Abbildungen in Betracht gezogen: Erstens die conforme Doppelprojection des Ellipsoids auf die Kugel und der Kugel durch stereographische und Mercator'sche Projection auf die Ebene, zweitens die conforme Uebertragung des Ellipsoids auf einen Kegelmantel, und drittens die stereographische Darstellung des Ellipsoids auf der Ebene. Namentlich für die ersten beiden sind Gebrauchsformeln gegeben worden. Die Abbildung der Oberfläche des Erdellipsoids auf die Kugeloberfläche erfolgt hier jedoch noch mit Hülfe der im Art. 13 der „Allgemeinen Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, etc.“ enthaltenen Entwicklungen. Besonders reichhaltig sind die Formelaufstellungen für die Mercator'sche Projection der Kugel auf die Ebene, die, indem die Strecken eines Hauptmeridians den entsprechenden Strecken auf der Abscissenaxe gleich sind, das Analogon der Projectionsmethode der hannoverschen Vermessung ist. Besonders für die Unterschiede der Richtungen eines auf die Ebene projicirten Bogens eines größten Kreises und der zwischen denselben Endpunkten verlaufenden Geraden, wie auch für die Entfernungsreduction finden sich elegante Entwicklungen.

„Da es sich beim Beginn der hannoverschen Messungen allein um eine Breitengradmessung handelte, die sich nur wenig von demselben Meridian entfernt, so war die von Gauß gewählte Projectionsmethode die günstigste; während, wenn man von vornherein eine Landesvermessung ins Auge gefaßt hätte, sowohl eine der obigen Abbildungen, wie auch ein anderer Anfangspunkt als Göttingen vorzuziehen gewesen wäre.

Digitized by Google

„Für die Uebertragung der geographischen Coordinaten vermittelst der geodätischen Linie hat Gauß verschiedene Entwicklungen nebst dazu gehörigen Beispielen gegeben. Die von ihm zur successiven Berechnung der Breiten und Längen der Dreiecks-punkte sowie der Azimute der Dreiecksseiten benutzten Formeln haben schon die Form, wie die der zweiten Abhandlung der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1846", Art. 23/25 und Art. 33, unterscheiden sich aber von ihnen durch eine andere Anordnung der quadratischen Correctionsglieder. Von besonderem Interesse ist eine Anwendung von Sätzen der Flächentheorie zur Herleitung von Reihen für die lineare Länge und der Azimute einer geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid, wenn die geographischen Coordinaten ihrer Endpunkte gegeben sind. Ebenso wird von der Flächentheorie aus die Abweichung der geodätischen Linie des Umdrehungsellipsoids vom verticalen Schnitte erhalten.

„Im October 1818 hatte Gauß, um an Schumacher's Messungen anzuschließen, in Lüneburg beobachtet, und hier (wie er in einem Tagebuche der Sternwarte bemerkt hat) durch ein von der Sonne beleuchtetes Fenster des Michaelisthurms in Hamburg, das ihm beim Pointiren lästig fiel, die erste Anregung zu der im Herbste 1820 gemachten Erfindung des Heliotrops erhalten. Seine eignen Gradmessungsarbeiten begannen im Jahre 1821, in dem auf den Stationen Göttingen (Sternwarte), Meridianzeichen, Hohehagen, Hils und Brocken gemessen wurde; 1822 ist von ihm auf den Punkten: Lichtenberg, Deister, Garßen, Falkenberg, Scharnhorst, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode und Wilsede, 1823 auf den Punkten: Timpenberg, Nindorf, Lüneburg und Hamburg, ferner zum zweiten Male auf der Sternwarte, dem Hohehagen und dem Brocken, 1824 zum zweiten Male auf Falkenberg und in Wilsede, sowie auf den Stationen: Elmhorst, Litberg, Bullerberg, Brüttendorf, Bottel, Zeven, Steinberg, Brillit, Bremen und Garlste und 1825 auf den Stationen: Brüttendorf, Bremen, Brillit und Garlste zum zweiten Male, auf Zeven zum zweiten und dritten Male, ferner auf den Punkten: Bremerlehe, Varel, Langwarden und Jever beobachtet worden. Auf dem Inselsberge, der auch ein Punkt der hannoverschen Gradmessung ist, erfolgten die Beobachtungen 1821 durch Encke und 1823 durch Gerling. Die Feldarbeiten für die unter Gauß' Leitung von den hannoverschen Officieren Müller, Hartmann und Joseph Gauß ausgeführte Landesvermessung haben von 1828 bis 1844 gedauert; die rechnerische Bearbeitung hat sich bis 1848 hingezogen.

Digitized by Google

„Gauß hat bekanntlich mit einem Repetitionstheodolith die Winkel zwischen den einzelnen Richtungen gemessen. Wie die Beobachtungsbücher und die Stationsausgleichungen, so weit sie erhalten sind, zeigen, haben auf keinem der obigen Hauptdreieckspunkte die Winkelmessungen in allen Combinationen stattgefunden. Wohl aber scheint dies manches Mal auf den Stationen der Landesvermessung der Fall gewesen zu sein. Die Ausgleichungen der Stationsbeobachtungen sind von Gauß, dem Stande der Beobachtungen entsprechend, mehrfach wiederholt worden; so sind z. B. für die Station Wilsede 4 verschiedene, mit den Messungen fortschreitende Ausgleichungen vorhanden. Wahrscheinlich hörte Gauß mit den Messungen dann auf, wenn, abgesehen von äußern Umständen, neue Beobachtungen nicht mehr wesentliche Aenderungen der Verbesserungen hervorriefen. Die Anzahlen der Winkelrepetitionen sind als Gewichte der beobachteten Winkel angesetzt, als Unbekannte die Verbesserungen der Richtungen genommen worden. Auf einigen Stationen der letzten beiden Jahre der Gradmessung ist auch noch eine Verbesserung infolge des Gleitens des Kreises in Rücksicht gezogen. Die Auflösung der Normalgleichungen erfolgte nach dem durch Gerling bekannt gewordenen Näherungsverfahren. Nachdem noch die Correctionen wegen der Abweichung der geodätischen Linie vom verticalen Schnitte und wegen der Höhe des anvisirten Objects in Rechnung gezogen waren (nach einem Briefe an Olbers), wurden die Stationsergebnisse als Sätze unabhängiger Richtungsbeobachtungen mit gleichen Gewichten — nur die eine Richtung Bottel-Steinberg hat das Gewicht $\frac{1}{4}$ — in die Netzausgleichung eingeführt.

„Auch die Netzausgleichung ist vollständig nicht mehr vorhanden, doch konnte aus den losen Blättern, die sich darauf beziehen, der Gang der Gauß'schen Rechnung festgestellt werden. Die Anzahl der Dreieckspunkte ist 33, die Anzahl der gegenseitig beobachteten Richtungen 75, die Anzahl der Winkelgleichungen also 43 und die Anzahl der Seitengleichungen 12. Die Aufstellung der Winkelgleichungen geschah in derselben Weise, wie bei dem Fünfeck im „Supplementum theoriae combinationis etc., societati regiae exhibitum 1826, Sept. 16"; die Summe der Verbesserungen der Winkel eines Dreiecks ist gleich dem berechneten weniger dem beobachteten Excesse desselben. Die aus den Winkelgleichungen gebildeten Normalgleichungen hat Gauß zunächst aufgelöst und daraus Verbesserungen berechnet, welche die Dreieckswidersprüche beseitigen. Mit diesen erstmalig verbesserten Richtungsbeobachtungen wurden die Seitengleichungen aufgestellt, zunächst in der-

Digitized by Google

selben Weise, wie bei dem Fünfeck im Supplementum etc.; darauf werden sie aber umgeformt mit Hülfe der Winkelgleichungen, die zu der Figur gehören, auf welche sich die betreffende Seitengleichung bezieht. Wenn nämlich bei der Ausgleichung einer Figur außer einer Anzahl von Winkelgleichungen, deren absolute Glieder Null sind, nur eine Seitengleichung zu erfüllen ist, so kann man dies durch Ausgleichung einer einzigen Bedingungsgleichung erreichen. Und zwar wird diese dadurch erhalten, daß man zu der ursprünglichen Seitengleichung die Winkelgleichungen addirt, nachdem man sie vorher mit Coefficienten multiplicirt hat, die so bestimmt sind, daß die Summe der Quadrate der Coefficienten in der neuen Bedingungsgleichung ein Minimum wird. Aus den so umgeformten 12 Seitengleichungen werden nun auch die Normalgleichungen gebildet, deren Auflösung neue Werthe der Verbesserungen giebt. Nach dieser ersten Ausgleichung werden wieder die neu entstandenen Dreieckswidersprüche weggeschafft, und mit den dadurch erhaltenen Verbesserungen von neuem die Seitengleichungen und die zugehörigen Normalgleichungen aufgestellt, die sich jetzt von den vorigen nur in den constanten Gliedern unterscheiden. Durch ihre Auflösung ergeben sich wieder neue Werthe der Richtungsverbesserungen. In dieser Weise hat Gauß die Ausgleichung noch zweimal wiederholt. Dies Verfahren führt genau zu den Werthen, die einer Ausgleichung sämmtlicher Bedingungsgleichungen in einem Gusse entsprechen. In Folge der Form der Bedingungsgleichungen ist die Rechnung so rasch zum Stehen gekommen.

„Dafür, daß bei der Aufstellung der Seitengleichung in einem Viereck als Centralpunkt am passendsten derjenige Eckpunkt gewählt wird, der der größten Dreiecksfläche gegenüberliegt, hat Gauß einen rein analytischen Beweis gegeben.

„Bei der Ausgleichung der Dreiecke der Landesvermessung scheint Gauß die Winkelsumme der Dreiecke scharf ausgeglichen, und darauf die Seitengleichungen in solcher abgekürzter Form in Rücksicht gezogen zu haben, daß durch ihre Ausgleichung die Winkelgleichungen nicht mehr gestört werden. Diese Näherungsform der Seitengleichung wird dadurch erhalten, dass die Verbesserung der Richtung $P_1 P_2$ gleich der Verbesserung der Richtung $P_2 P_1$ gesetzt wird. Von der Ausgleichung des Dreieckskranzes um Oldenburg, gemessen 1829/31, ist der Ansatz der Bedingungsgleichungen vorhanden, und zwar werden diese nach Anbringung der Richtungscorrectionen in der Ebene aufgestellt. Zum ersten Male in der Geodäsie werden hier die 3 Polygon-

Digitized by Google

gleichungen gebildet, die den Zusammenschluß des Kranzsystems bewirken.

„Die Bestimmung der Nebenpunkte ist wohl meistens durch Vorwärtseinschneiden von den Hauptpunkten aus erfolgt. Die Berechnung ihrer ebenen rechtwinkligen Coordinaten mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate ist fast ganz allein von Gauß innerhalb der Jahre 1828 bis 1848 ausgeführt worden; nur einen Winter hindurch hat ihn sein Sohn, der Leutnant Gauß, und in den letzten Jahren der Professor Goldschmidt dabei unterstützt. Die Gesammtzahl der bestimmten Punkte betrug gegen 2600.

„Kleinere Notizen von Gauß beziehen sich auf die terrestrische Refraction, den Borda'schen Kreis, die Reduction schiefer Winkel auf den Horizont, die Bestimmung des Winkelwerths und seines Gewichts aus Repetitionsbeobachtungen, die Ausgleichung eines aus Winkelbeobachtungen erhaltenen Polygons, wenn nur die Winkelgleichungen berücksichtigt werden, und anderes.

„Zum Wiederabdrucke werden gelangen die Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona, der Brief an Baeyer über die Aenderung der geographischen Breite mit der Höhe, die Veröffentlichungen über den Heliotrop, sowie die Mittheilungen über die hannoversche Gradmessung, ferner Auszüge aus den Briefwechseln mit Schumacher, Bessel und Olbers, außerdem ein Brief an Bohnenberger. Zu diesen kommen bisher nicht veröffentlichte Auszüge aus dem Briefwechsel mit Gerling und aus Gauß' Berichten an das hannoversche Ministerium. Für die von Gauß beabsichtigte Publication über die hannoversche Gradmessung ist der Plan und zum Theil die Einleitung vorhanden."

Göttingen, den 1. April 1902.

Digitized by Google

Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden.

Die Gesellschaft ist in der erfreulichen Lage, den fünften Jahresbericht über ihr Unternehmen mit der Mitteilung einzuleiten, daß die Fortführung desselben durch mehrere bedeutende Zuwendungen nunmehr auf Jahre hinaus gesichert ist. Wie weit es möglich sein würde, mit den ihr zur Verfügung stehenden beschränkten Mitteln ein Unternehmen durchzuführen, das nicht allein Deutschland und Italien, sondern auch Frankreich, Spanien und England umfaßt und das auf eine lange Reihe von Jahren hinaus erhebliche finanzielle Beiträge erfordert, das ist für die Gesellschaft von Anfang an ein Gegenstand ihrer besonderen Sorge gewesen. Sie hat darum über die Unterstützungen, welche ihr das vorgesetzte Ministerium und der Verwaltungsrath der Wedekindstiftung mehrfach bewilligt haben, ebenso wie über die hochsinnige Spende eines ungenannten Kollegen mit besonderm Danke berichet. Jetzt hat sie die Freude mitzuteilen, daß bei Gelegenheit ihres 150jährigen Jubiläums der Herr Cardinal Dr. G. Kopp, Fürstbischof von Breslau, ihr verehrtes Ehrenmitglied, und der Herr Reichskanzler ihr je 15000 Mark zur Fortführung der Arbeiten für die Sammlung und Ausgabe der älteren Papsturkunden zugewendet haben. Daneben ist ihr auch das Interesse, das das vorgesetzte Ministerium diesem Unternehmen bisher erwiesen hat, unverändert erhalten geblieben. Der Herr Cultusminister hat unserm ständigen Mitarbeiter Dr. Wendland auch für das verflossene Jahr ein Stipendium verliehen. Er hat ferner dem Leiter der Arbeiten, Professor Kehr, einen einjährigen Urlaub zur Fortführung der Arbeiten in Italien und Frankreich ausgewirkt. Die Gesellschaft selbst hat aus ihren Fonds 1200 Mark beigesteuert

Digitized by Google

An den Arbeiten haben sich außer dem Leiter des Unternehmens, Professor Kehr, beteiligt in Deutschland: der ständige Mitarbeiter Dr. Wendland, dem die regelmäßigen, wesentlich bibliographischen Arbeiten in unserer Göttinger Arbeitsstube oblagen, ferner von unsern früheren Mitarbeitern Dr. Brackmann, von dessen archivalischen Forschungen in Deutschland noch besonders berichtet werden wird, und Dr. Wiederhold, der von seinem Wohnsitz Goslar aus mehrere deutsche Archive, namentlich Wolfenbüttel, besucht und in der Zwischenzeit die vorbereitenden Arbeiten für die Archive Spaniens und Frankreichs gefördert hat; in Italien: unser alter Arbeitsgenosse Dr. Schiaparelli, der soweit seine jetzige Stellung am Istituto storico italiano es gestattete, mehrere dringende Arbeiten in Rom, in Verona, Bergamo und Brescia für uns besorgte, Dr. Fedele, der uns in Rom und Süditalien manche Hülfe geleistet hat, endlich Dr. Tonetti vom römischen Staatsarchiv, der die Sabina nach allen Richtungen hin auf ältere Papsturkunden, nicht ohne Erfolg, durchforschte.

Materiell betrachtet ist in Italien die eigentliche Sammelarbeit in der Hauptsache unserm Programm entsprechend abgeschlossen. Nur die Durchsicht der päpstlichen Register des Vatikanischen Archivs ist noch nicht vollendet. An dieses schwere Problem sind wir nur zögernd und des Erfolges unsicher herangegangen. Allein die von Dr. Schiaparelli besorgte genaue Durchsicht der Register des XIII. Jahrhunderts ergab eine so erhebliche Ausbeute auch für die älteren Papsturkunden, daß sich nun auch eine Durchsicht der Register des XIV. Jahrhunderts als nothwendig erwies. Diese hat Prof. Kehr während der Herbstferien 1901 und während der Frühjahrsferien 1902 zum Abschluß gebracht. Die Register des XV. Jahrhunderts sollen im Laufe des Sommers ausgebeutet werden.

Daneben sind natürlich an mehr als einem Orte Italiens noch genauere Nachforschungen erforderlich. Was hier noch zu geschehen hat, das wird sich aber erst bestimmter feststellen lassen bei der Arbeit für das Manuscript der Italia pontificia. Mit dieser Arbeit hat Prof. Kehr, der diesen Sommer in Rom zu bleiben beabsichtigt, bereits den Anfang gemacht und er hofft sie soweit fördern zu können, daß noch in diesem Jahr mit dem Drucke wird begonnen werden können.

Mit nicht geringer Genugthuung kann die Gesellschaft auch von den Arbeiten in Deutschland berichten. Diese hat der Verwaltungsrath der Wedekindstiftung, unter Bewilligung einer Summe von 3000 Mark für die notwendigen archivalischen

Digitized by Google

Reisen, auf sich genommen und sie unter der Oberleitung von Professor Kehr dem Dr. Brackmann übertragen. Hierüber wird der Director dieser Stiftung seinerzeit ausführlicher berichten.

Die Vorarbeiten für Frankreich und Spanien sind, Dank dem hingebenden Fleiße von Dr. Wiederhold, ein gutes Stück vorwärts gebracht worden. Die Erfahrungen, die wir bei unsern ersten Versuchen in Italien gemacht haben, haben uns aber überzeugt, daß es zweckmäßiger ist, die bibliographischen Arbeiten soweit als irgend möglich zu vollenden, ehe die Archive und Bibliotheken selbst besucht werden. Wir werden mithin unsere Forschungen in Frankreich erst zu Anfang des Jahres 1903 beginnen.

Mit dem Danke für die freudige Hingabe unserer Mitarbeiter an unser Unternehmen verbinden wir auch dieses Mal den Dank an die zahlreichen Gönner und Freunde unserer Arbeiten, deren Anerkennung und Unterstützung uns nicht wenig geholfen und ermutigt hat, die manchmal recht großen persönlichen und sachlichen Schwierigkeiten, auf welche ein so großes Unternehmen naturgemäß stößt, zu überwinden.

Die Commission
für die Herausgabe der älteren Papsturkunden.

Digitized by Google

Aus dem Bericht der Commission für den Thesaurus linguae latinae über die Münchener Conferenz am 7. und 8. October 1901.

1. Die Berathungen der Commission, zu denen der Generalredactor des Thesaurus, Herr Prof. Vollmer, vielfach zugezogen wurde, betrafen zum großen Theil den Inhalt und die Qualität der Arbeit in den vorliegenden Lieferungen, sowie die für die Fortführung sich ergebenden Folgerungen und neu aufgestellten Gesichtspunkte. Das Technische der Ausarbeitung kann als bewährt und gesichert angesehen werden. Der zur Verfügung stehende Umfang ist im ganzen nicht wesentlich überschritten worden; doch sind über diesen Punkt sowohl als über die Einhaltung der Fristen die Erfahrungen noch nicht abgeschlossen.

2. Im Laufe des Jahres sind auf unser Ersuchen von der preußischen Regierung zwei Stipendien zu je 1200 M. bewilligt und von den Regierungen Würtembergs 1000 M., Badens 600 M., Elsaß-Lothringens 300 M. zu dem Unternehmen beigesteuert worden. Die Commission hofft, daß, wie es von Preußen und Würtemberg bereits geschehen oder in Aussicht gestellt ist, auch von Baden und dem Reichslande die Bewilligung für die folgenden Jahre erneuert werden wird.

3. Die Verlagshandlung hat mitgetheilt, daß die Zahl der Subscribenten 1482 beträgt und somit das Honorar für den Bogen vertragsmäßig von 70 auf 110 M. gestiegen ist. Indessen steigen in entsprechendem Maße die Ausgaben des Unternehmens, sowohl durch die nothwendig gewordene Vermehrung der Arbeitskräfte als durch die Verpflichtung, die Bezüge der älteren Beamten aufzubessern.

Digitized by Google

4. Zunächst hat die Commission in der Person des Herrn Prof. Dr. Ihm, z. Z. Privatdocenten in Halle, einen Redactor berufen, der einen Theil der Geschäfte des Generalredactors übernehmen wird. Als neuer Assistent wird Herr Dr. Th. Bögel aus Göttingen eintreten. Die Bezüge einiger Assistenten wurden provisorisch erhöht. Beabsichtigt ist, eine nach der staatlichen Ordnung der Alterszulagen gestaltete Scala der Gehaltserhöhungen einzuführen; ein Posten für den zu diesem Zwecke zu bildenden Reservefonds wurde in den Etat des nächten Geschäftsjahres eingesetzt.

5. Die als Reserve für den Abschluß des Unternehmens bestimmte Wölfflin-Stiftung beträgt zur Zeit M. 15300.

München, den 8. October 1901.

Digitized by Google

Verzeichnis der im Jahre 1901/2 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen.

Oeffentliche Sitzung am 27. April 1901.

Darüber berichten die geschäftlichen Mittheilungen 1901. H. 1.

Sitzung vom 11. Mai 1901.

Leo Meyer legt vor: Handbuch der griechischen Etymologie. Bd. I.

Derselbe über das gothische ïdja. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 229.)

F. Leo legt vor: Die griechisch-römische Biographie.

P. Kehr, Papsturkunden im alten Patrimonium. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 196.)

Derselbe legt vor: Prof. Holder Egger (Berlin), über die Doppelchronik von Reggio. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 272.)

H. Wagner berichtet über die Taufe des Südpolarschiffes Gauß und über die seismologische Conferenz in Straßburg.

G. Röthe, Brentanos Ponce de Leon, eine Säcularstudie. (Abhandl. phil.-hist. Kl. N. F. V. 1.)

E. Rieke legt vor: E. Cohn Elektrodynamik bewegter Körper. (Nachr. math.-phys. Kl. 1901. S. 74.)

Derselbe überreicht die japanische Uebersetzung seines Lehrbuches der Experimentalphysik. Tokio. 1901.

Sitzung vom 8. Juni 1901.

F. Klein legt vor: Mathemathische Encyklopädie I. 6. und zugleich im Namen von Herrn Prof. Fricke in Braunschweig:

R. Fricke und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Bd. I (1897). Bd. II, Lfg. 1 (1901).

N. Bonwetsch legt vor: C. Schmidt, Ein neues Fragment des Osterbriefes des Athanasius vom Jahre 367. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 367.)

Digitized by Google

P. Kehr, Papsturkunden in Rom. III. Bericht. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 239.)

Sitzung vom 22. Juni 1901.

P. Kehr legt vor: W. Wiederhold, Papsturkunden in Florenz. (Nachr. phil. hist. Kl. 1901. S. 306.)

A. Peter legt vor: Die Flora von Südhannover.

F. Klein legt vor: Mathemathische Encyklopädie. IV. 2. No. 1.

Sitzung vom 6. Juli 1901.

F. Klein überreicht im Auftrage des Verfassers: E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Deutsche Ausgabe von G. Kowalewski. (Leipzig 1901.)

Sitzung am 20. Juli 1901.

N. Bonwetsch legt vor: H. Litzmann, Ueber die Catenen. I. Hälfte. (Erscheint in den Nachr. phil.-hist. Kl. 1902.)

H. Wagner legt vor: Harrisse: (Paris) Les premiers incunables bâlois et leurs derivés. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 351.)

J. Orth, Zur Histologie und Aetiologie der Lungenschwindsucht und Arbeiten aus dem pathologischen Institut. 8. Bericht. (Nachr. math.-phys. Kl. 1901. S. 119.)

J. Merkel legt die neue Auflage des Grundrisses der Anatomie von J. Henle vor.

v. Könen, Ueber die Gliederung der norddeutschen unteren Kreide. (Nachr. math.-phys. Kl. 1901. S. 101.)

Sitzung am 26. Oktober 1901.

W. Voigt legt vor: W. Kaufmann, die magnetische und elektrische Ablenkung der Bequerel-Strahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1901. S. 143.)

Leo Meyer legt vor: Handbuch der griechischen Etymologie. Bd. II.

Derselbe: Ueber den Ursprung der Namen Indogermanen, Semiten und Ugrofinnen. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 448.)

F. Kielhorn legt vor: H. Jacobi, Ueber indische Logik. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 460.)

J. Wellhausen: Die Kriege zwischen den Arabern und Byzantinern. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 414.)

Sitzung am 8. November 1901.

Der vorsitzende Sekretär legt vor: A. Auwers (Berlin) Recta-

Digitized by Google

scensionen von 792 Sternen (Nachr. math.-phys. Kl. 1901. S. 201.)

D. Hilbert, Ueber die Grundlagen der Geometrie. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

W. Voigt, Elektronenhypothesen und Theorie des Magnetismus. (Nachr. math.-phys. Kl. 1901. S. 169.)

Derselbe berichtet: über W. Kaufmann, Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1901. S. 143.)

J. Wellhausen legt vor: Enno Littmann, Neue arabische Volkspoesie. (Abhandlungen phil.-hist. Kl.)

F. Kielhorn überreicht indo-arische Encyclopaedie Bd. III. H. 10.

A. Brill (Tübingen) legt vor: Ueber die Darstellung algebraischer Raumkurven durch eine Gleichung. (Nachr. math.-phys. Kl. 1901. S. 156.)

Ueber diese Sitzung und über die öffentliche, zur Feier des 150jährigen Bestehens der Gesellschaft am 9. November 1901 abgehaltene Sitzung ist in den geschäftlichen Mittheilungen 1901. H. 2 berichtet.

Sitzung vom 23. November 1901.

F. Leo legt vor: G. Kaibel, *Δάκτυλοι Ἴδαιοι.* (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 488.)

F. Kielhorn legt vor: R. Pischel, Ādhyarāja. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 485.)

J. Wellhausen berichtet: über Enno Littmann, Neuarabische Volkspoesie.

F. Klein berichtet über: summarisches Rechnen sonst und jetzt und über die von Herrn Soßna (Potsdam) berechneten Tafeln der trigonometrischen Functionen.

Sitzung am 7. December 1901.

Leo Meyer legt vor: Handbuch der grichischen Etymologie Bd. III.

F. Kielhorn: Epigraphic notes. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1901. S. 519.)

K. Dilthey legt vor: Imhof-Blumer, kleinasiatische Münzen. I.

Sitzung am 11. Januar 1902.

F. Klein legt vor: Mathemathische Encyclopaedie Bd. II. 2. H. 1.

W. Nernst legt vor: E. Bose, Ueber die Natur der Elektricitätsbildung in elektrolytischen Glühkörpern. Mit 1 Tafel. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 1.

Digitized by Google

H. Wagner berichtet über den Stand der deutschen Südpolarexpedition.

W. Voigt legt vor: M. Abraham, Dynamik des Elektron. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 20.)

P. Kehr: Papsturkunden in Mailand. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1902. S. 67.)

P. Kehr: Papsturkunden in der Lombardei. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1902. S. 130.)

F. Kielhorn legt vor: Pischel (Halle), Materialien zur Kenntnis der Apabraṃśá. (Abhandl. phil.-hist. Kl. N. F. V. 4.)

Sitzung am 25. Januar 1902.

H. Wagner: Die Ueberschätzung der Anbaufläche Babyloniens. Mit 1 Karte. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1902. S. 244.)

F. Frensdorff legt vor: P. Kehr, Papsturkunden in Ligurien (Nachr. phil.-hist. Kl. 1902. S. 169.)

Derselbe legt vor: Alb. Brackmann, Papsturkunden des östlichen Deutschlands. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1902. S. 193.)

D. Hilbert legt vor: Alfred Loewy in Freiburg B.: Ueber reducible homogene Differentialgleichungen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 42.)

Sitzung am 8. Februar 1902.

D. Hilbert legt vor: Furtwängler, Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzwerthe. (Abhandl. math.-phys. Kl. N. F. II. 3.)

Derselbe legt vor: Lothar Heffter, Zur Theorie der reellen Curvenintegralen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 115.)

Derselbe legt vor: Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichung $A(s,t) - \mathbf{A}(s,t) = \mu \int_0^1 A(s,r)\,\mathbf{A}(r,t)\,dr$. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 165.)

O. Wallach: Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium. X. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 92.)

Derselbe legt vor: Walther Borsche, Ueber Xanthonderivate aus *p*-Nitrophenol. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 141.)

Derselbe legt vor: C. Jacobj, Beitrag zur physiologischen Wirkung der organischen Ammonium-Jodide und Polyjodide. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 102.)

W. Voigt: Beiträge zur Aufklärung der Eigenschaften der pleochroitischen Krystalle. Mit 12 Figuren. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 48.)

G. Roethe legt vor: Dr. Borchling, Reisebericht. (Beiheft Nachr. phil.-hist. Kl. 1902.)

Digitized by Google

Sitzung am 22. Februar 1902.

H. Wagner berichtet über Harrisse, Apocrypha americana.

G. Roethe berichtet über die von Herrn Hirzel in Leipzig geschenkten Manuscripte der Brüder Grimm.

W. Nernst und A. Lessing, Ueber die Wanderung der galvanischen Polarisation durch Platin- und Palladiumplatten. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 146.)

W. Voigt legt vor: Straubel (Jena), Versuche über elektrokalorische Effecte beim Turmalin. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 161.)

Sitzung am 8. März 1902.

D. Hilbert legt vor: J. O. Müller, Ueber die Minimaleigenschaft der Kugel. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 176.)

Derselbe legt vor: A. Schönflies (Königsberg), Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis situs. (Nachr. math.-phys. Kl. 1902. S. 185.)

W. Voigt legt durch den vorsitzenden Secretär vor: E. Wichert, Polarlichtbeobachtungen in Göttingen. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl.)

Digitized by Google

Zu Georg Kaibels Gedächtniß.

Von

Friedrich Leo.

Ich kann über Georg Kaibel nicht anders als persönlich sprechen; dafür bedarf es in diesem Kreise, dem er vertraut war und dem auch unser persönliches Verhältniß bekannt ist, keiner Erklärung. Nach anderm Material als dem in seinen Werken, in meiner Erinnerung und in Kaibels Briefen an mich vorhandenen habe ich mich nicht umgesehn. Von den Männern, die auf seine wissenschaftliche und menschliche Entwicklung den entscheidenden Einfluß geübt haben, werde ich nicht schweigen dürfen, gegen die Gewohnheit, obwohl sie leben; die Gewohnheit ist im gewöhnlichen Lauf der Dinge begründet; aber der früh Vollendete hat seine Lehrer und Freunde im Leben zurückgelassen.

Georg Kaibel ist am 30. October 1849 in Lübeck geboren und dort unter Familienverhältnissen aufgewachsen, die den Sinn des Knaben bedrückten und Schatten auch in seine reifen Jahre warfen. Von seinen Lehrern am Lübecker Gymnasium hat August Baumeister Einfluß auf ihn geübt und ihm, wie er am Schlusse seiner Doctorarbeit rühmt, den Weg zur Philologie gezeigt. Seine akademische Laufbahn begann er Ostern 1868 hier wo er sie beschlossen hat; aber er setzte nicht glücklich ein, nach zwei Semestern suchte er weiter und zog nach Bonn.

In Bonn fand er einen Studentenkreis vor, dem damals noch Diels, Wilamowitz, Robert angehörten. Er hörte noch O. Jahns letzte Vorlesung; danach trat Bücheler neben Usener. Die Lehre und in ebenso starkem Maße das Beispiel dieser beiden weckte seine schlummernde Kraft. Er sah auf einmal das Ziel aufgerichtet, das er bis zum letzten Tage nicht wieder aus den Augen gelassen hat.

Die griechische Sprache war von Anfang an das Gebiet, in dem er hauste. Mit den Inschriften und der attischen Komödie

Digitized by Google

begannen seine ernsthaften Studien. An Aristophanes erprobte er seine Sprachkenntniß und Erfindungskraft und kam dadurch gleich in das Centrum des Attischen, um da die tiefsten Wurzeln zu schlagen. Zur Epigraphik führte ihn eine Preisfrage der philosophischen Facultät, die eine Sammlung der griechischen metrischen Inschriften verlangte; ein 40 Jahre zuvor von Welcker ausgeführter Gedanke, der jetzt für die Beschaffung des Materials und seine Bearbeitung eine neue und große Aufgabe stellte. An dieser Arbeit hat er zuerst und gleich in Gluth und Drang die Freude des Schaffens empfunden. Im Lauf eines kurzen Jahres hat er die Inschriftensammlungen, die Anthologie, die ganze griechische Poesie, vor allem die epische und hellenistische, durchwandern und die Fülle der Monumente im ersten Wurf herstellen und ordnen müssen. Als er im August 1871 den Preis gewonnen hatte, durfte er sich sagen, daß er zugleich ein sicheres Fundament für fortschreitende Production besaß.

Damals lernte ich ihn kennen. Er unterrichtete die Söhne des Botanikers Hanstein und hatte dafür freie Station im Hause, eine schöne Thurmstube im Poppelsdorfer Schloß, in herrlicher Gelehrtenstille. Er hatte für den Anfänger die Glorie des preisgekrönten Hauptes der jungen Generation, zu der F. Schultheß, K. Reinhard, F. v. Duhn gehörten, und, wie er mir seine epigraphischen Sammlungen zeigte, den Zauber des schon ins Innere des Heiligthums Gedrungenen, dazu den jungen Reiz der Persönlichkeit, der nur ihm gehörte. Er war beschäftigt, aus einigen dem Zusammenhang seiner Preisarbeit angehörenden glänzenden kleinen Untersuchungen seine Doctordissertation zusammenzustellen *(De monumentorum aliquot graecorum carminibus)*, und promovirte am 16. December 1871. Die Dissertation gab also nur Stücke, aber sie zeigte einen fertigen Gelehrten im Besitze des Materials und der Methode, mit einem Latein, um dessen Kraft und Anmuth ihn schon damals die meisten beneiden konnten; der Hintergrund einer breiten und eindringenden Forschung war jedem sichtbar und die gelegentliche Ankündigung der epigraphischen Anthologie mußte die allgemeine Aufmerksamkeit erregen. Die Arbeit brachte ihm, damals eine seltne Gabe, das römische Stipendium des archäologischen Instituts, und er konnte, als im Herbst 1872 die Bonner Zeit zu Ende ging, mit heiteren Augen rückwärts und vorwärts schauen.

Die Bonner Studienjahre sind entscheidend für Kaibels menschliche und wissenschaftliche Entwicklung. Er hat das bis zum Ende seines Lebens aufs stärkste empfunden. In seinen Jugendbriefen

Digitized by Google

tritt das Verhältniß zu seinen Lehrern mit einem wahrhaft platonischen Ethos hervor. Wenn je der ἔρως eine Seele geleitet hat, so war es seine Seele.

So fanden ihn die römischen Jahre vorbereitet, eine Steigerung seiner Existenz zu erleben. Luft und Boden, die Erweiterung seines Bildungshorizonts, alle die belebenden Kräfte, mit denen das in der italischen Vorzeit begonnene und erst in der Barocke vollendete Rom auf den der Geschichte des Menschen Zugewendeten wirkt; dazu eine persönliche, wie verwandtschaftliche Hinneigung zum Wesen des Südländers, die ihn rasch heimisch und glücklich machte, eine Lust an Wärme und Sonne, die ihm immer eigen war; dies Alles war von Umständen besonderer Art begleitet, an denen sich Kaibels unter den Freunden sprichwörtliches Glück bewährte.

In Rom fand er Ulrich v. Wilamowitz vor, und aus der flüchtigen Bonner Bekanntschaft wurde vom ersten Tage an eine Freundschaft, die ihn gleichfalls durchs Leben begleitet und eine Bedeutung für ihn gewonnen hat, die ich hier nicht zu schildern brauche. Damals folgte er willig der Führung durch das neue Land, das sich in diesen Jahren dem gereiften Sinne aufthat; aber er nahm auch in diesem Verhältniß nichts Fremdes an und gab nichts von seinem eignen Wesen auf. Im Februar 1873 erschien Mommsen in Rom. Er erkannte sofort die jugendliche Kraft, die hier im Werden war. Schon nach einer Woche trug er Kaibel die Bearbeitung der griechischen Inschriften von Italien und Sicilien an, für diesen, so freudig und leicht er zugriff, eine zukunftschwere Entscheidung; durch 17 Jahre seines Lebens hat ihn die Arbeit begleitet. Aber auch persönlich erfuhr Kaibel durch jenen zweimonatlichen, römisch engen Verkehr mit Mommsen eine neue und tiefe Wirkung, die dann auch bis ans Ende lebendig dauerte.

Dies sind die persönlichen Verhältnisse, dies die Männer, die auf Kaibels Entwicklung einen starken Einfluß gewonnen haben. Er war eine Natur, die ihren Weg, vielleicht einen graden Weg, sicherlich selbst gefunden hätte; aber zu seinem großen Glück wurde die in seiner Seele lebende Fähigkeit, das Große und Ueberlegene zu lieben und zum Vorbilde zu nehmen, in seiner Jugend in schönste Thätigkeit gesetzt. Später wüßte ich nicht daß in einem andern Verhältniß als in dem seiner Ehe ein Mensch auf ihn eine bestimmende und führende Wirkung geübt hätte. Als ich ihn im Winter 1873, nachdem er Griechenland besucht hatte, in Rom wiederfand, stand er in seinem Wesen festgegründet und sah seine wissenschaftliche Zukunft offen vor sich liegen.

Digitized by Google

Sein äußeres Leben konnte er zunächst nicht nach seiner Neigung gestalten. Im Herbst 1874 ging er als Hauslehrer nach Elberfeld und diente zugleich am Gymnasium das Probejahr ab. Danach fand er eine Anstellung an dem neugegründeten Askanischen Gymnasium in Berlin, in der er von Michaelis 1875 bis Ostern 1879 verblieb, mit dem besten Erfolg als Lehrer und großer Freude an dieser Thätigkeit. Aber vor allem waren es Jahre starker Arbeit, in denen seine Kenntniß der griechischen Sprache mächtig zunahm, die inschriftlichen Epigramme ihre Gestalt gewannen, für die Sammlung der griechischen Inschriften Italiens der Grund gelegt wurde. Zum Zwecke dieser Sammlung brachte er den Winter von 1877 auf 78 und später mehrmals die Ferien in Rom und Süditalien zu.

Im Druck hatte Kaibel bald nach seiner Dissertation zwei Arbeiten über die Epigramme des Simonides und vom 8. Bande des Hermes (1874) an mehrere Aufsätze erscheinen lassen, in denen meist neue griechische Inschriften publicirt und besprochen wurden.[1]) Für die Commentationes Mommsenianae schrieb er im J. 1878 die *Observationes criticae in Anthologiam graecam*, grundlegende Beobachtungen über die Technik des hellenistischen Hexameters. Endlich nach sechsjähriger Arbeit erschienen, datirt aus Rom vom 13. December 1877, Bücheler und Usener gewidmet, die *Epigrammata graeca ex lapidibus collecta*, ein Werk das den Verfasser mit einem Schlage in die vorderste Reihe der Fachgenossen rückte und dessen Werth für immer feststeht. Zwar vollständig war die Sammlung schon bei ihrem Erscheinen nicht mehr; sie fiel in das beginnende Zeitalter der Ausgrabungen hinein; ein Supplement gab Kaibel noch Anfang 1879 (Rhein. Mus. XXXIV 181), dann ging die Fluth der neuen Funde über die Sammlung hin und Kaibel gab bald die in der Vorrede ausgesprochene Absicht auf, sie beständig zu erneuern. Aber die Bedeutung des Buches lag zum kleineren Theil in der Umspannung des Materials. Vor allem stellte es die zumeist ephemere und dilettantische, aber durchaus

[1]) Die Recension von Junghahn, *De Simonidis Cei epigrammatis* in Fleckeisens Jahrb. 1872, 793 ff., *Quaestiones Simonideae* im Rhein. Mus. XXVIII 486 ff. In der Hauptsache ist Kaibels Auffassung (gegen Bergks unschöne Polemik Poet. lyr. gr. III [4] 431 ff.) durch die auf Salamis gefundene Inschrift der Korinther bestätigt worden (Wilamowitz in diesen Nachr. phil.-hist. Kl. 1897, 306 ff.). Hermes VIII (1873) 412 *Tituli Phocici et Boeotici inediti*, X 1 *De Callimachi epigrammate 43* (über den auf dem Esquilin gefundenen Dipinto) 193 (über das pamphylische Würfelorakel), XI 370 *Parthenianum* u. a. Dann XV 449, schon aus Breslau, der *Sententiarum liber primus*.

Digitized by Google

an die Kunstübung ihrer Zeiten oder der klassischen Muster angelehnte Massenproduction der Grab- und Weihepigramme in ihren Zusammenhang mit der litterarischen Poesie; auf dem Wege einer Interpretation und Herstellungskunst, die in alle Falten von tausend unscheinbaren Individualitäten eindrang, mit dem harmonischen Reiz einer aufs knappste beschränkten, Gedanken weckenden Form. Es war das erste Muster auf einem neuen Gebiet epigraphisch-litterarischer Arbeit.

Die nächste Folge war die Berufung nach Breslau, die er im December 1878 erhielt. Er hatte die ersten Schritte gethan, sich in Göttingen zu habilitiren, und nur jene rasche Entscheidung hinderte, daß er wie die Studenten- so die Docentenlaufbahn in Göttingen begann, wo er sie beschließen sollte.

In Breslau blieb er zwei Jahre, in den ersten Freuden und Nöthen des akademischen Lehramts. Er hat gleich in diesen Anfängen einige junge Philologen, die jetzt in vorderer Reihe stehen, auf ihren Weg geführt. Das einzige was er während dieser Jahre drucken ließ war der *Sententiarum liber primus* (Hermes XV) und, als erster Beitrag zu den Tragikern, die ausführliche Recension von Henses Studien zu Sophokles (Zeitschr. f. d. Gymnasialwesen XXXIV 618). Aber eine Verflechtung der Schicksalsfäden ließ ihn hier die Braut erwerben und mit ihr das häusliche Glück der ihm noch bestimmten zwei Jahrzehnte.

Als junger Ehemann wurde er Ostern 1881 nach Rostock berufen. Während er in Breslau neben drei Ordinarien das wesentlich für einen Gräcisten bestimmte Extraordinariat versehen hatte, fiel in Rostock die gesammte klassische Philologie in seine Hand; eine unschätzbare Uebung für den jungen Professor und, zumal unter den eine ganz neue Grundlegung des philologischen Unterrichts erfordernden Rostocker Verhältnissen, eine Gelegenheit seine Kraft zu zeigen. Ich habe als sein Nachfolger ermessen können, wie stark seine Wirkung auf die Jugend gewesen ist und wie er der Universität das fehlende Element wissenschaftlicher Philologie aus seinem Schatze zugeführt hat. Hier trat der Athenaeus in den Vordergrund, wie die beiden Programme von 1883 zeigen.[1]) Anfang 1882 übernahm er, mit C. Robert zusammen, die Redaction des Hermes.

An eine Universität von alter philologischer Tradition und auf eine Stelle, in der er sich, neben A. Kießling, ganz seinen

[1]) Ich erwähne, weil sie versteckt ist, die Abhandlung *De inscriptione Halaesina* (Festschrift für die Würzburger Säcularfeier am 1. August 1882).

Digitized by Google

griechischen Neigungen hingeben konnte, führte ihn Herbst 1883 der Ruf nach Greifswald. Auch hier blieb er nur fünf Semester, deren vorletztes durch die Bearbeitung der Epigramme Philodems bezeichnet ist (ind. schol. 1885), eine der vollkommensten Proben seiner Kunst zu interpretiren; das letzte durch die tiefgreifende Abhandlung *Antike Windrosen* (Hermes XX).

Endlich fand er, im Frühjahr 1886, in Straßburg die Stätte, an der er festwurzelte und, zuerst mit Reifferscheidt, dann mit mir, dann mit Kießling, dann mit Reitzenstein zusammen das Seminar leitend, an der Seite von Michaelis und mit einigen Jüngeren in enger Gemeinschaft die Entwicklung der klassischen Philologie an der jungen Universität mit seiner Person verknüpfte. Straßburg sagte ihm in jeder Hinsicht zu, Local und Menschen, die südliche Wärme, die Nähe der Berge und Italiens, das eigne Haus an der Ruprechtsauer Allee, in dem die Kinder fröhlich aufwuchsen. Hier vollendete er die Arbeiten vorangegangener Jahre und ergriff neue Aufgaben. Die 3 Bände des Athenaeus erschienen (II 1886, I 1887, III 1890) und, bald nach dem dritten Bande, auch der Begleiter so vieler Jahre, der gewaltige Band der *Inscriptiones graecae Siciliae et Italiae* (1890). Der Athenaeus, dessen Textgeschichte Kaibel zuerst richtig erkannt hatte, war der philologischen Welt ein sehnlich erwartetes Geschenk, ihm selbst eine wichtige Vorarbeit für seine Comici. Die Inschriften mit ihren unzähligen das Thatsächliche betreffenden kleinen Problemen hatten ihn als eine schwere Last gedrückt und er empfand das Gefühl einer neuen Freiheit, als er im October 1890 das Werk hinausgab. Vom 31. December desselben Jahres ist die editio princeps der *Πολιτεία Ἀθηναίων* des Aristoteles datirt; in den nächsten Osterferien arbeitete er in Göttingen mit Wilamowitz an der gemeinschaftlichen Ausgabe (1891, 3. Aufl. 1898), 1893 erschien das Buch *Stil und Text der Πολιτεία Ἀθηναίων des Aristoteles*, das einen kritisch-exegetischen Commentar und vorher eine Charakterisirung von Sprache und Stil enthält, einen der wenigen Versuche, durch stilistische Untersuchung die Wirkung des Ganzen auf das Einzelne und des Einzelnen auf das Ganze darzustellen. Der Commentar zu Sophokles Elektra (1896) erklärte der gangbaren Sophokleskritik den Krieg und lehrte, indem die Exegese des Einzelnen auf die des Kunstwerks gerichtet war, Sprache und Stil eines großen Dichters verstehen. 'Die Emendation', heißt es in der Vorrede, 'ist eine seltene Blume, die wenn irgendwo auf dem Felsen der Interpretation wächst'. 'Der große Dichter schafft sich seine Sprache und seine Kunst

Digitized by Google

selbst: sie entwickelt sich mit ihm, wächst mit ihm und stirbt mit ihm wie sein δαίμων; er hat sie selbst nicht geerbt und kann sie auch keinem andern vererben'. Kaibel geht an gewissen Stellen zu weit in der Schätzung dessen was noch von Sophokles herrühren kann; er scheute sich nicht, in der Reaction gegen das unverständige Conjecturenmachen zu weit zu gehn, wenn es nur auf dem Wege war, der an das Fühlen und Denken des Dichters selbst heranführte. Neben diesen Werken her gingen die vorbereitenden Arbeiten für die auch seit langen Jahren geplante, aber erst in Straßburg angepackte Fragmentsammlung der griechischen Comici; die Aufsätze zur Geschichte der attischen Komödie (Hermes XXIV 35, 71), zu Xenophon (XXV 581), Herodas (XXV 1580), Theokrit (XXVII 249), Arat (XXIX 82, Gött. Gel. Anz. 1893, 937), Kallimachos (XXXI 264), dazu die ferneren vier *Sententiarum libri.*

Wer die beständige anstrengende Arbeit gesehen hat, die Kaibel auf seine Vorlesungen und überhaupt auf den akademischen Unterricht verwendete, muß über diese Fülle der Production erstaunen. Er arbeitete mit beispielloser Intensität, an amtsfreien Tagen vom Morgen bis in die Nacht ohne auszugehn und ohne anders als mit schwerer Ueberwindung auch nur einen andern Gegenstand als den morgens ergriffenen vornehmen zu können. Die Zeichen seines letzten Leidens peinigten ihn gelegentlich von der Greifswalder Zeit an; sonst waren Nerven und Kopf jeder Zumuthung gewachsen.

In den letzten Straßburger Jahren enttäuschte ihn die nicht durch die Schuld des Lehrkörpers stockende Entwicklung der Universität. So durfte unsere philosophische Facultät es versuchen, ihn, dessen Ruf als eines der ersten lebenden Gräcisten längst feststand, für die im Frühjahr 1897 von Wilamowitz leer gelassene Stelle zu gewinnen.

Ueber Kaibels Göttinger Jahre, so voll und reich seine Thätigkeit gewesen ist und so vielfach und stark die Fäden, die er geknüpft hat, brauche ich Ihnen nicht zu berichten. Unsrer Gesellschaft hat er vom ersten Tage an zugehört und unsern Verhandlungen und Schriften so viel Leben und Förderung zugeführt wie es seine Auffassung übernommener Pflichten mit sich brachte. Einen wichtigen Theil seiner Vorarbeiten für die Komikerfragmente legte er uns in der Abhandlung *Die Prolegomena περὶ κωμῳδίας* vor (Abh. phil.-hist. Kl., N. F. II 4, 1898), ferner Mittheilungen über die Papyrusreste von Menanders *Γεωργός* und eines Komödienprologs (Nachr. phil.-hist. Kl. 1898, p. 146; 1899, 549), in den

Digitized by Google

Gelehrten Anzeigen besprach er Zachers Aristophanes (1897, 859) und Herzogs Koische Forschungen und Funde (1900, 58). Für die Universität schrieb er in den Jahren 1897 und 1899 die Programmabhandlungen *De Sophoclis Antigona* und *De Phrynicho sophista* und hielt am 27. Januar 1898 die Festrede *Wissenschaft und Unterricht*. Der Hermes brachte 1899 die wichtige Abhandlung *Cassius Longinus und die Schrift περὶ ὕψους* (XXXIV 107). In der Hauptsache gehörte die Arbeit dieser Jahre den *Comicorum graecorum fragmenta*, deren erster Theil wenigstens, die sicilisch-italische Komödie, 1899 erschien; von den geliebten Attikern hat er nichts zu Ende führen dürfen, obwohl vieles so weit gebracht war, daß er dafür nur weniger Monate noch bedurft hätte.

Ueberblicken wir Kaibels Lebensarbeit, so ist vor allem deutlich: das Centrum seines wissenschaftlichen Wesens war die Sprache. Als Kenner der griechischen Sprache, in Beherrschung ihres Stoffes und lebendiger Empfindung ihres Geistes, hat er nur wenige seines gleichen gehabt. Im Attischen wurzelte er am tiefsten, wie es sein mußte; Aristophanes, Sophokles, Platon waren seine nächsten Vertrauten. Aber er umspannte allmählich den ganzen Kreis der Dialekte und der litterarischen Sprachgebiete. Seine Arbeiten über Homer, Herodot, Pindar sind weder erschienen noch geschrieben, aber sie lagen fertig in seinem Geiste und harrten nur der Zeit, die ihnen nicht beschieden war. Die hellenistische Poesie war ihm seit seiner Studentenzeit zu eigen; auch sein Theokrit ist mit ihm verloren, über dessen Edition er so viel mit Wilamowitz correspondirt und conversirt hat wie über Kallimachos und Aristoteles. Er konnte jedem griechischen Worte seine Sprachschicht, jeder Wendung ihre Stilschicht anweisen; jede poetische und prosaische Gattung, jede schriftstellerische Individualität war ihm vertraut oder wurde es rasch, wenn ihn nicht eine sittliche Abneigung fernhielt.

Diese sprachliche, litterarische, ästhetische Richtung seiner Philologie war mitbestimmt und gefärbt durch eine starke künstlerische Anlage, deren er sich wohl bewußt war, die er ausbildete und pflegte, aber mit scheuer Zurückhaltung, wie er denn nicht leicht etwas nach außen brachte was Andere nach seiner Ansicht besser konnten. Er hat in Straßburg lange Jahre hindurch unter Jacobsthals Leitung musikalische Composition gelernt; seine griechischen Epigramme sind vielleicht die besten seit dem Kranze des Philippos; noch in den letzten Wochen hat er sein Leiden in herrlichen Versen ausgesprochen. Sein Wesen hat stets etwas von der

Digitized by Google

Freiheit und dem Fluge der Künstlerseele gehabt. Seine Schreibart, lateinisch wie deutsch, war von seltener Anmuth und in der reifen Zeit von einer bewußten Kraft, die der trockensten Erörterung Reiz gab. Diese Seite seines Wesens verband ihn am sichersten mit dem griechischen Geiste, wie er sich in Gedicht und Rede ausgesprochen hat.

So war er durch Natur und Bildung zum Editor und Exegeten bestimmt. In der Bewegung, die durch die Philologie unsrer Zeit geht, Kunst und Stil der litterarischen Gattungen und Persönlichkeiten zu erfassen, haben seine Arbeiten eine führende Rolle gespielt und werden lange als Muster und durch productive Wirkung leben.

Die Ergänzung hierzu ist, daß ihm politische und Culturgeschichte, Archäologie und alle realen Disciplinen ferner lagen, so großen Raum auch in seiner Production die im engeren Sinne epigraphischen Arbeiten einnehmen. Die Realien waren ihm persönlich Rüst- und Handwerkszeug, Gegenstand des Lernens mehr als des Forschens. Nur ungern hat er eine Zeitlang das Straßburger Institut für Alterthumswissenschaft geleitet. Er stand in der von G. Hermann und Lachmann ausgehenden Linie, die auch nach der Befestigung des neuen Begriffs der philologischen Wissenschaft sich mit Entschiedenheit auf Kritik und Interpretation, Sprache und Stil, die Litteratur und ihre Geschichte gerichtet hat. Erst in der letzten Zeit hat er, anscheinend durch die Anregung eines Moments, eine Verhandlung im Seminar, getrieben, sich der constructiven Behandlung weitgreifender historischer Fragen hingegeben. Es war ein Problem das ihn tief in religionsgeschichtliche Untersuchung, an die Anfangsgebilde des menschlichen Geistes führte und ihn wie keines zuvor zu immer weiteren Ausblicken hinriß. Er hat nur die vorläufige Fassung eines Abschnitts hinterlassen, die in unsern Nachrichten (1901, 488) veröffentlicht worden ist, als ein Zeugniß für das letzte Wachsthum seiner Geisteskraft, da schon der Körper sich gegen den Griff der Krankheit wehrte.

Zunächst wird es am härtesten empfunden werden, daß die Comici unvollendet geblieben sind; denn die Vorarbeit war gethan, in einem Stil, wie es seit Meineke nicht wieder versucht worden ist. In dem letzten ganz eingehenden Gespräch, das ich mit ihm hatte, brach er einmal in die Worte aus: 'wenn ich nur Aristophanes mit den Scholien noch machen könnte!' — es war die Liebe seiner Studentenzeit. Er selbst empfand am stärksten und er wußte es am besten, denn alles Unfertige barg er im Busen, wie

Digitized by Google

viel der Erscheinung Harrendes er mit hinunter nahm. Aber Freunden und Genossen des engeren und weiteren Kreises erscheint es fast wie ein Unrecht, bei solchen Gedanken zu verweilen, wenn sie den persönlichen Verlust bedenken.

Kaibel hat es sich in der Anmerkung zu einem attischen Epigramm (Epigr. gr. 64), so karg er da sonst mit Worten war, nicht versagen können zu bemerken, daß er das dem Todten gespendete Lob, er habe im Leben immer aller Menschen Wohlgefallen erregt, wunderlich finde und daß er sich Antigones Rede lobe: *ἀλλ' οἶδ' ἀρέσκουσ' οἷς μάλισθ' ἁδεῖν με χρή*. Er machte Niemanden ein Hehl daraus, daß ihn anspruchsvolles und triviales Wesen zum Zorn reizte, daß Eitelkeit und Ziererei seine Abneigung, Halbheit und Falschheit seine Verachtung erregten. Wissenschaft und Leben galt ihm gleich, denn was er trieb das war er. Dem sittlich Unzulänglichen gegenüber schroff und reizbar in jüngeren Jahren wurde er zuletzt nicht lässiger, aber er ließ sichs weniger merken. Wo ihm nichts hindernd entgegentrat, da erschien die kindliche Simplicität seines Wesens, die unbefangene Heiterkeit, eine besondere und seltene Art einer aus reiner Seele und aus der Tiefe eines reichen Geistes quellenden Liebenswürdigkeit; hier gilt das Wort; sie sprach aus den Bewegungen seiner hohen und schlanken Figur, aus dem Leuchten seiner tiefliegenden Augen, aus seinem Lächeln, daß keiner vergißt dem es einmal gegolten hat.

Er hatte aus der dunklen Existenz seiner Kindheit sich und die Seinen auf die Höhe des Lebens gehoben; er hatte, seit er zum Bewußtsein seiner eignen Natur gekommen war, keinen verhängnißvollen Fehltritt gethan; er war in sich einig und kannte keinen inneren Zwiespalt. Das alles dankte er seiner Wissenschaft, so schätzte er sie als den Stern seines Lebens. Stolz und Bescheidenheit kamen ihm aus derselben Quelle; seine Kraft und seine Schwäche kennend schritt er durchs Leben, kühn und demüthig, das Haupt erhoben und bereit es vor dem Großen und Guten zu beugen.

Es war ein glückliches Leben, so schwer ihm der Tod wurde. Denn die kalten Schatten schreckten ihn, dessen Element Sonne und Wärme war. Als die Krankheit vor ihm die Pforten des Lebens schloß, hoffte er sie wieder zu durchbrechen, hoffte so lange er durfte und länger. Auch diese Hoffnung war ein bitteres Leiden; sie hat sich wenige Wochen vor dem Ende in einem Gedicht von tragischer Schönheit ausgesprochen: ein einziger Stern erscheint dem verzweifelnden Schiffer, unzählige werden ihm folgen

Digitized by Google

— da stürmt aus der purpurnen Tiefe, vom grimmen Nord gespornt und gepeitscht, die grause Charybdis mit tausend weißen Krallen über die Schiffswand und reißt sie in Stücke[1]).

Doch war es ein schönes und glückliches Leben. Und wenn es wahr ist, daß die Götter wen sie lieben jung von hinnen nehmen, so bleibt es auch wahr, daß ihn Menschen und Götter geliebt haben.

---

1) Ich glaube die Strophe hier mittheilen zu dürfen, als ein Dokument von Kaibels Sprachkraft und poetischem Vermögen. Auf dem Blatte, das er mir gab, hat er vermerkt: *5.—10. Aug. 1901, niedergeschrieben 12. Aug..*

Ἐλπὶς γλυκεῖ', ὡς μοι νέον αὖ μειλιχίων ἀπ' ὀμμάτων προσγελᾶις,
κεναῖσιν αἰκάλλουσα παραιφασίαις τὰν φιλόψυχον φρένα.
οἷάπερ ἐκ βαρυόμβρων νυκτὸς χειμαλέας πτυχῶν
ἐκδύς τις εἰς ἀστὴρ παναργυρέοι φάει
πλεόντων τὰν ὀίψασπιν ἀθυμίαν εἰς ὑπερόφρονα τρέψε τόλμαν.
εἷς γὰρ ἦν· οὐδ' ἄρ' ἔτ' ἄλλοι φάνεν μετ' αὐτοῦ· τοὶ δ' ἀπειρίτους ἔσεσθαι
φάντο κατὰ βραχύ· θᾶσσον δ' ὀνείρου
βένθεος ἐκ πορφυρέου δεινὰ Χάρυβδις μυρίαισιν ἀργενναῖσι
χαλαῖς ὑπερθρώσκουσα τοῖχον ἐξήρπαξε πάντα χειρὸς ὡς ἐκ μιᾶς.
τοῖος γὰρ ἵππευς ἐμβέβακέ οἱ στεναζούσαι·
πλευρὰ λακτίζων τε μαστίζων τέ οἱ νῶθ' ἱμάσθλαις
αὐτὸς ὁ Θρηίκιος Βορέας βάρβαρά θ' αἱματηρά τ' ἀπὸ γλώσσας καταστάζων ἔπη,
ἀπαρήγορος Ἄϊδεω πρόπολος. ═══

Digitized by Google

Adolf Erik von Nordenskiöld.

Von

Hermann Wagner.

Am 11. August vorigen Jahres verließ das deutsche Südpolarschiff, das einen uns teuern Namen trägt, den heimatlichen Hafen, begleitet von der freudigen Teilnahme und den hoffnungsvollen Wünschen aller an der Erschließung des Erdballs interessierten Kreise. Die Briten waren, dem gleichen Ziele zueilend, kurz zuvor aufgebrochen. Die Morgenröte der Lösung des letzten großen geographischen Rätsels, welches dem kommenden Jahrhundert verblieb, der Entschleierung der Antarktis, leuchtete auf. — Doch als sollten im gleichen Moment die Fahnen sich senken über dem Gebiet ringsum den Nordpol, das durch so viele Jahrzehnte Kraft, Ausdauer und Opferfreudigkeit der gleichen Kreise allein in Anspruch genommen, ward am Tage darauf der Mann uns genommen, dessen Name mehr als irgend ein Zeitgenosse die wissenschaftliche Polarforschung in sich verkörperte.

Am Abend des 12. August raffte unerwartet und ohne vorhergehende Krankheit ein Herzschlag den Freiherrn Adolf Erik von Nordenskiöld dahin; er hatte das 69. Lebensjahr noch nicht vollendet. In unserer Mitte das letzte der Ehrenmitglieder aus einer vergangenen Zeit. Als Polarforscher von Weltruf und selbst von einem Fridtjof Nansen nicht überstrahlt gilt er uns mehr noch, — als einer der Heroen unserer Zeit auf wissenschaftlichem Feld, dem nicht nur mutvoll mit Einsetzung von Leben und Gesundheit im Dienste der Forschung Unternommenes gelang, sondern der groß war im Angriff neuer Probleme, in dem beharrlichen Verfolg seiner Ideen und in der Kraft, sie zu einem Ganzen zu gestalten. Ein Leben liegt vor uns, so reich an Bewegung und Thaten, Leistung und Erfolg, an rastloser Arbeit des kühnen Forschers wie des stillen Gelehrten, daß es schwer ist, in flüchtigen Minuten ein Bild zu entwerfen, das ihm gerecht wird.

Digitized by Google

Die große Periode der Polarforschung um die Mitte des 19. Jahrhunderts war abgeschlossen. Die Kraft der Briten hatte sich an der Lösung des Problems der nordwestlichen Durchfahrt und der Aufhellung des Schicksals von Franklin und seiner Gefährten erschöpft. Als Mac Clure 1854 heimkehrte, legte die Admiralität ihr Veto gegen fernere größere Unternehmungen ein. Nur einmal noch sandte die hochbetagte Lady Franklin Boten in die unwirtlichen Gewässer.

In dieselbe Zeit fällt die Anbahnung eines Wendepunkts in der Erklärung eines naturwissenschaftlichen Phaenomens, das mehr und mehr anfing, Geologen und Geographen zu beschäftigen. Die Ueberzeugung, daß sich auf der nördlichen Hälfte unserer Hemisphaere am Beginn der jüngsten erdgeschichtlichen Epoche eine ungeheure Umlagerung lockerer Gesteinmassen durch den Transport von Eis vollzogen habe, hatte sich bereits durchgekämpft. Nach Lyell und seiner Schule sollten es schwimmende Eisberge gewesen sein, welche die erratischen Blöcke und Geschiebemassen über das norddeutsche Flachland und andere Niederungen ausgebreitet haben. Dagegen erhob sich damals zuerst der Schwede Otto Torell, um nachzuweisen, daß wir es vielmehr mit einer mächtigen zusammenhängenden Decke von Inlandeis zu thun haben. Heute wissen wir, daß diese, von dem skandinavischen Hochgebirge allseits ausstrahlend, wiederholt ihre Bänke über die flachen Becken von Nord- und Ostsee schob und zu Zeiten erst am deutschen Mittelgebirge einen Halt fand.

In dieser Zeit tritt der jugendliche Nordenskiöld in die wissenschaftliche Arena. Er brachte eine gründliche allseitig wissenschaftliche Vorbildung und jene körperliche Schulung aus seiner rauhen finländischen Heimat mit, die ihm nachmals durch Jahrzehnte die Unbilden polaren Klimas ohne Schädigung überdauern ließ.

Die Familie der Nordenberg, wie sie bis zu ihrer Nobilitierung um die Mitte des 18. Jahrhunderts hieß, stammte aus Upland, der schwedischen Provinz im Norden Stockholms, von der die Inselbrücke der Ålands nach Finland hinüberführt. Dorthin war ein Zweig der Familie gewandert. Sie hat sich diesseits und jenseits des Bottnischen Busens durch hervorragende Männer ausgezeichnet, in denen, wie uns Nordenskiöld selbst erzählt, „eine ausgesprochene Liebe zur Natur aber auch das Streben nach wissenschaftlicher Erforschung ihrer Erscheinungen lebte“. Gustaf Nordenskiöld, der Vater des Polarforschers, war ein Schüler und Freund von Berzelius und Chef des gesamten finländischen Bergwesens, der seinen aufgeweckten Sohn früh auf seinen Reisen,

Digitized by Google

bis in den Ural hinein, mitnahm. Auf dem Stammsitz Frugord in Finland hatte dieser die Vorzüge einer vornehmen Erziehung genossen. Auf breiter, sorgenfreier Grundlage lebend führten viele schwedische Familien in Finland die gleiche glückliche Existenz inmitten einer geistig angeregten Atmosphaere, wie die Deutschen in den baltischen Provinzen.

Nordenskiölds Studien breiteten sich, seit er die Universität Helsingfors bezog, über alle Zweige exakter Naturforschung aus, konzentrierten sich nachmals behufs Gründung einer Lebensstellung mehr und mehr auf Mineralogie und Geologie. Die weitaus größte Zahl seiner spätern Einzeluntersuchungen ist mineralogischen Inhalts.

Trotz der politischen Trennung sind die geistigen Bande zwischen Finland und Schweden enge geblieben. Sie werden mit Begeisterung von der akademischen Jugend gepflegt. Hie und da warfen schon zu Alexanders II. Zeit die spätern Ereignisse, unter denen Finland heute seufzt, ihre Schatten. Der Krimkrieg hatte den Grafen Berg, einen Feind aller freiheitlichen Bestrebungen, an die Spitze der Verwaltung des Großfürstentums gebracht. Das freimütige Hervortreten des jungen Nordenskiöld, als die Wogen der skandinavischen Begeisterung bei einem akademischen Fest, zu dem Lund und Upsala Teilnehmer gesandt, etwas höher schlugen, kostete ihm die erste Anstellung in der Heimat. Er ging nach Berlin, wo er in Rose's Laboratorium arbeitete, und von da nach Schweden; dort kam er gerade recht, um an der ersten Expedition Torells nach Spitzbergen sich zu beteiligen. Als er darauf 1858 besuchsweise nach seiner finländischen Heimat zurückkehrte und man den fähigen Mann gern für einen Lehrstuhl gewonnen hätte, falls er — wenn auch nur vertraulich — die Erklärung abgeben wolle, sich ferner nicht in politische Angelegenheiten zu mischen, lehnte er solches Ansinnen rundweg ab. Auch später verfing der Appell an seine junge Gattin, die sich schon damals als die unerschrockene Lebensgefährtin des großen Reisenden erwies, nicht. Mit den Worten „Aber mein Mann ist ein sehr entschiedener Charakter" schnitt sie die Zumutung weiterer Vermittelung ab. Damit ward Nordenskiöld endgültig jener Nation zurückgegeben, die alsbald an die Spitze der Polarforschung treten sollte.

Als er im Dezember 1858 über die Ålandsinseln seiner neuen Heimat zueilte und in der Ungeduld sein Ziel zu erreichen auf Schlittschuhen kühn über die manchmal zu dünne Eisfläche dahin flog, brach er dreimal an einem Tage ein, ein unfreiwilliges Bad

Digitized by Google

bis an den Hals nehmend. Bei seinem gestählten Körper, der noch andere Proben bestehen sollte, verlief die Fahrt ohne nachteilige Folgen. —

An den Nordwestfahrten der Engländer in den vierziger und funfziger Jahren hatten sich Naturforscher nicht beteiligt. Die Helden jener Tage gehören ausschließlich dem Offiziercorps der britischen Marine an. Vom kleinen Schweden aus ward nunmehr eine neue Epoche der Polarforschung begründet, in der die bisherige Hauptaufgabe der Aufsuchung unbekannter polarer Inseln, Küsten und Meeresstraßen zurücktritt hinter dem ausgesprochenen Zweck allseitiger wissenschaftlicher Durchforschung erreichbarer Gebiete. Das neu formulierte Problem der Eiszeit richtete unter Torells Führung die Blicke eines kleinen Kreises schwedischer Forscher der Inselgruppe von Spitzbergen zu. Diese war lange ausschließlich der Schauplatz des Walfischfangs und der Robbenschlägerei gewesen, war aber bei vermindertem Ertrag allmählich verlassen.

Torell wünschte längs des Saumes großer Felder von Inlandeis, das auf Spitzbergen vermutet ward, das Gletscherphaenomen in seinen größeren Wirkungen näher zu erforschen. So klein diese ersten Expeditionen geplant waren — sie blieben lange auf einen Polarsommer beschränkt —, so war die Ausdehnung wissenschaftlicher Fragestellung und dementsprechend die Mitnahme zahlreichen wissenschaftlichen Personals von Anfang an das Neue und Typische der schwedischen Expeditionen. Sie werden daher stets einen Ehrenplatz in der Geschichte der Polarforschung behalten.

Für solche Aufgaben war Nordenskiöld mit seinem umfassenden Wissen, seinem praktischen Blick, seinem Muth und seiner zähen Ausdauer der richtige Mann. Er erhielt die Aufforderung sich an der ersten jener Fahrten zu beteiligen. Und schon von dieser ersten Reise 1858, die sich in den Westfjords der zerrissenen Hauptinsel abspielte, brachte er einen reichen Schatz fossiler Tertiärpflanzen mit. Später durch die neuen Expeditionen der Schweden ergänzt, boten sie das Urmaterial zu Oswald Heer's großem Meisterwerk der „Fossilen Flora der Polarländer". Dieser Schweizer Forscher ist nie müde geworden zu verkünden, wie weit diese palaeontologischen Funde alle etwaigen Küstenentdeckungen oder sonstigen Aufschlüsse, die die Schweden zurückgebracht, an Bedeutung übertreffen.

Nordenskiöld hatte inzwischen die Direktion der mineralogischen Sammlung im Reichsmuseum zu Stockholm erhalten, die

Digitized by Google

nach Solanders Tod verwaist war. Ein Lehramt war damit nicht verbunden. Er behielt diese Stellung bis zu seinem Tode und hat die Sammlung ungemein bereichert und das Institut als eine Musteranstalt zurückgelassen. Zahlreiche mineralogische Arbeiten ziehen sich durch die Jahrzehnte ruhigerer Forscherthätigkeit hindurch. Geologische Reisen in Schweden, deren Ergebnisse gleichfalls in einer stattlichen Zahl von Einzelabhandlungen niedergelegt sind, ließen ihn den Boden seines Vaterlandes gründlich kennen lernen. Aber es trieb ihn immer wieder hinaus zu größeren Aufgaben in unerforschtem Gebiet. Auch auf der zweiten schwedischen Fahrt nach Spitzbergen 1861 war er neben Torell die Seele der Unternehmung; die dritte im Jahre 1864 führte er in Begleitung eines Stabes von Fachmännern bereits allein. Nicht nur als Geologe, sondern auch als Astronom und Topograph beteiligte er sich unmittelbar an den Aufnahmen, sodaß Spitzbergens Küsten bald ein anderes Gesicht auf unsern Karten erhielten. Schon 1861 verfolgte Nordenskiöld im Verein mit Dunér voll Eifer den Plan, auf der Inselgruppe eine Gradmessung durchzuführen, also unweit des 80° Br.; jenseits des Polarkreises hatte man damals noch niemals eine solche versucht. Und wenn wir die schwierige Aufgabe erst in jüngster Zeit von Schweden und Russen durchgeführt sehen, so verdankt man die ersten grundlegenden Bestimmungen Nordenskiölds Initiative. Biologische Untersuchungen, magnetische und meteorologische Beobachtungen wurden nicht vernachlässigt; epochemachend für die Kunde der Ozeäne wurden die Tiefseemessungen der Schweden im Nordwesten Spitzbergens. Kurz thatsächlich erheben sich diese schwedischen Expeditionen durch die Fülle der Gesichtspunkte, die in den Kreis der Forschung gezogen wurden, und die Sorgfalt der wissenschaftlichen Vorbereitung weit über alle frühern.

Die Zeit kam, wo der Wetteifer der Nationen zur Vollendung der arktischen Polarforschung erwachte. Die Pionierarbeit des schwedischen Volkes hatte gezündet! In Deutschland erhob sich Petermanns Stimme, um den Weckruf auch unter uns erschallen zu lassen. Lange vergeblich! In Schweden wußte Nordenskiölds gewinnende, ja durch das Feuer der Begeisterung für Inangriffnahme wissenschaftlicher Aufgaben faszinierende Persönlichkeit rascher, private Kreise zu Opfern zu bewegen, als der Staat erklärte für die gleichen Interessen während eines Jahrzehntes genug gethan zu haben. In dem Kronprinzen Oskar fand er früh einen hülfebereiten Gönner und wahren Freund. Auch als König

Digitized by Google

förderte ihn dieser edle, echt wissenschaftlich gebildete und von wissenschaftlichem Geist durchwehte Fürst, wo er immer konnte. In der Periode, von der hier zunächst die Rede, brachte die Gothenburger Kaufmannschaft, unter der sich bald Oskar Dickson durch großartige Freigebigkeit hervorthat, die Mittel zu einer neuen größern Expedition zusammen. Dem Zeitgeist entsprechend sollte nunmehr neben den gleichen vielseitigen Aufgaben der Meeresforschung eine möglichste Annäherung an den Erdpol versucht werden.

Mit der Sofia verließ Nordenskiöld 1868 die Heimat. — Aber trotz aller Anstrengungen gelang es ihm nicht, nördlich von Spitzbergen höher als bis 81°42′ Br. zu kommen. Immerhin war dadurch zum ersten Male die Breite überschritten, die Scoresby zu Schiff einst erreicht hatte, — ein bedeutender Erfolg — aber hinter dem Punkt, bis zu welchem schon 1827 Parry mittelst Schlittenreise vorgedrungen war, blieb er doch noch um einen vollen Grad zurück.

Seit dieser Zeit entbrannte mehr und mehr der Kampf der Meinungen, ob das Polarbecken ein offenes Meer sei, nur schwierig zugänglich durch Eisschranken von wechselnder Breite und schwankendem Bestand. Oder ob sich nicht vielmehr eine zusammenhängende, mehr oder weniger feste Eisdecke dauernd darüber lagere; ob also versucht werden müsse den Pol zu Schiff oder mittelst des Schlitten zu erreichen.

Petermann verfocht den Gedanken des offenen Polarmeeres und fand fast bei allen Nationen außer den Schweden Zustimmung. Nordenskiöld ließ sich in seiner gegenteiligen Ansicht nicht irre machen und mit jener zähen Hartnäckigkeit, die nicht zum geringsten ein typischer Zug seines Charakters war, verfolgt er nunmehr durch Jahre die Ausrüstung einer Schlittenexpedition, freilich auch ohne Wechsel des bisherigen Ausgangspunktes.

Um die Brauchbarkeit grönländischer Hunde für diese Zwecke zu erproben, eilte er selbst 1870 an Grönland's Westküste. Aber seinem regsamen Geist und scharfen Auge eröffneten sich dort sofort neue interessante Probleme von größter Tragweite. Vor allem die Frage, ob die mächtige Eiswand, die plötzlich unweit der Küste abbricht, um einem moränenlosen Saum vor sich Raum zu lassen, wirklich, wie der Däne Rink seit zwanzig Jahren behauptete, einer ganz Grönland bedeckenden Eiskalotte angehöre, oder ob sie nur einen schwachen Eisrand bilde, hinter dem Gebiete sich fänden, frei von Eis und mit Vegetation bedeckt. Ein kurzer Besuch des Randes läßt ihn zugleich den seltsamen

Digitized by Google

Kryokonit, den Eisstaub, in den zahllosen Eislöchern der Oberfläche der Eisdecke studieren. Auf der Insel Disko entdeckte er die riesigen Meteoriten von Ovifac, die später von einem Kriegsschiff nach Schweden überführt wurden und in ihrer Analyse einen mächtigen Impuls für die wissenschaftliche Kontroverse über die Herkunft derartiger Gebilde geboten haben.

Die grönländischen Hunde erwiesen sich als unbrauchbar. Nun ließ Dickson Rentiere ankaufen und abrichten und endlich ward 1872 die Fahrt mit drei Schiffen begonnen, die Nordenskiöld zum ersten Male die Schrecken der Polarnacht kennen lehren sollten. Aber das oft gerühmte Glück schien Nordenskiöld verlassen zu haben. Die Rentiere entwichen sämmtlich bei den ersten Versuchen ihres Gebrauches; nicht nur die zwei Begleitschiffe, die vor dem Winter zurückkehren sollten, auch zahlreiche notleidende Walfischfänger, die sich verspätet hatten, mußten den Winter über mit verproviantiert werden; man mußte im folgenden Jahre zurückkehren, ohne irgendwie über Spitzbergen hinausgekommen zu sein.

Petermann triumphierte, der schwedische Mißerfolg schien seine Annahmen zu bestätigen. Auf dem von ihm so oft vergeblich empfohlenen Wege gelang es der Oesterreichischen Expedition unter Payer und Weyprecht, mit geringen Mitteln die neue Inselgruppe Franz-Josephsland zu entdecken. Nach der rein geographischen Seite waren dadurch allerdings die Errungenschaften der Schweden in den Schatten gestellt. Freilich kehrten auch die Oesterreicher mit der Ueberzeugung zurück, daß nördlich des 80° von einem offenen Polarmeer nicht die Rede sei. —

Nordenskiöld's Wagemut war nichts weniger als gebrochen. Aber er wendet seine Blicke nun doch nach einer anderen Richtung. Weit früher, als die Versuche eine nordwestliche Durchfahrt zu erzwingen, hatte man am Ende des 16. Jahrhunderts diejenigen aufgegeben, ostwärts um den Nordrand Asiens herum nach dem Stillen Ozean und China zu gelangen. Fast drei Jahrhunderte ruhte nach dieser Richtung die Forschung gänzlich. Karl Ernst von Baer's berühmter Ausspruch, daß das Karische Meer im Osten von Nowaja Semlja ein ewig gefrorener Eiskeller sei, hatte auch auf den Unternehmungen im 19. Jahrh. lähmend gelastet. Dennoch war es seit 1869 kühnen norwegischen Schiffern gelungen, durch die engen Pforten und von Norden in diesen Eiskeller zu dringen, ja in die Mündung des Ob zu gelangen. Da lag also wieder ein fest ins Auge zu fassendes Forschungsziel vor. Nordenskiöld griff es mit gewohnter Energie auf. Die Natur des Karischen Meeres sollte erforscht und, wo möglich, ein Seeweg nach Westsibirien

Digitized by Google

mittelst der Einfahrt in die Jenisseimündung eröffnet werden. Oskar Dickson bot die Mittel und wirklich gelang es 1875 Nordenskiöld sein Schiff glücklich in den gewaltigen Strom zu führen und, ehe das Meer sich wieder völlig mit Eis bedeckte, in die europäischen Gewässer zurückzukehren. Der Versuch ward im folgenden Jahr von ihm wiederholt. Bereits war in dem steinreichen Bauern Sibiriakow eine neue freigebige Hand gewonnen, die alle Bestrebungen sein Heimatsland geistig wie wirtschaftlich zu heben in großartigster Weise unterstützte.

Diese Fahrten waren nur die Vorläufer des gewagten Unternehmens, zu Schiff längs des Nordrandes von Asien bis zur Beringstrasse vorzudringen. Die berühmte Fahrt der Vega hat dann mit einem Schlage das jahrhundertalte Problem der nordöstlichen Durchfahrt im positiven Sinn gelöst. Das nämliche Schiff ward, wenn auch hart vor dem Passieren der genannten Straße zum Ueberwintern gezwungen, von der Nordsee rings um die Kontinentalmasse Eurasien geführt. Diese Fahrt war es, die Nordenskiöld den Weltruf verschaffte, und ihn in die Reihe der größten Entdecker für alle Zeiten gestellt hat, — auch wenn das Antlitz der Erde in unsern Vorstellungen nur unwesentlich durch sie abgeändert ist und manche frühere und spätere Polarfahrten mit weit größern Gefahren und Schwierigkeiten verknüpft waren, als diejenige der Vega. Sie war eben die Krönung eines zielbewußten Vorgehens, mit einer Umsicht und Unerschrockenheit durchgeführt, die unsere höchste Bewunderung verdient.

Die Fülle der Ehren, die Nordenskiöld nach seiner Rückkehr im Jahre 1879 erwarteten, war eine gewaltige. Das Vaterland wie das Ausland wetteiferten in einem seltenen Maße, ihm zu danken. Unsere Gesellschaft bekundete ihre Teilnahme, indem sie damals den kühnen Forscher aus der Reihe ihrer Korrespondenten, der er seit 1871 angehörte, unter die Zahl ihrer Ehrenmitglieder erhob. Dotationen und der Ertrag seiner in zehn Sprachen übersetzten Werke über die Vegaexpedition legten den Grund zu der breiteren Existenz, die er von nun an zu führen vermochte.

Aber kaum lagen die Ergebnisse der großen Fahrt vollendet vor, als der unermüdliche Forscher, obwohl er mittlerweile das 50. Lebensjahr überschritten hatte, neue Unternehmungen plante. Ein fest begrenztes wissenschaftliches Ziel ins Auge zu fassen, war ihm Bedürfnis. Er konnte sich dabei freilich auch in bestimmte Ideen förmlich verbohren und hat es mehr wie einmal erleben müssen, daß seine mit scheinbar höchst triftigen Gründen verteidigten Anschauungen durch seine eigenen Beobachtungen an

Digitized by Google

Ort und Stelle widerlegt wurden. Das Grönlandsche Inlandeis wollte Nordenskiöld nicht in den Sinn. Er glaubte höhere Eisränder, längs der Küsten durch die stärkern Niederschläge erzeugt, voraussetzen zu müssen. Wenn nun die Seewinde über diese hinwegstreichen und im Innern sich senkend, föhnartig erwärmt, die Luft austrocknen, kann sich nach seiner Ansicht eine Eis- und Schneedecke nicht halten und muß einer polaren Vegetation Raum geben. Die Grönlandsreise 1883 sollte die Entscheidung bringen. Unter großen Entbehrungen bestieg man das Inlandeis zum ersten Male fast bis zur Mitte des großen Landmassivs. Höher und höher führte der Weg, von einer Senkung nach der Mitte oder gar vegetativen Regionen fand sich nichts. Der zusammenhängende Eismantel Grönlands ist seitdem ein kaum mehr bestrittenes Axiom der Erdkunde geworden.

Nun erst, nachdem er zum 10. Male aus polaren Gewässern zurückgekehrt, gönnte sich Nordenskiöld äußere Ruhe. Von der eigenen Beteiligung stand er ab. Aber seine reichen Erfahrungen und seinen Einfluß stellte er bis zuletzt jeglichem ähnlichen Unternehmen zur Verfügung. Mit Eifer suchte er später noch eine schwedische Südpolarexpedition ins Werk zu setzen. Und wiewohl ein großer Patriot, beschränkte er seinen Rat und seine Teilnahme niemals auf die Arbeit seiner Landsleute.

Fortan sehen wir Nordenskiöld auf einem völlig andern Gebiet thätig. Und nicht minder geht auch auf diesem sein Streben und sein Wirken ins Große. Aehnlich wie Humboldts historischer Sinn dreißig Jahre nach seiner großen amerikanischen Reise der Entdeckungsgeschichte seines ehemaligen Forschungsgebiets durch seine berühmten „kritischen Untersuchungen über die historische Entwickelung der geographischen Kenntnisse von der neuen Welt“ neue Bahnen wies, ward auch Nordenskiöld von fast unwiderstehlichem Drang erfaßt, die allmähliche Entschleierung des Nordens von Europa an der Hand der ältesten kartographischen Denkmäler zu verfolgen.

Wertvolle kleinere Spezialuntersuchungen, wie die über die viel umstrittene Reise und Karte der Gebrüder Zeni im 14. Jahrh. gingen voraus. Sie führten bereits zu dem interessanten Ergebnis, daß im Norden Europas schon im 13. Jahrhundert die skandinavischen Seeleute relativ getreue Karten der Küstenlinien aufzunehmen vermochten, ohne die Schule der Südländer und ohne den Kompaß.

Digitized by Google

Doch immer mehr vertieft er sich in diesen interessanten Zweig mathematischer Geographie mit seinen höchst verwickelten und schwierigen Fragen. Er beginnt selbst seltene Werke und Erzeugnisse der ältesten kartographischen Kunst zu sammeln und zu kaufen und durchmustert die großen Bibliotheken und Museen nach solchen, versenkt sich in alle einschläglichen Untersuchungen und beschenkt uns dann 1889 mit dem ersten der monumentalen Werke, die seinen Namen für immer unter die gelehrten Geographen einreihen. In diesem seinem Facsimile-Atlas, wie er ihn nennt, der im wesentlichen nur gedruckte Karten seit dem Erscheinen der ersten Ptolemaeusausgaben bis zum Ende des 16. Jahrh. enthält, behandelt Nordenskiöld die bisher meist nur bruchstückweise in Angriff genommene Geschichte des Wiegenalters der Kartographie nach Einzelmomenten in großen Zügen mit bewunderungswürdiger Herrschaft des Stoffes und führt zahlreiche Fragen mit seltenem Scharfsinn der Lösung näher. Was bisher in schwer zugänglichen Inkunabeln verstreut war, wird nun dem Forscher zum unmittelbaren Vergleich in treuem Lichtdruck vorgeführt, ein Corpus Mapparum, wie wir es in gleicher Gestalt noch nicht besaßen.

Die Bedeutung der deutschen Schule im Zeitalter der Renaissance wissenschaftlicher Kartographie war längst anerkannt. Als ihre unmittelbaren Nachfolger galten bisher die Niederländer. Nordenskiöld gelingt es eine eigene Zwischenstufe italienischer Kartographie zu erweisen.

Aber das interessante Studium hatte Nordenskiöld längst zu sehr erfaßt, um bei einer schon so deutlich in die Erscheinung tretenden Periode stehen zu bleiben. Die weit ins Dunkel zurückgreifende Entwickelung der Seekarten fesselt ihn ein weiteres Jahrzehnt. Und wie aus einem Guß heraus erscheint 1897 das Schwesterwerk, Periplus betitelt, noch reicher an Inhalt und Ergebnissen. Der Bilderschmuck enthält fast ausschließlich handschriftliche Karten. Der Text macht zum ersten Male den Versuch eine Gesammtgeschichte der Entwickelung der Seekarten und Seebücher seit dem Altertume bis über das Zeitalter der Entdeckungen hinaus zu geben.

Es ist unmöglich den reichen Inhalt dieser großen Werke und das wirklich Neue in ihnen mit wenigen Worten zu kennzeichnen, ihre Bedeutung für die nun erst recht in Fluß zu bringenden Studien über ein Gebiet richtig zu charakterisieren, das bisher nur von einem sehr kleinen Kreis ernster Forscher gepflegt ward. Für Jahrzehnte hat es diesen eine Fülle von Anregungen gegeben und Fragen zur Prüfung vorgelegt. Denn trotz der Genialität mancher

Digitized by Google

Kombinationen und dem Reichtum herbeigezogener Belege bedürfen die meisten einer solchen. Und auch die beneidenswerte, von keinem Lehramt beengte Muße des Akademikers während der Jahrzehnte gelehrten Studiums, die Nordenskiöld dem umfassenden Stoff gewidmet, reichte nicht aus, ihn zu erschöpfen oder völlig zu entwirren. Manche seiner Aufstellungen haben bereits eine wahrhaft fördernde Diskussion hervorgerufen.

Seit Jahren mit ganz den gleichen, aber leider oft unterbrochenen Studien beschäftigt, liegt es mir nahe einen Punkt herauszugreifen. Die Entstehung der Portulankarten der Italiener, deren uns so manche aus dem 14.—16. Jahrh. in prächtigen Originalen erhalten sind, ist seit Jahrzehnten ein wissenschaftliches Problem. Die verschiedensten Hypothesen sind aufgestellt. Man hat meist zu fortgeschrittene Kenntnisse in dieselben hinein interpretiert. Vollkommen unabhängig von einander kamen Nordenskiöld und ich vor bald einem Jahrzehnt zu einer neuen Lösung des Räthsels in dem gleichen Sinn und auf Grund einer gleichen Methode. Wir knüpften an der Meilenfrage an und erkannten jene Karten eben dadurch als eine Stufe innerhalb einer natürlichen Entwickelung seit den Zeiten des Altertums, nicht, wie man bisher fast allgemein angenommen, als das Ergebnis neuer Erfindung im Mittelalter nach Einführung des Kompasses in die Schiffahrt. Aber indem dann Nordenskiöld plötzlich abschwenkt und den Italienern fast jegliches Verdienst auf einem Gebiet abspricht, das sie seit Jahrhunderten zu ihren Ruhmestiteln zählen, ja sie zu einfachen Kopisten eines Katalanischen Vorbildes stempelt, gehen unsere Schlußfolgerungen weit auseinander.

Vielleicht ist dies Beispiel geeignet, eine hervorstechende Eigenart des großen Forschers zu kennzeichnen. Durchaus selbständig denkend, jeglichem Autoritätsglauben abhold, alles prüfend hält er nicht selten mit einer gewissen Starrheit an Anschauungen fest, gegen die sich fast die Gesammtheit überzeugter Fachmänner erhebt. Selbst als Nansen Grönland von Neuem durchquert und die gewaltige, kuppelförmig sich erhebende Eiskalotte zur Evidenz nachgewiesen, erörtert Nordenskiöld noch die Möglichkeit eisfreie Landstriche dort aufzufinden. — Daß er 1870 den kosmischen Ursprung der Eisenblöcke von Ovifac verfocht, ist verständlich, da man damals die mikroskopische Untersuchung der Mineralien noch nicht ausübte. Aber er hat auch daran festgehalten, als Steenstrup und Daubrée die gleichen Bestandteile in den Basalten der Diskoinsel nachgewiesen hatten. Auch den Kryokonit in den Eislöchern der seitlichen Abhänge des Inlandeises hat Nordenskiöld

Digitized by Google

trotz aller Gegengründe immer wieder mit dem Herabfallen kosmischen Staubes in Zusammenhang gebracht. Wie nun diese Anschauungen trotz seines großen Namens überwunden sind, so wird die Wissenschaft noch manche andere mit Eifer verteidigte — nicht zum wenigsten innerhalb des Gebiets der Geschichte der Kartographie —, wohl kaum auf die Dauer annehmen. An Widerspruch gegen seine wissenschaftlichen Aufstellungen hat es dem schwedischen Forscher bei seinen Lebzeiten nicht gefehlt. Was mir aber so wohlthuend aus dem Briefwechsel entgegen getreten ist, in den mich die Gemeinsamkeit der Studien während des letzten Jahrzehnts mit dem verehrten Manne verflocht, das ist die Milde und Ruhe, mit der er jegliche Einwände entgegennahm und sie zu prüfen versprach.

Eine durch und durch vornehme Natur — sie prägte sich schon in seiner äußern Erscheinung aus —, hat Nordenskiöld diesen Grundzug seines Charakters auch in der wissenschaftlichen Polemik niemals verleugnet. Und die Ueberhebung so mancher gleich ihm gefeierter Größen oder die Sucht zu glänzen war ihm fremd. Auch als Mensch genoß er die allgemeinste Verehrung in einem seltenen Maße.

Ich breche ab im Bewußtsein viele Seiten seines Wesens und Wirkens kaum gestreift zu haben. Ziehen wir kurz das Fazit dieses überaus reichen Lebens, so kennzeichnet die Fülle der Anregungen, die es nach allen Seiten stetig geboten, die Schärfe der Beweisführung, mit der er seine Ansichten begründete, entgegenstehende zu widerlegen suchte, ganz abgesehen von der Zahl gediegener fachwissenschaftlicher Arbeiten oder von Unternehmungen, die sofort zum Ziele führten, den hervorragenden Geist, der fortleben wird nicht nur im Gedächtnis kommender Geschlechter, nein auch in der Wirkung auf sie.

Wenn also die Schweden den Anteil, den ihr Volk an den wissenschaftlichen Bewegungen der letzten zwei Jahrhunderte genommen, durch wenige typische Namen zu kennzeichnen suchen, so können wir verstehen, daß sie auf einen Linné und einen Berzelius unmittelbar folgen lassen — einen Nordenskiöld.

Digitized by Google

Karl Hegel.

Von

F. Frensdorff.

Karl Hegel, seit 1857 Correspondent, seit 1871 auswärtiges Mitglied unserer Gesellschaft, nächst Theodor Mommsen das älteste der historisch-philologischen Classe, starb am 5. December 1901, in der Mitte seines 89. Lebensjahres. Ueber ein halbes Jahrhundert hat er einen Platz in der deutschen Geschichtswissenschaft eingenommen. Nicht ein Geschichtsschreiber, aber ein Geschichtsforscher, und zwar der hervorragendsten einer, der sich seine Stellung durch eine Arbeit seiner jungen Jahre erworben hatte und von da aus consequent und in unermüdeter Thätigkeit weiter geschritten ist. Von vornherein auf einen bestimmten Zweig der Geschichtswissenschaft seine Arbeit richtend, hat er eben dadurch Großes erreicht, nicht blos für sich, sondern für den Wissenszweig, den er vertrat, einen Platz an der Sonne erobernd.

Im Gegensatz zu dieser consequenten Entwicklung seiner litterarischen Thätigkeit stand sein Bildungsgang. Die Studien des Jünglings galten ganz anderen Zielen, als die Arbeiten des Mannes. Bestimmend für die Ausbildung des Sohnes war der Beruf des Vaters. Er war der älteste Sohn des Philosophen Hegel aus seiner 1811 mit Marie von Tucher geschlossenen Ehe, am 7. Juni 1813 in Nürnberg geboren.

Der Vater, damals Professor und Rector des Aegidiengymnasiums zu Nürnberg, hatte sich schon als Docent in Jena durch sein erstes größeres Werk einen Namen gemacht. In den Tagen der Schlacht bei Jena war „die Phänomenologie des Geistes“ zum Abschluß gekommen. Als sich ihrem Verfasser in der Auflösung aller Verhältnisse eine Stelle als Zeitungsredacteur in Bamberg, seit 1808 als Lehrer in Nürnberg darbot, war das eine willkommene

Digitized by Google

Hülfe in der Noth, aber bildete doch nur ein Uebergangsstadium. Mit dem J. 1816 kehrte er zur Universität zurück: im Herbst wurde er nach Heidelberg, zwei Jahre später nach Berlin berufen.

So ist der junge Hegel in Berlin, unter den Eindrücken der Zeit nach den Freiheitskriegen, in dem in der Litteratur der Zeit oft genannten Hause am Kupfergraben aufgewachsen. Er allein mit einem ein Jahr jüngern Bruder, dem spätern Consistorialpräsidenten Immanuel Hegel. Das väterliche Haus verschaffte den Söhnen einen Einblick in die litterarischen und künstlerischen Kreise der Berliner Gesellschaft. Im October 1830, von seinem Vater, dem zeitigen Rector, immatriculirt, bezog Karl Hegel die Universität. Er hörte Böckh und Lachmann, bei seinem Vater Philosophie der Geschichte, Logik und Religionsphilosophie und war von solchem Eifer für diese Philosophie erfüllt, daß er ihr allein sich zu widmen gedachte. Im Beginn seines dritten Semesters raubte ihm der Tod mit dem Vater zugleich den Lehrer und Leiter seines Lebens. Er blieb der Philosophie treu und verkehrte im Kreise der Freunde seines Vaters, die sich hochherzig zur Herausgabe der Werke Hegels einschliesslich seiner Vorlesungen verbanden und mit dem Unternehmen einen solchen Erfolg erzielten, daß sie der Wittwe, die nur eine geringe Pension bezog, eine große Erleichterung des Lebens verschafften und den Söhnen es ermöglichten, ihre Studien sehr ausgedehnt anzulegen. Das praktische Ziel, das sich Karl Hegel setzte, war die Theologie, wie sie Marheineke, der Vormund der Hegelschen Kinder, und Vatke unter den Anhängern seines Vaters vertraten; doch zogen ihn mehr als Hebräisch und Kirchengeschichte die der Theologie und Philosophie gemeinsamen Gebiete, die Religionsphilosophie von Steffens und die Geschichte der Philosophie von Michelet an. Studien der gleichen Art fortzusetzen, begab er sich im Frühjahr 1834 nach Heidelberg. Hier lehrte Daub, der 1816 die Berufung Hegels vermittelt und gemeint hatte, mit ihm gewinne die Universität Heidelberg zum erstenmal einen Philosophen, nachdem sich einst die Berufung Spinozas als vergeblich erwiesen hatte. Eben im J. 1833 war von Daub die „dogmatische Theologie jetziger Zeit“ erschienen, dem Andenken seines verewigten Freundes Hegel in der freudigen Aussicht auf baldige Nachfolge gewidmet. Der junge Hegel hörte auch noch Daub, aber es war mehr die charaktervolle Persönlichkeit, die ihn anzog, als die Lehre. An einer ganz anderen Stelle sollte sich die Anknüpfung finden, die für ihn bedeutend wurde, ja Heidelberg zum eigentlichen Wendepunkt seines Lebens zu machen

Digitized by Google

berufen war. Im Herbst 1834 wurde er mit Gervinus und Georg Beseler bekannt. Sie bewohnten dasselbe Haus mit ihm, beide mit historischen Studien beschäftigt, der eine an seiner Geschichte der poetischen National-Litteratur, der andere an der Fortsetzung der Lehre von den Erbverträgen arbeitend, beide als Privatdocenten mit der Universität Heidelberg bereits in Verbindung oder sie vorbereitend. Die Geschichte war dem jungen Hegel fremd geblieben. Er hatte weder Ranke, dem der Hegelsche Kreis feindlich gegenüber stand, noch sonst eine historische Vorlesung gehört. In Heidelberg lernte er einsehen, was ihm fehlte. Seitdem Gervinus sich zu der modernen Staatsentwicklung Deutschlands so gegnerisch gestellt hat, ist die hohe Verehrung, die ihm früher und grade wegen seiner patriotischen Richtung gezollt wurde, in das Gegentheil umgeschlagen. Sehr mit Unrecht. Nicht blos das Leben des Mannes, von dem hier die Rede ist, legt Zeugniß von dem Geiste ab, der ihn beseelte, von der Fülle geistiger Anregung, die von ihm ausgieng. Neben den Vorlesungen, die Hegel bei Schlosser und Gervinus hörte, wurde der persönliche Verkehr, in den er zu beiden trat, bestimmend für seine ganze Weiterentwicklung. Beide Männer führten ihn auf einen Ausgangspunkt: Italien und seine Litteratur. Schlossers Lieblingslectüre, der Leitstern seines Denkens und Schaffens, war Dante. Als Hegel 1887 den Briefwechsel seines Vaters herausgab, leitete er einen Brief Schlossers mit den Worten ein: ihm verdanke er die Einführung in das Studium der Geschichte und des Dante. Beiden blieb er bis an sein Lebensende treu. Gervinus, der kurz zuvor ein Jahr in Italien zugebracht hatte, war von einem andern Theile der italiänischen Litteratur angezogen und hatte als eine Frucht seiner Studien 1833 eine Geschichte der florentinischen Historiographie nebst einer Charakteristik des Machiavell veröffentlicht. Durch ihn wurde Hegel auf die politisch-geschichtlichen Quellen Italiens hingewiesen.

Nachdem die Freunde Heidelberg verlassen hatten, Beseler um als Professor nach Basel, Gervinus um als Professor nach Göttingen zu gehen, kehrte Hegel von seinem zweijährigen Aufenthalte in Heidelberg, „dem Orte seiner schönsten Jugenderinnerungen", nach Berlin zurück. In der Absicht, sich dem Lehrfache zu widmen, promovirte er in Berlin am 24. August 1837 mit der Dissertation: de Aristotele et Alexandro magno und bestand im folgenden Frühjahr die Lehramtsprüfung, bei der er die unbedingte facultas docendi für die preußischen Gymnasien erlangte. Bevor

Digitized by Google

er von ihr Gebrauch machte, begab er sich zu einem längern Aufenthalte nach Italien.

Hier traf er wieder mit Gervinus zusammen, der sich vor seiner Uebersiedlung nach Göttingen mit seiner Heidelberger Schülerin, Victoria Schelver, verheiratet hatte: einer Frau, deren Anmuth die Göttinger Studenten bei dem Exodus nach Witzenhausen im November 1837 begeisterte, von der alle, die sie gekannt haben, in den Ausdrücken der hellsten Freude reden. Vom Herbst 1838 bis zum Sommer 1839 verweilte Hegel in Italien, den größten Theil der Zeit in Rom, drei Monate in Florenz verlebend. Vom September bis April blieb er mit dem Ehepaar Gervinus vereinigt; der Abschied von ihnen in Florenz war von dem Gefühl begleitet, „für das ganze Leben mit einander verbunden zu bleiben". Hegel war wohl vorbereitet nach Italien gekommen. Das Interesse für die Kunst war bei ihm geweckt durch die Berliner Sammlungen, durch den Besuch von Dresden und Prag, und durch die Studien, die er unter Leitung Hothos, des Aesthetikers der Hegelschen Schule, und des Malers Xeller gemacht hatte, von dem ein besonders gelungenes Bild des Philosophen Hegel herrührt. Die neue Welt des Kunstgenusses, die ihm damals aufgieng, war der erste Anstoß gewesen, ihm seine theologischen Studien zu verleiden. Jetzt war es ihm vergönnt, Land und Leute, Natur und Kunst Italiens in der liebenswürdigsten und geistig angeregtesten Umgebung zu sehen und zu genießen. Er war kein Stubengelehrter, auch kein blos der Vergangenheit zugewandter Reisender. Offenen Auges suchte er sich auch mit den Zuständen der italiänischen Gegenwart, den politischen und den socialen, bekannt zu machen. Ohne Sorge um ein Amt, auch ohne Sorge um eine bestimmte selbstgesetzte Aufgabe durchwanderte er das Land, studirte die Städte, ihre Chroniken, besuchte ihre Archive und machte sich mit italiänischen Gelehrten bekannt, schwankend, in welchem Theil der italiänischen Geschichte er sich mit seiner Arbeit festsetzen solle. Eine Zeitlang dachte er an Caesar Borgia, das Vorbild des principe Machiavells; allmählich schob sich statt einer einzelnen historischen Persönlichkeit das Studium der Verfassung einer Stadt, etwa Florenz oder der italiänischen Städte überhaupt als Ziel ein. In den Archiven hatte er deshalb besonders Acht auf die Statuten der Städte oder einzelner hervorragender Genossenschaften in den Städten. So kam er im Besitz werthvollen Materials, vor allem aber bereichert mit der lebendigen Anschauung eines großen historischen Schauplatzes heim, entschlossen diesen

Digitized by Google

Schatz in selbständiger wissenschaftlicher Thätigkeit zu verwerthen.

Mit dem Herbst 1839 legte Hegel sein Probejahr am Kölnischen Gymnasium in Berlin unter Director August ab und blieb nachher als Hülfslehrer an derselben Anstalt thätig. Die Anfänge seiner schriftstellerischen Wirksamkeit, die in diese Zeit fallen, bestanden außer in einigen Recensionen für die Berliner kritischen Jahrbücher in der Mitarbeit an der Herausgabe der Werke seines Vaters. Der große Erfolg, den die Sammlung errang, machte die Veranstaltung neuer Auflagen einzelner Bände nothwendig. Die Philosophie der Geschichte hatte Eduard Gans 1837 auf Grund der Vorlesungen herausgegeben, wie sie Hegel im Winter 1830/31 gehalten hatte, und sich dabei der Hefte Hothos und Karl Hegels aber nicht mit der nöthigen Aufmerksamkeit und Sorgfalt bedient. In der zweiten nach dem Tode von Gans besorgten Ausgabe gieng Karl Hegel von seines Vaters eigenhändigen Aufzeichnungen aus und stellte unter Billigung seiner Freunde den Eindruck wieder her, den die Vorlesungen in ihrer ursprünglichen Gestalt hervorgerufen hatten.

Die Erbschaft eines großen Namens wird für den Erben leicht zu einer Last. Die Welt harrt auf seine Leistungen; verlangt, daß sie seines Vorfahren würdig seien; und mißt, was der Sohn leistet, an den Verdiensten des Vaters. In der Wissenschaft kommen die magna patrum merita den Söhnen nicht wie im Staate und in der Gesellschaft zu Gute. Auch Karl Hegel hat das Drückende einer solchen Stellung empfunden, zumal in Berlin, dem Schauplatz der großen Wirksamkeit seines Vaters. Was konnte ihm deshalb willkommener sein, als die durch Georg Beseler, der Basel nach kurzem Aufenthalte mit Rostock vertauscht hatte, an ihn gerichtete Anfrage, ob er zur Uebernahme einer außerordentlichen Professur der Geschichte an der mecklenburgischen Universität bereit sei?

Nachdem Hegel im Sommer 1841 unter den Vorbereitungen für seinen künftigen Beruf noch eine Vorlesung Rankes über das Mittelalter besucht hatte, trat er im Herbst das Rostocker Amt an. Sein Programm behandelte Dantes Ansichten über Staat und Kirche; es war die erste Frucht seiner italiänischen Studien. Die Verhältnisse der kleinen Universität, die kaum hundert Studenten zählte, an der für die Geschichte erst wieder eine Zuhörerschaft gewonnen werden mußte, nöthigten Hegel, aushülfsweise auch andere Fächer zu vertreten. Wiederholt las er über Machiavell Montesquieu und Rousseau oder über Nationaloekonomie

Digitized by Google

und Finanzwissenschaft. Dem Vorbilde seines Lehrers Schlosser getreu machte er Frauen das Leben und die Dichtungen Dantes zugänglich. Es war ein angeregtes Leben in dem damaligen Rostock. Der starke Wechsel, der unter den Professoren stattfand, führte dem akademischen Körper viel frisches Blut zu. Eine ganze Reihe berühmter Namen haben in jener Zeit der Universität, wenn auch nur für wenige Jahre angehört, wie Beseler, Kierulf, Wunderlich, Thöl, Jhering, Bruns, die Theologen Christ. Hofmann und Franz Delitzsch. Hegel gewann liebe Freunde unter ihnen. Was ihm aber die Erinnerung an Rostock besonders werthvoll machte, war, daß hier sein erstes großes schriftstellerisches Werk entstand. Im Frühjahr 1843 nahm er die italiänischen Arbeiten wieder auf. Der anfängliche Gedanke einer Verfassungsgeschichte von Florenz erweiterte sich zu einer Geschichte der italiänischen Städteverfassung, deren Spitze sich gegen die Ansicht von der Fortdauer der römischen Stadtverfassung in der der Städte des mittelalterlichen Italiens richtete. Diese von Savigny in seiner Geschichte des römischen Rechts im Mittelalter vorgetragene Auffassung war, seitdem sie vor dreißig Jahren zuerst begründet worden, zur Herrschaft gelangt. In eingehender quellenmäßiger Ausführung, die mit dem Ende der republikanischen Zeit begann und die Entwicklung bis in die Stauferzeit, an das Ende des 12. Jahrhunderts verfolgte, widerlegte Hegel die angebliche Continuität römischen Wesens in den Städten Italiens und zeigte positiv die Herkunft ihrer Verfassung aus germanischer Wurzel, der nur eine schwache Färbung römischer Tradition beigemischt sei. Nicht minder als gegen Savigny richtete sich Hegels Buch gegen das zweite Haupt der historischen Rechtsschule, das germanistische. Das Organ der historischen Rechtsschule, die Zeitschrift für geschichtliche Rechtswissenschaft, hatte gleich in ihrem ersten Jahrgange 1815 einen Aufsatz von Karl Friedrich Eichhorn gebracht, in dem auch die Verfassung der deutschen Städte, direct die von Cöln, indirect auch die der übrigen, aus dem römischen Rechte hergeleitet war. Auch Eichhorns Aufsätze über den Ursprung der städtischen Verfassung in Deutschland hatten sich eine fast ungetheilte Anerkennung unter den deutschen Gelehrten erworben. In einem Anhange seines Werkes verbreitete sich Hegel über die französischen und deutschen Städte und wies sie gruppenweise musternd nach, daß ihre öffentlichen Ordnungen nichts von römischem Rechte enthielten, und die Bezeichnung der städtischen Obrigkeit mit consules, proconsules nur ein Scheinargument, ein lateinischer

Digitized by Google

Name für eine deutsche Sache, war. Es war ein kühnes Unternehmen für einen jungen, durch keine bisherige Arbeit legitimirten Gelehrten, gegen die angesehensten Autoritäten der Wissenschaft und deren grundlegende Schriften aufzutreten. Aber es war von Erfolg begleitet dank dem gründlichen Verfahren, der Festigkeit des Auftretens, der reinen Sachlichkeit, die sich aller unnöthigen Polemik enthielt; dank aber auch der Benutzung von Quellen, die den frühern Bearbeitern des Stoffs nicht zugänglich waren, den italiänischen Urkundenwerken, die erst die neuere Zeit ans Licht gestellt hatte. Dem Erfolge Hegels kam zu Gute, daß gleichzeitig mit ihm andere Forscher gegen die herrschende Ansicht auftraten. So insbesondere in Italien Troya, in Deutschland Bethmann-Hollweg in seiner Untersuchung: Ursprung der Lombardischen Städtefreiheit (Bonn 1846).

Mit den beiden Herbst 1846 und Sommer 1847 erschienenen Bänden der Geschichte der Städteverfassung von Italien hatte sich Hegel seinen Namen gemacht. Er verhehlt seine Genugthuung nicht, daß er von nun ab nicht mehr blos als der Sohn seines Vaters gegolten habe. Die Ergebnisse des Buches fanden allgemeine Anerkennung. Was im Anfang des zweiten Bandes als eine Skizze der französischen und deutschen Städteverfassung entworfen war, wies auf weitere Arbeit und Ausführung hin.

Aber zunächst kam eine Zeit, der andere Aufgaben gestellt waren; Aufgaben, denen die Männer der Wissenschaft sich nicht nur nicht entzogen, sondern ihre beste Kraft gewidmet haben. Sie sahen darin die Erfüllung einer Pflicht gegen das Vaterland und gegen die Zeit, so wenig es ihnen auch nachmals gedankt ist. Wer sich zu dem Grundsatz bekannte: nego quenquam ad virtutem pervenire posse nisi in republica, für den konnte kein Zweifel sein, was er zu thun, ebensowenig wo er nach dem ganzen Gang seiner politischen Entwicklung seinen Platz zu nehmen habe. Durch Gervinus war Hegel mit Dahlmann bekannt geworden. In den Tagen des Göttinger Jubiläums, zu dem ihn Gervinus eingeladen hatte, kam er in den anregendsten Verkehr mit Dahlmann, Jakob und Wilhelm Grimm. An dem Schicksal der Sieben nahm er lebhaften Antheil, besuchte Dahlmann in seinem Exil in Jena und bemühte sich bei Joh. Schulze, dem alten Freunde des Hegelschen Hauses, und bei A. v. Humboldt die Wiederanstellung der Sieben in Preußen und insbesondere die Berufung Dahlmanns nach Berlin zu fördern. Auf den Germanistenversammlungen in Frankfurt und Lübeck traf er mit den alten Freunden zusammen und war bereit zur Mitarbeiterschaft an den großen literarischen

Digitized by Google

Unternehmen, die in jenen Jahren geplant wurden, dem historischen unter der Leitung Dahlmanns wie dem journalistischen unter der von Gervinus. In dem praktisch-politischen Wirken, zu dem das Jahr 1848 aufrief, fielen Hegel zwei der undankbarsten Aufgaben zu, dem Kundigen genügend gekennzeichnet durch die Stichworte: „Mecklenburg“ und „Erfurt“. So anziehend diese Periode seines Lebens ist, so kann sie doch hier nicht verfolgt werden. Er gesellte sich den Männern zu, die für Mecklenburg eine constitutionelle Verfassungsordnung erstrebten, führte für das liberale Ministerium die Feder als Redacteur der Mecklenburgischen Zeitung, bekämpfte die grade hier besonders radikal auftretende und um so verderblicher wirkende Demokratie und nahm als Abgeordneter für Schwerin an dem Erfurter Parlamente im Frühjahr 1850 Theil. Die ganze dreijährige Arbeit war vergebens gethan. Die Reaction begrub Regierung, Liberalismus und Demokratie in ihrer Fluth, und der landesgrundgesetzliche Erbvergleich von 1755 trat in alter Pracht wieder hervor.

Nach der politischen Arbeit kehrte Hegel, seit dem September 1848 zum Ordinarius befördert, zur wissenschaftlichen zurück. Einige größere in der Kieler Monatsschrift 1852 und 1854 veröffentlichte Aufsätze waren die früheste litterarische Frucht: der erste, zur Geschichte und Beurtheilung des Bauernkrieges überschrieben, richtete sich gegen Jörgs Deutschland in der Revolutionsperiode v. 1522—26 (Freib. 1851), der zweite, zu alten Studien zurücklenkend, knüpfte an eine Recension von Arnolds Geschichte der deutschen Freistädte (1854) mehrere selbständige Untersuchungen zur Verfassungsgeschichte der deutschen Städte: über die Einführung des Consultitels und über die sg. libertas Romana. Die Jahre der Reaction waren für einen, der mitten im Kampfe gestanden hatte, nicht die erquicklichsten. Politische und kirchliche Streitigkeiten verbitterten das gesellschaftliche Leben. In Preußen, wo der Minister v. Altenstein Hegels Studienreise, wenn auch nur sehr bescheiden, unterstützt hatte, schien man ihn früherer Anregung ungeachtet aus dem Auge verloren zu haben. Gehörten doch die maßvollen Politiker von 1848, die wärmsten Anhänger des preußischen Staates, zu den bestgehaßtesten. Erst durch einen im Januar 1856 im Evangelischen Verein zu Berlin auf Aufforderung des Geheimraths Wiese von Hegel gehaltenen Vortrag: über die Einführung des Christenthums bei den Germanen wurde der Minister von Raumer auf ihn aufmerksam und bot ihm eine Professur in Greifswald an. Da ihn aber gleichzeitig ein Ruf nach Erlangen traf, so gab er ihm den Vor-

Digitized by Google

zug. Die funfzehn Jahre, die er in Rostock verlebt hatte, waren keine verlorene Zeit. Dankbar auch für die politische Belehrung, die sie ihm verschafft, dankbar für das Vertrauen und die Freunde, die er gefunden hatte, verließ er Rostock. Er war in den Jahren 1854—56 Rector der Universität gewesen. Das Programm, mit dem er sich verabschiedete, die Geschichte der mecklenburgischen Landstände bis z. J. 1555 (Rostock 1856), war zugleich der Abschluß von Studien zur Landesgeschichte, die ihn auf Aufforderung von verschiedenen Seiten her seit der vormärzlichen Zeit beschäftigt hatten. Der Curator bemäkelte die hohen Druckkosten; das mecklenburgische Publicum, nach neuer und neuester Geschichte begierig, sah enttäuscht, daß die Schrift dreihundert Jahre vor der Zeit, dem sein Interesse galt, endete.

Was Hegel nach Erlangen zog, war die Aussicht auf einen größern Wirkungskreis — Erlangen zählte damals sechsmal soviel Studenten als Rostock — und die ihm ungeachtet aller Anhänglichkeit an den preußischen Staat von Vater und Mutter her ererbte Sympathie für Süddeutschland. Sie war noch verstärkt durch seine in der Rostocker Zeit 1850 erfolgte Verheiratung mit einer Nürnbergerin, seiner Base, die gleich seiner Mutter der Tucherschen Familie angehörte.

Mit Erlangen hatte Hegel die Stätte erreicht, von wo aus sein erfolgreichstes Wirken begann. Es lag weniger auf dem Gebiete des Docirens, als auf dem der litterarischen Arbeit und der organisatorischen Thätigkeit für litterarische Arbeit. Sein Buch hatte ihm zwei Ziele angewiesen: die italiänischen Geschichtsstudien und die Geschichte der städtischen Verfassungen, insbesondere der deutschen. Er schwankte nicht, welches von beiden er zu verfolgen habe.

Die italiänischen Studien wurden nicht aufgegeben. Die Lectüre seiner Mußestunden blieb Dante. Aber die Feder hat er nur noch ein paarmal für Gegenstände dieses Gebiets ergriffen. 1867 behandelte er in einem Universitätsprogramm die Ordnungen der Gerechtigkeit, das zuerst 1293 aufgestellte und seitdem fortgebildete populäre Grundgesetz der florentinischen Republik, das er im Frühjahr 1838 in dem alten florentinischen Staatsarchiv kennen gelernt hatte. Das zweitemal kam der Anlaß von außen her. 1874 hatte Scheffer-Boichorst, der vortreffliche Gelehrte, den das vorige Jahr der Wissenschaft geraubt hat, in seinen florentiner Studien eine bis dahin wegen ihrer Sprache, ihres Alters und ihres Inhalts hochgeschätzte Florentiner Chronik, die des Dino Compagni, für eine Fälschung späterer Zeit erklärt. Das

Digitized by Google

angegriffene Geschichtsbuch war Hegel nicht eine Quelle wie andere mehr; es war ihm lieb und werth und von früh auf ans Herz gewachsen. So wenig er sich dem Eindruck zu entziehen vermochte, den die gelehrten und scharfsinnigen Untersuchungen des Angreifers machten, so glaubte er doch, es bliebe noch genug an unerschütterten Berichten des Geschichtschreibens übrig, um eine Rettung in dem 1875 erschienenen Buche: Dino Compagni und der 1878 nachfolgenden Abhandlung über die ältern Dante-Commentare zu versuchen. Hegels Auftreten hatte den Erfolg, der durch die Veröffentlichung einer Dino-Handschrift aus dem 15. Jahrhundert unterstützt wurde, daß sich die Ansicht befestigte, die Chronik des Dino Compagni sei an sich ächt, aber es habe früh eine Verunächtung einzelner Stücke der Chronik eingesetzt.

Das bevorzugte Arbeitsfeld Hegels seit der Erlanger Zeit wurde die deutsche Städtegeschichte. Zwei Jahre nach dem Antritt der Erlanger Professur constituirte sich die von K. Maximilian II. von Baiern begründete historische Commission. Als Pertz für deren Arbeitsprogramm die Herausgabe der deutschen Städtechroniken des Mittelalters bis ins 16. Jahrhundert vorschlug, wurde Hegel mit der Leitung dieses Unternehmens betraut und sein in der Octobersitzung des J. 1859 vorgelegter Plan in allen Theilen von der Commission gebilligt.

Die Ausführung begann sofort. Es wurde die Stadt zuerst in Angriff genommen, die dem Herausgeber in jeder Beziehung am nächsten lag: Nürnberg. Hegel hatte das Glück, zwei gleich ausgezeichnete Mitarbeiter zu finden, die beide viel zu früh der Wissenschaft entrissen worden sind: Theodor von Kern und Mathias Lexer, jener für die historische, dieser für die sprachliche Seite des Unternehmens thätig. Die Chroniken der Stadt Nürnberg beginnen im 14. Jahrhundert mit einer Aufzeichnung, die ein verdienter Bürger Ulman Stromer über sein Geschlecht und seine Zeit zusammenstellte. Die Herausgabe des Stromerbüchlein übernahm Hegel selbst und zeigte daran, wie er die Publication der deutschen Städtechroniken gemeint habe. Die Ausgabe beschränkte sich nicht auf Herstellung eines philologisch getreuen und lesbaren Textes nebst den nöthigen Wort- und Sacherklärungen, sondern der Inhalt der Quelle war an der ganzen gleichzeitigen officiellen Ueberlieferung geprüft. Aus dem reichen Schatz der Nürnberger Archivalien war an Urkunden, Stadtrechnungen, Mittheilungen der Stadtbücher beigebracht, was zur Bestätigung, Ergänzung oder Berichtigung des Chronisten erforderlich war. Ein-

Digitized by Google

geleitet war das Ganze durch zwei bedeutsame Abhandlungen des Herausgebers: die eine eine geschichtliche Darstellung der Stadtverfassung von Nürnberg, die andere eine Uebersicht über die Geschichtschreibung der Stadt enthaltend. Mit der Edition des ersten Nürnberger Bandes war das Muster aufgestellt, das in den folgenden Theilen und Bänden mehr oder minder getreu befolgt wurde. Die Gliederung des Unternehmens war die nach landschaftlichen Gruppen. Der mit Nürnberg begonnenen Abtheilung der fränkischen Städte sollten sich die schwäbischen mit Augsburg, die niedersächsischen mit Braunschweig u. s. w. anschließen. Hegel warb und fand Mitarbeiter für das groß gedachte Unternehmen, so daß die Arbeit an verschiedenen Stellen zugleich einsetzen konnte. Vom Frühjahr 1862, wo der erste Band Nürnberg erschien, bis z. J. 1899 ist die Sammlung zu 27 Bänden angewachsen und umfaßt die wichtigsten Städte des südlichen und nördlichen Deutschlands. Hegel hat sich nicht mit dem bezeichneten Antheil an Nürnberg begnügt; er hat selbst die Straßburger und die Mainzer Chroniken bearbeitet und den Cölner Bänden eine Verfassungsgeschichte der Stadt beigefügt. Alles das waren Arbeiten, die sich nicht kurzerhand in der heimischen Studirstube erledigen ließen. Es bedurfte dazu der Reisen, des längern Aufenthalts und Nachforschens in den Bibliotheken und Archiven der einzelnen Städte. Grade dies Studium an Ort und Stelle, dies Erforschen auch der lokalen Verhältnisse ist der Ausgabe der Chroniken zu Statten gekommen. Hegel hat in Mainz, in Cöln, in Straßburg und Paris Wochen und Monate zugebracht, um des gesammten Stoffes habhaft zu werden. Durch die Untersuchungen der Archive für diese bestimmte Aufgabe ist manche verloren geglaubte oder gänzlich vergessene Quelle wieder zu Tage gefördert. Die Herausgabe der beiden Straßburger Bände in den J. 1869 und 1870 hat den Inhalt wichtiger Handschriften gerettet, kurz bevor der Brand der Straßburger Bibliothek die Originale für immer zerstört hat. Das Verhältniß Hegels zu den zahlreichen Mitarbeitern, deren es für die rasche und doch gründliche Durchführung des Unternehmens bedurfte, war, wie ich es aus eigener Wissenschaft bezeugen kann, ein gutes. Hegel beschränkte sich auf die Leitung des Ganzen, die Mitarbeiter verfaßten ihre Theile in voller Selbständigkeit. Es ist deshalb doppelt unrichtig, wenn in der Litteratur aller Rüge ungeachtet ihre Arbeiten immer wieder dem Herausgeber zugeschrieben werden.

An dem Aufschwung der historischen Studien seit den fünfziger Jahren hat die deutsche Städtegeschichte einen hervor-

Digitized by Google

ragenden Antheil gehabt. Hegel hat diese Litteratur aufmerksam verfolgt. Zahlreiche Recensionen aus seiner Feder, die mit den durch Arnolds Freistädte hervorgerufenen Abhandlungen in der Kieler Monatsschrift v. J. 1854 beginnen (oben S. 59), nachher besonders in Sybels historischer Zeitschrift veröffentlicht sind, geben davon Zeugniß. Zur positiven Darlegung der eigenen Auffassung gelangte er erst in den neunziger Jahren. Sein 1891 erschienenes zweibändiges Werk: Städte und Gilden der germanischen Völker im Mittelalter beschäftigt sich mit dem Norden, wie die 45 Jahre früher publicirte Geschichte der italiänischen Städteverfassung den Süden zu ihrem Schauplatz hatte. Er bekämpft die einst im J. 1830 von Wilda aufgestellte Theorie, daß die Gilde die Keimzelle gewesen sei, woraus das germanische Städtewesen seinen Ursprung genommen habe, an welche Gierke und K. W. Nitzsch in der neuern Zeit, aber umgestaltend und reformirend, wieder angeknüpft hatten. Er geht von England aus und prüft in Skandinavien, Nordfrankreich, den Niederlanden und Norddeutschland die Stadtverfassungen und Stadtrechte auf den Zusammenhang von Stadt und Gilde und kommt zu dem Ergebniß, daß Stadt und Gilde als selbständige Bildungen neben einander stehen, jede für besondere Zwecke, die Stadtverfassung für die rechtliche und politische, die Gilde für die sociale und religiöse Seite des Lebens bestimmt. Das Buch hat eine lebhafte Bewegung hervorgerufen. Während die Historiker seinen Ergebnissen meistens beigetreten sind, hat es von Juristen scharfe Angriffe erfahren und zugleich die Frage nach der in der Rechtsgeschichte anzuwendenden Methode in Fluß gebracht.

Der Gegensatz von Gilde und Stadt war nicht die einzige Controverse der städtegeschichtlichen Litteratur. Die Entstehung der Städte, der Stadtverfassungen, der Stände in der Stadt, die Grundbesitzverhältnisse in den Städten wurden Gegenstand der Erörterung in Büchern und Abhandlungen, die dem deutschen Städtewesen im Ganzen oder einzelnen Städten galten. Hegel nahm zu ihnen Stellung in seinem 1898 erschienenen Buche: Die Entstehung des deutschen Städtewesens. Er rechnet mit den einzelnen Theorieen ab, einer jeden ihre Mängel und insbesondere ihre Einseitigkeit nachweisend und führt die bezeichnendste Erscheinung der Städteverfassung, die Entstehung des Raths, nicht auf einen gleichen überall wiederkehrenden Grund zurück, sondern verstellt sie unter die Einwirkung verschiedener Momente, wie der Zusammensetzung der Einwohnerschaften, ihrer rechtlichen und socialen Unterschiede, der Grundbesitzverhältnisse, des

Digitized by Google

mehr oder minder großen Maßes von Abhängigkeit, in dem sich eine Gemeinde von dem Stadtherrn befand. Noch zu der Festschrift, welche die Universität Erlangen dem Prinzregenten von Baiern zu seinem achtzigsten Geburtstage im J. 1901 darbrachte, hat Hegel einen Beitrag aus dem Gebiete der Städtegeschichte beigesteuert, der die Vergrößerung und Sondergemeinden der deutschen Städte im Mittelalter behandelt.

Ueber das Gebiet der Städtegeschichte ist Hegel nur aus Anlässen persönlicher Art hinausgegangen. So als er im J. 1887 eine Ausgabe der Briefe seines Vaters nebst einer Auswahl der an ihn gerichteten veranstaltete und im J. 1900 in einer kurzen Selbstbiographie „Leben und Erinnerungen" zusammenstellte. Diese anziehende Schrift ermöglicht es dem Leser, sich ein deutliches Bild der ganzen Persönlichkeit zu machen. Ich mußte mich hier auf die schriftstellerische Persönlichkeit, auf die Darlegung der Verdienste Hegels um die deutsche Geschichtswissenschaft, beschränken.

Der Ueberblick zeigt eine große Zahl von Arbeiten, nicht eine heterogene Masse, sondern im Wesentlichen von einem Interesse beherrscht und zusammengehalten. Sie legen Zeugniß ab von einem unermüdeten Fleiße, der mit den Jahren nicht nachgelassen, sondern sich womöglich noch gesteigert hat. Wie von seinem Vater erzählt wird, daß er jedes Buch, ja selbst die Zeitung mit der Feder in der Hand gelesen habe, so weist auch der Nachlaß des Sohnes Excerptenhefte und -Bände in großer Zahl auf. So wenig wie der Fleiß hat sich die Schaffenskraft mit den Jahren verringert. Er war fast 70 Jahr alt, als er das Werk über Städte und Gilden begann und führte es in zehnjähriger Arbeit durch. Greisenhaftigkeit läßt sich seinen späten Arbeiten nicht nachsagen. Er blieb rüstig bis ans Ende, ein streitbarer Mann, der seinen Standpunkt zu wahren und den scharfen Angriffen, denen sein entschiedenes Auftreten und seine herbe Natur ihn aussetzten, mit gleicher Waffe zu begegnen wußte.

Unter der großen Zahl deutscher Historiker, die das 19. Jahrhundert aufzuweisen hat und die selbst der historischen Betrachtung eine reiche Fülle verschiedenartiger und interessanter Charactere darbieten würden, nimmt K. Hegel eine besondere Stellung ein. Sie wird ihm durch die Eigenthümlichkeit seines Entwicklungsganges angewiesen. Im Bereich der Geisteswissenschaften hatte während des ersten Drittels des Jahrhunderts die Philosophie dominirt; sie mußte die Herrschaft erst an die Politik, dann an die Geschichte abtreten. Ein Sohn jener Anfangsjahr-

Digitized by Google

zehnte hatte sich Hegel der Philosophie ergeben. Form und Inhalt der Philosophie seines Vaters hatte ihn so vollständig gefesselt, daß er in ihr alles beschlossen sah. Der Vater hatte ihm die volle Freiheit seiner Studien anheimgestellt. Der Sohn gesteht aber selbst: libertas mea non sine errore fuit. Des Irrthums wurde er erst inne durch das Zusammentreffen mit Geistern einer ganz andern wissenschaftlichen Richtung. Ist er gleich durch die Heidelberger Historiker bestimmt worden, sich der Geschichte zuzuwenden, so ist doch seine Arbeit nicht durch die von ihnen vertretene Art der geschichtlichen Behandlung beeinflußt worden. Sie ist so wenig in seinen Arbeiten erkennbar, daß man ohne sein eigenes Zeugniß kaum wissen würde, daß er durch Schlosser und Gervinus zur Geschichte gelangt ist. Ihr Verdienst ist es, ihn der Philosophie abwendig gemacht und zur Erkenntniß seines wahren Berufs gebracht zu haben. Alles was er in diesem Berufe gethan hat, war sein eigenstes Werk. Als er von Heidelberg nach Berlin heimkehrte, schrieb er an Gervinus, er habe sich in das Studium der Geschichte geworfen, „um das für unsere Zeit Nothwendige und Thunliche einsehen zu lernen". Hallt darin noch die Verbindung von Geschichte und Politik nach, wie sie Gervinus vertrat, so hat dann die Vertiefung in eine selbstgewählte Arbeit, die Ergründung ihrer Quellen und die Darlegung ihres Zusammenhangs unter einander und mit den großen geschichtlichen Erscheinungen ihrer Zeit K. Hegel zu dem angesehenen und eigenartigen Geschichtsforscher gemacht, als welcher er überall seit dem Erscheinen seines ersten Buches galt. Der Gegensatz gegen Ranke und seine Schule verlor sich ganz; früher vielleicht unter den Schülern als bei dem Meister. Von den ältern Schülern war Dönniges wohl der einzige, zu dem Hegel in nähere Beziehungen kam. Eine Erinnerung an die alte Spannung tönt noch in den anerkennenden Worten nach, die Ranke im Herbst 1863 nach Beendigung einer Münchener Commissionssitzung an seine Frau schrieb: „aus Erlangen war Hegel, der Sohn des Philosophen, erschienen, der mir einen immer bessern Eindruck macht, je öfter ich ihn sehe; durch und durch gelehrt, ein guter Professor und für unsere Arbeiten unschätzbar".

Einer Erinnerung an die philosophischen Studien seiner Jugend begegnet man in seinen Schriften äußerst selten. Ich wüßte kaum etwas anders anzuführen, als die noch in seine Berliner Zeit fallende Recension von Gervinus Grundzügen der Historik. Die Unterscheidung unter den Formen der Geschichtschreibung, die er hier verfolgt, ist ihm später, als er die Anfänge der städtischen

Digitized by Google

Historiographie darzulegen hatte, zu Gute gekommen. Der Ausgabe der Briefe seines Vaters (oben S. 64) hat er ein Schlußwort: Cousin, Schelling und Hegel angefügt, in dem er „als ein bloßer Historiker" mit Genugthuung die Thatsache constatirt, daß die Hegelsche Philosophie ungeachtet der funfzig Jahre seit dem Tode ihres Urhebers und der schnell lebenden Zeit noch weit verbreitet sei. Auch sonst hat er, wenn gleich nur gelegentlich und in kurzen Schlagworten, ritterlich die Angriffe zurückgewiesen, die die Philosophie seines Vaters von kirchlichem oder politischem Standpunkte verketzerten.

Es war ein großes und würdiges Ziel, das sich Hegels Arbeiten erwählt hatten: die italiänischen Städte und durch sie zu den deutschen Städten. Die feinen Fäden, die den menschlichen Geist lenken, mögen die Wahl geleitet haben. Die Philosophie seines Vaters hatte klein vom Mittelalter, aber groß von den Städten gedacht. Er sah in ihnen die Stätten, wo sich im Gegensatz zu Hierarchie und Feudalismus wieder bürgerliche Freiheit und Rechtszustände bildeten und beides dem staatlichen Leben zurückerobert wurde. Der Sohn gieng dem Städtewesen nach, wo er es in seiner höchsten Ausbildung fand. Er hat einmal sehr treffend auf den Abstand zwischen dem italiänischen und dem deutschen Städtewesen hingewiesen. In der Geschichte der italiänischen Städte sieht er einen der wenigen Höhenpunkte in der Culturgeschichte der Menschheit, eines der Verbindungsglieder zwischen der antiken und der modernen Welt. Solche Rolle können die deutschen Städte nicht für sich in Anspruch nehmen. Sie sind Culturstätten des deutschen Geistes gewesen, aber die politische Bedeutung der italiänischen Städte haben sie nicht errungen. Ihre Verfassungsgeschichte hat deshalb nicht das allgemeine Interesse wie die der Städte Italiens. Darum hat Hegel in jüngern Jahren auch davor gewarnt, das verfassungsgeschichtliche Element des deutschen Städtewesens allzusehr in den Vordergrund zu rücken. Die litterarische Entwicklung hat aber grade nach dieser Seite hin gedrängt und ihn selbst mit in diese Richtung gezogen.

In objectivster Weise hat er geforscht und dargestellt, gleich seinem Freunde Waitz dem Institutionellen, den Verfassungseinrichtungen seine Kraft zuwendend. Je weiter sie zurückliegen und der Forscher ihrer Entstehung nachgeht, stößt er auf lückenhafte Ueberlieferung, auf vereinzelte Namen und Daten, die des sichtbaren Zusammenhangs entbehren. Mag bei der Ermittlung von historischen Thatsachen es berechtigt sein, sich bei der Con-

Digitized by Google

statirung des Standes der Ueberlieferung zu beruhigen, bei der Erforschung und Darstellung von Rechtseinrichtungen ist diese Methode nicht ausreichend. So disparat wie die trümmerhafte Ueberlieferung können sie nicht existirt haben, sie haben doch einmal eine Ordnung, einen Zusammenhang von Vorschriften bedeutet, und der Verfassungs- und Rechtshistoriker wird auch hier der Aufgabe aller Geschichte, Erkenntniß des Zusammenhangs, nachgehen müssen.

Aber nicht was an Hegels Arbeiten vermißt wird, war hier darzulegen, sondern worin sie die Geschichtswissenschaft gefördert haben. Dem Uebergewicht des verfassungsgeschichtlichen Interesses hat er selbst entgegengearbeitet durch die große Sammlung der Städtechroniken. Sie bieten eine Fundgrube für alle Seiten des städtischen Wesens und sind von der nachfolgenden Forschung lange nicht nach Gebühr gewürdigt und benutzt worden. Hegel hat selbst die Hand angelegt und zu verschiedenen Bänden Beiträge geliefert, die sich mit dem wirthschaftlichen Inhalt der veröffentlichten Quellen beschäftigen. Er hat die Münz- und Preisverhältnisse von Nürnberg und Augsburg, den Nürnberger Stadthaushalt untersucht; als einer der ersten eine zuverlässige Ermittlung der Einwohnerzahl mittelalterlicher Städte veranstaltet.

Seine Arbeit über Städte und Gilden hat er mit dem Wunsch in die Welt hinausgesandt: mögen jüngere Kräfte mir nachfolgen und es mir zuvorthun! Er war sich immer bewußt, was er der Wissenschaft schulde. Die Vorrede seines ersten Buches unterschrieb er an dem Geburtstage seines Vaters mit einem dem Cassiodor, wie mich Wilhelm Meyer belehrt, entnommenen Citat, das die Verpflichtungen dessen hervorhebt, qui majorum virtutibus admonetur. Mögen auch die nachfolgenden Geschichtsforscher, die seine Arbeiten benutzen, sie ergänzen oder berichtigen, mit der gleichen Gewissenhaftigkeit und unermüdeten Schaffensfreudigkeit arbeiten und nicht vergessen, daß zu den majorum virtutes auch die Dankbarkeit gehört.

Digitized by Google

Anmerkungen.

Außer der oben S. 64 angeführten Selbstbiographie: Karl Hegel Leben und Erinnerungen (Leipz. 1900), die vom November 1899 bis Juli 1900 niedergeschrieben ist (im Folgenden citiert: Leben), habe ich durch die Güte der Hegelschen Erben, insbesondere der Frau Geh. Rath Klein geb. Hegel, ein 1878 begonnenes „Gedenkbuch" Hegels benutzen können, in dem manches ausführlicher, einzelnes richtiger als in der veröffentlichten Selbstbiographie behandelt ist. Briefe und Aufzeichnungen des Nachlasses, die im Folgenden angeführt und benutzt sind, verdanke ich der gleichen Liberalität.

S. 53 Universität Berlin] Nach Hegels Angabe in der gedruckten Selbstbiographie S. 9 wäre er von Marheineke als dem damaligen Rector immatriculirt und von Friedrich v. Raumer als Decan bei der philosophischen Facultät inscribirt worden. Beide Angaben sind unrichtig; und die erste widerstreitet einer ältern von ihm selbst in der seiner Dissertation angehängten Vita gemachten Bemerkung: ad cives academiae nostrae ab ipso patre, qui annuo rectoris munere tum fungebatur, adscriptus sum. Nach einer gütigen Mittheilung des Rectors der Berliner Universität, Herrn Geh. Raths Kekulé v. Stradonitz, vom 28. Mai 1902 ist Karl Hegel am 16. October 1830 von seinem Vater immatriculirt worden. „Das Rectorat, das jetzt pünktlich am 15. October wechselt, gieng damals etwas später, in der Zeit vom 20.—25. October auf den Nachfolger über". Der Nachfolger im Rectorat wurde Marheineke. Er inscribirte am 16. Oct. 1830 als zeitiger Decan den jungen Hegel bei der theologischen Facultät, der erst am 4. September 1831 zur philosophischen übertrat.

S. 53 Hegelsche Philosophie] Mox ubi patris percepi scholas . . . . . tanto ejus studii, cui omnia reliqua inesse putarem, ardore correptus sum, ut jam ad id solum animum applicarem. Vita p. 50.

S. 53 Herausgabe der Werke] Immanuel Hegel, Erinnerungen aus meinem Leben (1891) S. 6.

S. 53 Tod des Vaters] † 14. November 1831, dem Todestage Leibnizens, wie Erdmann (ADB. 11, 273) bemerkt.

S. 53 Daub] K. Fischer, Geschichte der neuern Philosophie Bd. VIII (1901) Thl. 1, 100.

S. 54 in Heidelberg lernte er einsehen, was ihm fehle]: intellexi me earum rerum inopia laborare, quae in experientia vitae eruditioneque nituntur, quum tamen hae alteram quasi partem efficerent scientiae humanae, sine qua altera quae a meris cogitationibus proficiscitur fundamento argumentoque careret. Vita p. 51. — G. G. Gervinus Leben. Von ihm selbst 1860 (Leipz. 1893) S. 295. G. Beseler, Erlebtes und Erstrebtes (1884) S. 30.

S. 54 Schlosser] Briefe von und an Hegel hg. v. K. Hegel II (Leipz. 1887) S. 187.

Digitized by Google

S. 54 Heidelberg der Ort s. schönsten Jugenderinnerungen] Leben S. 181.

S. 55 Abschied von Gervinus] Leben S. 78.

S. 55 Xeller] ADB. 44, 580.

S. 56 Recensionen] Gervinus, Grundzüge der Historik (Leipz. 1837) in den Jahrb. f. wiss. Kritik December 1839; Reumont, Italia Jg. 2 das. Januar 1840 S. 150; Dönniges, Kritik der Quellen für die Geschichte K. Heinrich VII. (Berl. 1841) das. Januar 1841 S. 121. Die Recension über Papencordts Cola di Rienzo in der Preußischen Staatszeitung (Leben S. 108) habe ich mangels näherer Angabe nicht aufzufinden vermocht.

S. 56 Philosophie der Geschichte] In einem mir vorliegenden Briefe Hegels an seinen Bruder d. d. Berlin 21. Dec. 1839 heißt es: „Ich habe in diesem Vierteljahr mehr als die Hälfte der Philosophie der Geschichte aus den Heften und Vaters Mss. bearbeitet. Ich finde immer mehr Gans' Arbeit auch mit den Mitteln, die er hatte, d. h. meinem und Hotho's Heft, die er allein benutzte, so lüderlich, hie und da so sinnlos und sinnverderbend, daß sie dem Vater mehr Schande als Ehre machen müßte, wenn es dabei geblieben wäre. Herr Dunker scheint aber sehr viel auf Gans Namen auf dem Titel zu geben und würde glauben, sein Buch weniger zu empfehlen, wenn mein Name zu dem seinigen noch hinzukäme! Der Verein hat ihm darin nachgegeben und mir auch drei Revisoren, Geh. R. Schulz[e], Henning und Hotho gesetzt, zur Garantie des Herrn Dunker. Wenn mich nicht die Pietät, die mich zu der Arbeit verpflichtet, andere Rücksichten bei Seite setzen hieße, so würde ich diese Herabsetzungen nicht ertragen haben; obschon ich von der anderen Seite den Vortheil habe, daß die Herren sehen, was meine Arbeit ist, und wie die von Gans beschaffen ist, und daß sie mich dafür loben und in guten Credit bringen". Die Vorrede K. Hegels zur zweiten Auflage, vom 16. Mai 1840 datirt, begnügt sich mit der Kritik seines Vorgängers: der verewigte Professor Gans . . . . . hat mit geistreichem Geschick Vorlesungen zn einem Buch gemacht. In der dritten 1848 erschienenen Auflage steht übrigens Karl Hegels Name auf dem Titel.

S. 56 Finanzwissenschaft] Nach dem Leben S. 113 nur einmal, nach dem Gedenkbuche dreimal.

S. 58 allgemeine Anerkennung] Aus den zahlreichen Dank- und Zustimmungsschreiben, die der Nachlaß enthält, sei ein Brief H. Leos d. d. Halle 7. Nov. 1847 hervorgehoben: „den ersten Theil [Ihres Buches] habe ich mit viel-vielfältiger Belehrung und eigentlich fortwährend in einer Art Rührung gelesen — ich hatte so lange alles auf Italien bezügliche zur Seite geworfen, daß als ich mich in Ihr Buch hereinlas, alle Mittelzeit zwischen jener, wo ich im Winter 1822 auf 1823 im wesentlichen mein Buch über die lombardischen Städte arbeitete, und dem Jahre 1847 herausfiel, ich mich mit einem male wieder in meine jungen Jahre versetzt fühlte und nun die Freude hatte, alles was ich damals im wesentlichen gesehen und gewollt, bestätigt nur nach allen Seiten feiner und gründlicher ausgearbeitet wider zu finden. Diese Lecture hat mich vollkommen schadlos gehalten für das vornehme Nasenrümpfen und superciliose Behandeln von Seiten Savignys und seiner Gevattern, was fortwährend wie ein Alp in den Augen des Publicums auf meinen italienischen Arbeiten gelegen hat, was ja im Grunde auch Bethmann-Hollweg noch fortsetzt, und was wesentlich am Ende mit gewirkt hat, mir dies ganze Gebiet zu verleiden". Er fügt noch hinzu, er habe seiner Freude über Hegels Buch in dem von Bercht herausgegebenden rheinischen Beobachter Luft gemacht und ihn gewählt, weil „ich

Digitized by Google

weiß, daß er doch in einem besondern Zutrauensverhältniß zu unserem Ministerio steht, wenn auch unabhängig redigirt wird. Ich wollte, unser Ministerium rührte sich ins Besondere auf Sie — wozu auch von hier aus einiger directe Anstoß gegeben worden ist, wie ihn eben die Verhältnisse zuließen — Doch von Pflastern soll man nicht eher reden, bis sie ziehen".

S. 58 nego quenquam] These K. Hegels bei seiner Promotion. Vita p. 52.

S. 58 Antheil an dem Schicksal der Sieben] Briefwechsel zwischen J. u. W. Grimm, Dahlmann u. Gervinus hg. v. Ippel II (1886) S. 155, 201, 206.

S. 59 historisches und journalist. Unternehmen] Unten S. 71. Das Programm des journalist. Unternehmens, der deutschen Zeitung, findet sich unter Hegels Papieren in der älteren Form (Ippel II S. 534 ff.) mit den handschriftlich eingetragenen Namen der „censorischen Direction", darunter für Preußen: Dahlmann, Arndt, J. Grimm, v. Schön, v. Sydow, Gl. Krauseneck, Hansemann in Aachen. Ueber die Verhandlungen zwischen Gervinus und Dahlmann, welche die Gründung der deutschen Zeitung hervorrief: die Briefe bei Ippel II Nr. 83—90. Springer, Dahlmann II 191—198. Zu dem Conflict, der sich hieraus entwickelte, gehört die folgende Stelle aus einem Briefe Dahlmanns an Hegel v. 24. März 1847: „herzliche Grüße an Sie und . . . an unsern lieben Thöel. Es scheint fürwahr jetzt die Zeit der Entzweiungen zu seyn. Ich hoffe, er kommt mit Beseler noch friedlich wieder zusammen [1]), am besten zunächst in Lübeck, wo auch Sie nicht fehlen werden. Mir soll, höre ich, Gervinus jetzt böse seyn, weil ich nicht an seiner Zeitung theilnehmen will. Aber aufzwingen lasse ich mir einmal nichts und noch weniger auflisten, und ich weiß, daß ich ihn redlich bei der Unternehmung berathen habe".

S. 59 Mecklenburgische Zeitung] Vom September 1848 bis September 1849 redigirte H., in Schwerin bei dem Advocaten Schweden wohnend, die neu als ein Organ der constitutionellen Partei von der Regierung begründete, mit dem 1. October ins Leben tretende Mecklenburgische Zeitung. Durch den Regierungsrath Prosch, der die Verfassungssachen bearbeitete und um die Handels- und Finanzverhältnisse des Landes große Verdienste erwarb, später als Abgeordneter zum deutschen Reichstag eins der tüchtigsten Mitglieder der nationalliberalen Partei (Krause in ADB. 26, 664), stand H. mit der Regierung in Verbindung. „Die Zeitung unterstützte mit voller Selbständigkeit das Ministerium von Lützows, welches ebenso wie der Großherzog selbst ehrlich und aufrichtig die Bahn der constitutionellen Verfassungsreform einschlug". Hegels Mitarbeiter war Dr. Fritz Eggers aus Rostock, der die täglichen Landtagsberichte verfaßte und gelegentlich geistvolle Artikel über das Schweriner Theater schrieb. Aesthetischen Studien zugewandt, hatte er sich ungern ihnen entrissen, widmete sich nun aber mit voller Hingebung der neuen Aufgabe. Im Frühjahr 1849 schied er aus, um die Redaction des Kunstblattes zu übernehmen (Gedenkbuch). Als Correspondenten seines Blattes nennt Hegel Aegidi in Berlin und Esmarch in Frankfurt. Auch nach seinem Ausscheiden aus der Redaction der Zeitung blieb H. noch ihr Mitarbeiter und schrieb im Winter 1849/50 eine Reihe von Artikeln über

1) Gemeint ist Thöls gegen Beselers Volksrecht und Juristenrecht gerichtete Schrift: Volksrecht, Juristenrecht u. s. w. (Rostock 1846). Vgl. Beseler, Erlebtes und Erstrebtes S. 52. Danach kam es nicht in Lübeck auf der zweiten Germanistenversammlung, sondern erst während des Frankfurter Parlaments zur Versöhnung zwischen beiden.

Digitized by Google

den Rechtsbestand des neuen Staatsgrundsetzes v. 10. Octbr. 1849, das nun gegen die Reaction des Adels und seine literarischen Wortführer, Florencourt und Maaßen, den spätern Wiener Canonisten, verfochten werden mußte.

S. 59 v. Altenstein] Leben S. 105.

S. 59 frühere Anregung] Oben S. 70.

S. 60 Studien zur Landesgeschichte] Nach Uebersendung des ersten Bandes der Geschichte der ital. Städteverfassung dankte der Großherzog Friedrich Franz mit dem Zusatz: „Wir können freilich nur wünschen, daß das vorgedachte Werk nicht unvollendet bleibe, würden es jedoch auch gerne sehen, daß ihr euren Fleiß und eure Talente der vaterländischen Geschichte zuwendet und sowohl in Vorlesungen als in Schriften ein richtiges historisches Verständniß der Zustände Mecklenburgs herbeizuführen euch bemühet“ (Schwerin, den 2. Juni 1847). Die zweite Anregung kam von ganz anderer Seite her. Auf der Germanistenversammlung zu Frankfurt im September 1846, an der Hegel theilnahm, war ein litterarisches Unternehmen verabredet, dessen Gegenstand die neuere deutsche Geschichte bilden und das neben einer Geschichte des Bundes eine Geschichte der einzelnen Länder umfassen sollte. Der Gedanke gieng von Droysen aus. Die Buchhandlung Veit & Co. in Berlin war als Verlegerin, Dahlmann als Redacteur des Ganzen in Aussicht genommen. Die Angelegenheit, schon seit 1842 im Gange (Ippel II S. 221), kam durch einen zu Frankfurt am 26. Septbr. 1846 zwischen dem Verleger und den einzelnen Mitarbeitern abgeschlossenen Vertrag zu einiger Bestimmtheit. Das Werk, „Geschichte der deutschen Bundesstaaten seit 1815“ betitelt, sollte in einer Reihe von Bänden bestehen, deren keiner 25 Bogen übersteigen und mit drei Friedrichsdor für den Druckbogen honorirt werden sollte. Unter den Mitarbeitern waren auffallend viel Politiker, wenig Historiker: Wippermann für Kurhessen, Jaup für das Großh. Hessen, Steinacker für Hannover, R. Mohl für Würtemberg, Wurm für die Hansestädte, Jürgens für Braunschweig, Reyscher für die Geschichte des Bundes, Gervinus für allgemeine Geschichte. Hegel übernahm die Mecklenburgische Geschichte und war auch durch seine Verbindungen nach Baiern thätig, dort den rechten Mann für die Mitarbeit zu gewinnen. Zuerst war an den Grafen Giech gedacht, der dann auf Lerchenfeld als den eigentlich zuständigen hinwies. Dahlmann, dem die Leitung des Ganzen zustehen sollte, hat in einem Briefe an die Verlagshandlung vom 30. Octbr. 1846, den sie Hegel in Abschrift mittheilte, über die von den Mitarbeitern zu befolgenden Grundsätze bemerkt: „Ich möchte am liebsten, daß jeder Verfasser in der Abfassung seinem Genius folgte, aber sich zum Zwecke der Darstellung den so wichtigen Satz: Kurz und Bündig dreimal täglich ins Gewissen riefe. Wir wollen wirken auf die sterbliche Mitwelt und stiften immerfort Bücher an, für deren Lesung eine Unsterblichkeit gehört. Was hat sich denn Jürgens, unserer wackerer Mitarbeiter, unter seinem Luther gedacht, der zwei Bände, jeden von 700 Seiten, durchleben muß, ehe nur einmal die Reformation anfängt?[1]). Für wen schreiben wir denn? Um in dieser Zeit, die es nöthig hat schriftstellerisch zu wirken, muß man sich gewöhnen, das Handwerkszeug am Ende wegzulegen, die Mühe, die man gehabt hat, zu verbergen statt damit groß zu thun. Unsere Landsleute müssen mit einem mäßigen Aufwande von Zeit sich

1) Das dreibändige Werk: Luthers Leben von K. Jürgens, dem später als großdeutschen Publicisten bekannten Braunschweiger, gelangt auch in seinem dritten Bande (Leipz. 1847) nicht über den October 1517 hinaus.

Digitized by Google

unterrichten können, wie es in einem unserer Bundesstaaten mittlerer Größe beschaffen ist. Wollen Sie dieses Kurz und Bündig jedem Mitarbeiter als meinen leitenden Grundsatz gelegentlich recht nahe rücken, so erweisen Sie sicherlich der Sache einen Dienst". „Sie winken wieder auf den Antheil hin, den ich selber übernehmen sollte. Ich glaube wirklich, denn seiner Ehrlichkeit darf sich am Ende jeder rühmen, daß es wenige in der Welt so gut und redlich mit Preußens Gegenwart und Zukunft meinen, ihm so ernst anhänglich sind, wie ich; allein kaum habe ich nur einmal gewagt auf einem kleinen Fleck die alte Schmeichelsalbe abzuwaschen, so bricht von allen Seiten der Lärmen los; ich meine meinen Brief wegen des Programmes. Man bedarf des Vertrauens, um Nachrichten über die letzten Decennien zu erhalten, und so steht die Zeit, daß man sich des Vertrauens unwürdig machen muß, um es zu erlangen". Der citirte Brief bezieht sich auf das Programm einer damals projectirten Deutschen Zeitung, die in Berlin erscheinen sollte; er ist vom 6. August 1846 datirt und von Springer, Dahlmann II (1872) S. 443 abgedruckt.

S. 60 dreihundert Jahre vor der Zeit . . . . endete] Es ist auffallend, wie oft als Endpunct das J. 1855 angegeben wird. Der Druckfehler findet sich sogar in Hegels eigenem Leben und zwar zweimal S. 170 und 210.

S. 60 Ordnungen der Gerechtigkeit] Schon in der Gesch. der ital. Städteverf. II 275 sprach er seinen Vorsatz ihrer spätern Behandlung aus.

S. 61 Städtechroniken] Ausführlicher als hier habe ich in den Hansischen Geschichtsblättern Jahrg. 1901 über die Chroniken der deutschen Städte gesprochen.

S. 65 libertas mea] Vita p. 49.

S. 65 das für unsere Zeit nothwendige] Gervinus Leben S. 296.

S. 65 Dönniges] Leben S. 109.

S. 65 Ranke] Sämmtl. W. 53 S. 425.

S. 65 Gervinus] Grundzüge der Historik, Leipz. 1837, wiederabgedruckt in Gervinus Leben S. 353—396. Oben S. 69.

S. 66 die Philosophie seines Vaters] K. Fischer I 795. Hegel, Vorlesungen über die Philosophie der Geschichte (3. Aufl.) S. 465 ff. 444 ff.

S. 66 Abstand zwischen d. ital. und dem deutschen Städtewesen] Kieler Monatsschr. 1854 S. 155.

S. 66 das verfassungsgeschichtl. Element] Kieler Monatsschr. 1854 S. 156.

S. 67 Citat] Cassiodor Variarum IX 22 v. J. 533: Plus exigitur heres bonorum, quando sine cessatione compellitur, qui majorum virtutibus adomonetur. Die Bedeutung des heres bonorum als des Erben wackerer Männer wird klar durch den voraufgehenden Satz, worin der König Athalarich den Paulinus auffordert: sume insignia consulatus, honorem quidem arduum, sed familiae vestrae domesticum. Das Citat hatte auch andern zu rathen aufgegeben. Göschel schrieb aus Magdeburg 25. Janr. 1847 nach Empfang der ital. Städteverf. von dem Antheil, den er an dem Verfasser und seinem Buche nehme: „so interessirt mich auch sehr das lateinische Schlußwort der Vorrede und suche nach dem Römer, der es uns hinterlassen, ohne bis jetzt gefunden zu haben".

Digitized by Google

Adresse an Herrn Eduard Süß in Wien.

Göttingen, den 16. August 1901.

Hochgeehrter Herr Präsident!

Zu dem bedeutungsvollen Fest am 20. d. M., Ihrem siebenzigsten Geburtstage, zu welchem Ihnen von nah und fern zahlreiche Zeichen der Liebe und Verehrung zugehen werden, sendet Ihnen auch die K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen die aufrichtigsten Glückwünsche.

Rückblickend in Ihre glänzende Forscherlaufbahn gedenken wir mit Ihren engeren und weiteren Fachgenossen voll Bewunderung der bahnbrechenden Arbeiten, mit denen Sie der Geologie und Palaeontologie durch genaue und mustergültige Untersuchungen sichere Grundlagen schufen und vielfach neue Wege wiesen. Wenn seit den Zeiten eines Leopold von Buch, Elie de Beaumont und Charles Lyell die Anschauungen über den Aufbau der Erdoberfläche ein völlig neues Gepräge tragen, so haben Sie durch Ihre ideenreichen und weitausblickenden Schriften hierzu den nächsten und nachhaltigsten Anstoß gegeben.

Kein lebender Geolog ist in gleichem Maße zur Beherrschung über eine enorm ausgedehnte und ebenso verstreute Fachlitteratur gelangt, noch hat er die Ergebnisse der Forschung wie Sie unter gleich große einheitliche Gesichtspunkte zu stellen vermocht. Wenn auch Ihre zahlreichen, trefflichen Arbeiten über Brachiopoden, Graptoliten, über die Entstehung der Alpen und andere mehr unvergessen bleiben werden, so ist doch Ihr neuestes, umfassendes, prachtvolles Werk „Das Antlitz der Erde“ von einschneidendster Bedeutung für die Geologie und die physikalische Geographie und wird auf lange Jahre hinaus durch die neuen Gesichtspunkte und Probleme zahleiche Fachgenossen zu weiteren Forschungen anregen.

Digitized by Google

Der siebenzigste Geburtstag wird für Sie einen wichtigen Lebensabschnitt bilden. Sie wollen endgültig der Lehrthätigkeit entsagen. Aber wenn auch fortan nicht mehr wißbegierige Schüler zu Ihren Füssen sitzen, so hofft doch ein weiter Kreis von Geologen und Forschern aller Nationen auf erdkundlichem Gebiet auch ferner von Ihnen Belehrung und Anregung zu erhalten.

Aber wir haben die Freude, Sie seit Jahren noch von einer anderen Seite Ihres Wirkens näher zu kennen. Weit über die Grenzen Ihres Faches blickend, immer das Große und Ganze menschlichen Geistesringens ins Auge fassend, haben Sie von jeher dem Zusammenwirken wissenschaftlicher Forscher zur Lösung wichtiger Fragen das Wort geredet. Sie haben keine Mühe gescheut, ein solches ins Leben zu rufen, wo immer sich Gelegenheit fand. Ihnen, hochgeehrter Herr Präsident, verdankt die aussichtsreiche Vereinigung deutscher Akademieen, die jetzt die Vorläuferin einer weit umfassenderen Körperschaft geworden, in erster Linie mit ihre Entstehung. In jener hat die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu Wien unter Ihrer Aegide mehrfach in enger Gemeinschaft mit unserer Gesellschaft wissenschaftliche Unternehmungen ins Leben gerufen. Es ist uns eine Freude, dies schöne Einvernehmen aufs dankbarste bei diesem Anlaß anzuerkennen.

Wie Sie aber bisher in so seltener Weise die vielseitigste und erfolgreichste Wirksamkeit nach außen mit der ernstesten Forscherthätigkeit zu vereinigen wußten, so möge auch ferner ein gütiges Geschick über Ihnen walten und es möge Ihnen noch lange vergönnt sein, in gleicher Rüstigkeit des Geistes und des Körpers, die Wissenschaft weiter zu fördern.

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Digitized by Google

Adresse an Herrn Dedekind in Braunschweig.

Göttingen, den 17. März 1902.

Hochgeehrter Herr Jubilar!

An der Feier Ihres 50 jährigen Doctorjubiläums nimmt die K. Gesellschaft der Wissenschaften unmittelbaren und besonders herzlichen Anteil. Sind Sie doch nicht nur — neben Lord Kelvin — das älteste Mitglied unserer mathematisch-physikalischen Klasse, sondern auch ihr treuestes Mitglied, dessen langfortgesetzte wissenschaftliche Thätigkeit mit Göttingen und seiner Gesellschaft der Wissenschaften von je in unlösbarer Verbindung geblieben ist.

Der in seiner Schlichtheit so beredte Aufsatz, den Sie noch letzthin bei Gelegenheit unseres 150 jährigen Jubiläums zu unserer historischen Festschrift beigesteuert haben, ruft die Zeit zurück, wo Sie als junger Student zu den Füßen des unsterblichen Gauß gesessen sind, — Sie haben folgeweise die Entstehung der großartigen Schöpfungen Riemanns und die glänzende Göttinger Lehrthätigkeit von Dirichlet mit erlebt. Auf Grund der so empfangenen persönlichen Eindrücke haben Sie dann zunächst die Aufgabe erfaßt, die große mathematische Tradition der genannten Forscher lebendig zu halten und der Nachwelt zu übermitteln; nehmen Sie für Alles, was Sie in dieser Hinsicht gethan, bei der heutigen Gelegenheit unsern besondern Dank! Aber bald sind Sie im Verfolg des eingeschlagenen Weges zu eignen Schöpfungen größten Stiles fortgeschritten. Die allgemeine Idealtheorie der algebraischen Zahlkörper, die Ihnen nach langen Mühen in überraschend einfacher Weise gelungen ist, wird dauernd den Ruhm Ihres Namens verkünden. Indem sich zeigte, daß die Methoden auf die Behandlung der algebraischen Functionen einer Variabeln über-

Digitized by Google

tragbar sind, wurde die Zahlentheorie aus der isolirten Stellung im Kreise der anderen mathematischen Disciplinen befreit, die ihr auch nach den Arbeiten von Gauß und Dirichlet noch anhaftete und die eine systematische Weiterführung derselben unmöglich machte. Nach anderer Seite waren Sie einer der ersten, welche die Begriffe der Continuität und der Zahl einer neuen, einschneidenden Kritik unterwarfen und damit die zuverlässige Grundlage gewannen, auf welcher das heutige Lehrgebäude der arithmetischen Wissenschaft ruht. In der Arbeit über die elliptischen Modulfunctionen entwickelten Sie tiefsinnige functionentheoretische Gedanken, die nur erst im Keime bei Gauß und Riemann vorhanden waren und die nun, dank Ihrer Darlegung, allgemein zugänglich wurden und seitdem einen Hauptgegenstand für die Arbeiten der jüngeren Generation gebildet haben. Wir wollen diese Aufzählung hervorragender Fortschritte nicht noch weiter fortsetzen. Mit besonderer Befriedigung dürfen Sie an Ihrem bevorstehenden Ehrentage empfinden, daß Nichts von dem, was Sie in einsamem Nachdenken geschaffen, auf die Dauer unbeachtet geblieben ist, sondern daß Alles zu seiner Zeit maßgebend in die Entwickelung der Mathematik eingegriffen hat, wo es hundertfältige Frucht bringt.

Abgeneigt allem äußeren Gepränge haben Sie erklärt, sich einer öffentlichen Feier Ihres Doctorjubiläums entziehen zu wollen. Wir hoffen trotzdem, daß Ihnen diese unsere Zuschrift nicht unwillkommen ist, — mögen Sie sie nun an der Stätte Ihrer amtlichen Wirksamkeit oder in ländlicher Zurückgezogenheit, in der Mitte Ihrer heimatlichen Wälder, erhalten. Nehmen Sie dieselbe als ein Zeichen treuen Gedenkens.

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Digitized by Google

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1902.

Sekretäre.

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath.
Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath.

Ehren-Mitglieder.

Friedrich Althoff, Dr., Ministerial-Director zu Berlin, seit 1901.
Gottfried Planck, Dr., Prof., Wirklicher Geheimer Rath, Excellenz, zu Göttingen, seit 1901.
Ernst Abbe, Dr., Prof., zu Jena, seit 1901.
Georg von Neumayer, Dr., Wirklicher Geheimer Admiralitätsrath, zu Hamburg, seit 1901.
Wilhelm v. Hartel, Dr., Unterrichtsminister, Excellenz, zu Wien, seit 1901.
Rochus Freiherr von Liliencron, Dr., Wirklicher Geheimer Rath und Prälat. Excellenz, zu Schleswig, seit 1901.
Conrad Studt, Dr., Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Excellenz, zu Berlin, seit 1901.
Georg Kopp, Dr., Kardinal-Fürstbischof, Eminenz, zu Breslau, seit 1902.

Ordentliche Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Georg Meißner, Dr. med., Prof., Geh. Medicinalrath, seit 1861.
Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1874. D. z. Sekretär.
Eduard Riecke, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1872.)
Adolf von Koenen, Dr. ph., Prof., Geh. Bergrath, seit 1881.
Woldemar Voigt, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1883.
Friedrich Merkel, Dr. med., Prof., Geh. Medicinalrath, seit 1885.

Digitized by Google

Theodor Liebisch, Dr., ph., Prof., seit 1887.
Felix Klein, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1887. (Zuvor Assessor, seit 1871, Correspondent seit 1872.)
Gottfried Berthold, Dr. ph., Prof., seit 1887.
Albert Peter, Dr. ph., Prof., seit 1889.
Otto Wallach, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1890.
Johannes Orth, Dr. med., Prof., Geh. Medicinalrath, seit 1893.
David Hilbert, Dr. ph., Prof., seit 1895.
Walther Nernst, Dr. ph., Prof., seit 1898.

Philologisch-historische Klasse.

Hermann Wagner, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1880.
Ferdinand Frensdorff, Dr. jur. und Dr. ph., Prof., Geh. Justizrath, seit 1881.
Franz Kielhorn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1882.
Karl Dilthey, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1892.
Wilhelm Meyer, Dr, ph., Prof., seit 1892.
Julius Wellhausen, Dr. th. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1892.
Gustav Cohn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1893.
Nathanael Bonwetsch, Dr. th., Prof., seit 1893.
Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1893, D. z. Sekretär.
Gustav Roethe, Dr. ph., Prof., seit 1893.
Paul Kehr, Dr. ph., Prof., seit 1895.
Wilhelm Schulze, Dr. ph., Prof., seit 1898.

Assessor.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Bernhard Tollens, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1884.

Auswärtige Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Alexander Agassiz, Prof., zu Cambridge, U. S. A., seit 1898. (Zuvor Correspondent seit 1879.)
Arthur Auwers, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rath, Beständiger Secretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1882. (Zuvor Correspondent seit 1871.)
Adolf von Bayer, Dr., Prof., Geh. Rath, zu München, seit 1892. (Zuvor Correspondent seit 1879.)
Ludwig Boltzmann, Dr., Prof., K. K. Hofrath, zu Leipzig, seit 1887. (Zuvor Correspondent seit 1882.)

Digitized by Google

Luigi Cremona, Prof., Senator des Königsreichs Italien und Director der Ingenieurschule zu Rom, seit 1880. (Zuvor Correspondent seit 1869.)

Gaston Darboux, Dr., Prof., zu Paris, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1883.)

Richard Dedekind, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Braunschweig, seit 1862. (Zuvor Correspondent seit 1859.)

Wilhelm Foerster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1875.)

Lazarus Fuchs, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1875. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1874.)

Karl Gegenbauer, Dr., Prof., Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1891.

Robert Helmert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Potsdam, seit 1898. (Zuvor Correspondent seit 1896.)

Joseph Dalton Hooker, Director der Königlichen Gärten zu Sunnigdale, seit 1865.

William Thomson Lord Kelvin, Prof., zu Glasgow, seit 1864. (Zuvor Correspondent seit 1859.)

Carl Klein, Dr., Prof., Geh. Bergrath, zu Berlin, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1877.)

Albert von Kölliker, Dr. ph. und Dr. med., Geh.-Rath, Excellenz, Prof., zu Würzburg, seit 1882. (Zuvor Correspondent seit 1862.)

Friedrich Kohlrausch, Dr., Geh. Reg.-Rath, Präsident der phys.-techn. Reichsanstalt, zu Charlottenburg, seit 1879. (Zuvor Assesor seit 1867.)

Carl Neumann, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1868. (Zuvor Correspondent seit 1864.)

Henri Poincaré, Prof. zu Paris, seit 1892. (Zuvor Correspondent seit 1884.)

Johannes Reincke, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Kiel, seit 1885. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1882.)

Hermann Amandus Schwarz, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1892. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1875, Correspondent seit 1869.)

H. Graf zu Solms-Laubach, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1879.)

Sir Gabriel Stokes, Prof., zu Cambridge, seit 1882. (Zuvor Correspondent seit 1864.)

Eduard Sueß, Dr., Prof., Präsident der K. Akademie der Wissenschaften, zu Wien, seit 1892. (Zuvor Correspondent seit 1884.)

Digitized by Google

Wilhelm Waldeyer, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1877.)

Heinrich Weber, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1895. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1892, Corrspondent seit 1875.)

Johannes Wislicenus, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1901.

Karl von Zittel, Dr., Prof., Geh.-Rath, Präsident der K. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1892.)

Philosophisch-historische Klasse.

Friedrich Bechtel, Dr., Prof., zu Halle, seit 1895. (Zuvor Assessor seit 1882.)

Franz Bücheler, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1899. (Zuvor Correspondent seit 1881.)

Alexander Conze, Dr., Generalsekretär des archäol. Instituts zu Charlottenburg, seit 1890. (Zuvor Correspondent seit 1875.)

Leopold Delisle, Administrateur général de la bibl. nationale, zu Paris, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1866.)

P. Heinrich Denifle, Sotto-archivista della S. Sede, zu Rom, seit 1896.

Hermann Diels, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin seit 1899.

L. Duchesne, Abbé, zu Paris, seit 1891.

Franz Ehrle, Präfect der vaticanischen Bibliothek, zu Rom, seit 1901.

Julius Ficker von Feldhaus, Dr., Prof., Hofrath, zu Innsbruck, seit 1889. (Zuvor Correspondent seit 1866.)

M. J. de Goeje, Prof., zu Leiden, seit 1888. (Zuvor Correspondent seit 1872.)

Friedrich Imhoof-Blumer, Dr., zu Winterthur, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1886.)

Adolf Kirchhoff, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1881. (Zuvor Correspondent seit 1865.)

Ernst von Meier, Dr., Geh. Ober-Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1901.

Theodor Mommsen, Dr., Prof., zu Charlottenburg, seit 1867. (Zuvor Correspondent seit 1857.)

Theodor Nöldecke, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1883. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Julius Oppert, Prof., zu Paris, seit 1887. (Zuvor Correspondent seit 1876.)

Digitized by Google

Gaston Paris, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1889.
Richard Pietschmann, Dr., Prof., Abtheilungsdirector an der Kgl. Bibliothek, zu Berlin, seit 1899. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1897.)
Theodor von Sickel, Dr., Prof., Hofrath, zu Wien, seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1868.)
Wilhelm Thomsen, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.
Hermann Usener, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1899, (Zuvor Correspondent seit 1887.)
Pasquale Villari, Senatore del Regno d'Italia, zu Florenz, seit 1896.
Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1897. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1892.)
Wilhelm Wilmanns, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1894.)

Correspondenten.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Svante Arrhenius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1901.
Charles Barrois, Dr., Prof., zu Lille, seit 1901.
Max Bauer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Marburg, seit 1892.
Friedrich Beilstein, Dr., Geh. Rath, Excellenz, zu St. Petersburg, seit 1880.
Ernst Wilhelm Beneke, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1889.
Wilhelm von Bezold, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1897.
Karl Anton Bjerknes, Dr., Prof., zu Christiania, seit 1873.
Eduard Bornet, Prof., zu Paris, seit 1885.
J. Boussinesq, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1886.
Alexander Brill, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
Heinrich Bruns, Dr., Prof., Geh. Rath, zu Leipzig, seit 1892.
Otto Bütschli, Dr., Prof., Hofrath, zu Heidelberg, seit 1889.
Georg Cantor, Dr., Prof., zu Halle, seit 1878.
Carl Chun, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1901.
Giacomo Ciamician, Dr., Prof., zu Bologna, seit 1901.
Ulisse Dini, Prof., zu Pisa, seit 1880.
Theodor Wilhelm Engelmann, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Berlin, seit 1884.
Emil Fischer, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1901.
Rudolf Fittig, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1882.
Walter Flemming, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1887.

Digitized by Google

Lazarus Fletcher, zu London, seit 1901.
F. Fouqué, Membre de l'Insitut, zu Paris, seit 1891.
Georg Frobenius, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1886.
Sir Archibald Geikie, Director-General of the Geological Survey of the United Kingdom, zu London, seit 1889.
J. Willard Gibbs, Prof., zu Newhaven, seit 1889.
Camillo Golgi, Prof., zu Pavia, seit 1892.
Friedrich Leopold Goltz, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1892.
Paul Gordan, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1870.
Giovanni Battista Grassi, Prof., Vicesekretär der math.-naturw. Klasse der R. Academia dei Lincei, zu Rom, seit 1901.
James Hall, Prof., zu Albany (New-York), seit 1885.
Victor Hensen, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Kiel, seit 1892.
Ludimar Herrmann, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Königsberg i. Pr., seit 1886.
Wilhelm His, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Leipzig, seit 1880.
Wilhelm Hittorf, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Münster, seit 1879.
Jacob Heinrich van't Hoff, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1892.
Wilh. Theod. Bernhard Holtz, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1869.
William Huggins, Prof., zu London, seit 1876.
Adolf Hurwitz, Dr., Prof., zu Zürich, seit 1892.
Alexander von Karpinski, Excellenz, Präsident des Comité géologique, zu St. Petersburg, seit 1892.
Ludwig Kiepert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Hannover, seit 1882.
Leo Königsberger, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Heidelberg. seit 1874.
Carl Koppe, Dr., Prof., zu Braunschweig, seit 1901.
Karl von Kupffer, Dr., Prof., Geh. Rath, zu München, seit 1889.
E. Ray Lankester, Prof., zu London, seit 1901.
A. Michel Lévy, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1901.
Heinrich Limpricht, Dr. med. und ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Greifswald, seit 1860. (Zuvor Assessor seit 1857.)
Ferdinand Lindemann, Dr., Prof., zu München, seit 1882.
Rudolf Lipschitz, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1867.
Joseph Norman Lockyer, Prof., zu London, seit 1876.
Hubert Ludwig, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1901.
Ernst Mach, Dr., Prof., Reg.-Rath, zu Wien, seit 1887.
Adolf Mayer, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1872.

Digitized by Google

Dmitri Mendelejeff, Dr., Prof., zu St. Petersburg, seit 1892.
Franz Carl Joseph Mertens, Dr., Prof., zu Wien, seit 1877.
Hermann Minkowski, Dr., Prof., zu Zürich, seit 1901.
Gösta Mittag-Leffler, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1878.
Simon Newcomb, Prof., Superintendent of the American Nautical Almanac, zu Washington, seit 1888.
Max Nöther, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1892.
Wilhelm Ostwald, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1901.
Edmond Perrier, Director des Muséum d'Histoire naturelle zu Paris, seit 1901.
Wilhelm Pfeffer, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1885.
Eduard Pflüger, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Bonn, seit 1872.
Emile Picard, Prof., zu Paris, seit 1884.
Max Planck, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1901.
Friedrich Prym, Dr., Prof., zu Würzburg, seit 1891.
Georg Quincke, Dr., Prof., Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1866.
William Lord Rayleigh, zu Witham (Essex), seit 1886.
Friedrich von Recklinghausen, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1901.
Gustav Retzius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1886.
Theodor Reye, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1877.
Ferdinand Freiherr von Richthofen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1875.
Wilhelm Conrad von Röntgen, Dr., Prof., Geh. Rath, zu München, seit 1883.
Henry Enfield Roscoe, Prof., zu London, seit 1874.
H. Rosenbusch, Dr., Prof., Geh. Bergrath, zu Heidelberg, seit 1882.
Carl Runge, Dr., Prof., zu Hannover, seit 1901.
Georg Salmon, Prof., Provost des Trinity College, zu Dublin, seit 1869.
Franz Eilhardt Schulze, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1883.
Arthur Schuster, Dr., Prof., zu Manchester, seit 1901.
Simon Schwendener, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1892.
Hugo Seeliger, Dr., Prof., zu München, seit 1901.
Walther Spring, Dr., Prof., zu Lüttich, seit 1901.
Johann Strüver, Dr., Prof., zu Rom, seit 1874.
Ludwig Sylow, Dr., zu Frederichshall, seit 1883.
Johannes Thomae, Dr., Prof., zu Jena, seit 1873.

Digitized by Google

Gustav Tschermak, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Wien, seit 1884.
Victor Uhlig, Dr., Prof., zu Wien, seit 1901.
Hermann Vöchting, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
Hermann Vogel, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rath, zu Potsdam, seit 1887.
Karl von Voit, Dr., Prof., Geh.-Rath u. Ober-Medicinalrath, zu München, seit 1879.
Aurelius Voß, Dr., Prof., zu Würzburg, seit 1901.
Emil Warburg, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1887.
Eugen Warming, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1888.
Julius Weingarten, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1886.
Ferdinand Zirkel, Dr., Prof., Geh. Bergrath, zu Leipzig, seit 1886.

Philosophisch-historische Klasse.

Theodor Aufrecht, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1871.
Otto Benndorf, Dr., Hofrath, Director des k. k. österreichischen archäol. Instituts, zu Wien, seit 1883.
Hugo Berger, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1901.
Friedrich von Bezold, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1901.
Adalbert Bezzenberger, Dr., Prof., zu Königsberg i. Pr., seit 1884.
Gustav Bickell, Dr., Prof., zu Wien, seit 1901.
Wilhelm von Bippen, Dr., Staatsarchiv- und Senatssekretär, zu Bremen, seit 1894.
Sophus Bugge, Dr., Prof., zu Christiania, seit 1887.
Graf Carlo Cipolla, zu Turin, seit 1898.
Maxime Collignon, Dr., Prof. an der faculté des lettres, zu Paris, seit 1894.
Julius Eggeling, Dr., Prof., zu Edinburgh, seit 1901.
Adolf Ermann, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1888.
Arthur J. Evans, Dr., Prof., zu Oxford, seit 1901.
J. F. Fleet, Dr., zu London, seit 1885.
Wendelin Förster, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1901.
Wilhelm Fröhner, Dr., zu Paris, seit 1891.
Percy Gardner, Prof., zu Oxford, seit 1886.
Charles Groß, Prof., zu Cambridge (Mass.), U. S. A., seit 1891.
Ignazio Guidi, Prof., zu Rom, seit 1887.
Ludwig Hänselmann, Dr., Prof., Stadtarchivar, zu Braunschweig, seit 1878.
Henry Harrisse, zu Paris, seit 1892.
G. N. Hatzidakis, Dr., Prof., zu Athen, seit 1901.

Digitized by Google

Albert Hauck, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1894.
Joh. Ludwig Heiberg, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1899.
Wolfgang Helbig, Dr., Prof., zu Rom, seit 1882.
Riccardo de Hinojoso, Dr., Prof., zu Madrid, seit 1901.
Constantin Höhlbaum, Dr., Prof., zu Gießen, seit 1889.
Georg Hoffmann, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1881.
Oswald Holder-Egger, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1896.
Theophile Homolle, Dr., Prof., zu Paris, seit 1901.
Friedrich Hultsch, Dr., Ober-Schulrath zu Dresden, seit 1885.
Eugen Hultzsch, Dr., Government Epigraphist, zu Madras, seit 1895.
Hermann Jacobi, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1894.
Finnur Jonsson, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.
Adolf Jülicher, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1894.
Ferdinand Justi, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Marburg, seit 1875.
Konstantinos Kontos, Prof., zu Athen, seit 1892.
Adolf Köcher, Dr., Prof., zu Hannover, seit 1886.
Ulrich Köhler, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1871.
Axel Kock, Dr., Prof., zu Lund, seit 1901.
Karl Koppmann, Dr., Stadtarchivar, zu Rostock, seit 1889.
Karl Krauß, Dr., Prof., zu Wien, seit 1901.
Georg Löschcke, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1901.
Sir Clemens Robert Markham, zu London, seit 1890.
Aug. Mau, Dr., Prof. und Bibliothekar des Kgl. archäologischen Instituts zu Rom, seit 1894.
Giovanni Mercati, zu Rom, seit 1901.
Eduard Meyer, Dr., Prof., zu Halle, seit 1895.
Leo Meyer, Dr., Prof., Wirkl. Staatsrath, Excellenz, zu Göttingen, seit 1865. (Zuvor Assessor seit 1861.)
Adolf Michaelis, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1879.
Hermann Möller, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1894.
Ernesto Monaci, zu Rom, seit 1901.
Gabriel Monod, Membre de l'Institut, zu Versailles, seit 1901.
Carl Müller, Dr., Prof., zu Breslau, seit 1899.
Benedictus Niese, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1901.
Heinrich Nissen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath zu Bonn, seit 1884.
Hermann Oldenberg, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1890.
Joseph Partsch, Dr., Prof., zu Breslau, seit 1901.
Eugen Petersen, Dr., Prof., Sekretär des archäologischen Instituts, zu Rom, seit 1887.
Richard Pischel, Dr., Prof., zu Halle, seit 1889.
Max Rieger, Dr., zu Darmstadt, seit 1897.

Digitized by Google

Moritz Ritter, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1892.
Carl Robert, Dr., Prof., zu Halle, seit 1901.
Goswin Freiherr von der Ropp, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1892.
Dietrich Schaefer, Dr., Prof., zu Heidelberg, seit 1894.
Edward Schröder, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1894.
Otto Seek, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1895.
Albert Sorel, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1901.
Elias Steinmeyer, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1895.
William Stubbs, D. D. Rt. Rev. Bishop of Oxford, Cuddesdon Palace near Oxford, seit 1872.
Ludwig Traube, Dr., Prof., zu München, seit 1894.
Johannes Vahlen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1885.
Curt Wachsmuth, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1884.
Jacob Wackernagel, Dr., Prof., zu Basel, seit 1901.
Joh. Gottfried Wetzstein, Dr., Consul a. D., zu Berlin, seit 1886.
Wilhelm Windelband, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1901.
Heinrich Zimmer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1894.

Digitized by Google

Benekesche Preisstiftung.

Am 11. März 1902, dem Geburtstage des Begründers, des weil. Konsistorialrathes Carl Gustav Beneke aus Berlin, wurde in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät verkündet, daß zur Preisbewerbung für 1902 keine Bewerbungsschrift eingeliefert worden ist.

Für das Jahr 1902 wird folgende neue Preisaufgabe gestellt:

„Die Fakultät wünscht eine historisch-kritische Zusammenstellung der Ergebnisse der bisherigen Forschungen über gewisse langsam wachsende Tumoren und abnormale, wuchernde Neubildungen, die an Holzpflanzen wie an krautartigen Gewächsen beobachtet worden sind und als „Krebs“ oder z. Th. auch als „Maserkröpfe“ bezeichnet werden. Sie wünscht ferner eine genaue Untersuchung und Beschreibung von möglichst zahlreichen neuen Fällen derartiger Erkrankungen, welche sich auf experimentelle Prüfung durch Infektionsversuche stützt und durch Zeichnungen sowie durch mikroskopische Präparate erläutert wird. Das Verhältniß der Ergebnisse dieser neuen Untersuchungen zu den schon bekannten Thatsachen ist darzulegen.“

Bewerbungsschriften sind in einer der modernen Sprachen abzufassen und bis zum 31. August 1904, auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen, an die Fakultät einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatt muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird. Der erste Preis beträgt 3400 M., der zweite 680 M.

Digitized by Google

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1905 in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen. Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihres Verfassers.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1902 und 31. August 1903 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Geschäftliche Mittheilungen 1900 (S. 41 f.) und 1901 (S. 46 f.).

Göttingen, den 11. März 1902.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan:
K. Dziatzko.

Digitized by Google

Verzeichniß

der im Jahre 1901 eingegangenen Druckschriften[1]).

A. Gesellschaftsschriften.

Aachen. Zeitschrift des Aachener Geschichtsvereins. Bd. 22. 1900. — Bd. 23. 1901.

Aarau. Taschenbuch der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau für das Jahr 1900.

Aberdeen. Aberdeen university studies. 1900 no. 1—3.

Adelaide. Transactions of the R. society of South Australia. Vol. 24. 1900 part. 2. — Vol. 25. 1901 part. 1.

Agram. Glasnik hrvatskoga naravoslovnoga društva. Godina 8. 1895/1896. — God. 9. 1896. — God. 10. 1898/1899. — God. 11. 1900. — God. 12. 1900/1901.

— Ljetopis jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. Svezak 15. 1901.

— Rad jugoslavenske akademije znanostî i umjetnostî. Philol.-hist. Abth. Knjiga 145. 1901. — Philos.-jur. Abth. Knjiga 55. 1901.

— Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Tom. 6. No. 1. 1901.

— Monumenta historico-juridica Slavorum meridionalium. Vol. 8. 1901.

Amsterdam. Jaarboek van de Koninkl. akademie van wetenschappen voor 1900. (1901).

— Verhandelingen der Koninkl. akademie van wetenschappen. Afd. natuurkunde: Sectie 1, deel 7 no. 6. 7. 1900/1901. — Sectie 2, deel 7 no. 4—6. 1900/1901.

---

1) Der Verlagsort ist nur dann besonders angegeben, wenn er nicht mit dem Sitz der Gesellschaft zusammenfällt. Das Druckjahr ist, wo es dem Jahrgang einer Zeitschrift nicht entspricht, in Klammern hinzugefügt.

Digitized by Google

Amsterdam. Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afd. der Koninkl. akad. van wetenschappen. Deel 9. 1900/1901.

— Nieuw archief voor wiskunde. Deel 5 st. 1. 2. 1901.

— Wiskundige opgaven met de oplossingen door de leden van het wiskundig genootschap, ter spreuke voerende: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven." Deel 8. st. 4. 1901.

— Carmen probatum ab academia regia disciplinarum Nederlandica in certamine Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Damsté, P. H., Patria rura. Amstelodami 1901.

— Tijdschrift van het Koninkl. nederlandsch aardrijkskundig genootsschap. Ser. 2, deel 18. 1901 no. 1—7.

— Revue semestrielle des publications mathématiques redigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam. T. 9. p. 1. 2. 1901.

Antwerpen. Bulletin de la société royale de géographie d'Anvers. T. 25. fasc. 1—3. 1901.

— Stad Antwerpen — paedologisch jaarboek. 2. jaarg. 1901

Athen. *Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις ἐπιστημονικῆς ἑταιρείας.* T. 12. *τ.* 4. 1900. — T. 13. *τ.* 1—3. 1901.

— Bulletin de correspondance hellénique. 23. année no. 12. 1899. — 24. année no. 1—6. 1900.

— *Φιλολογικὸς σύλλογος Παρνασσὸς Ἐπετηρίς* (5.) *ἔτος έ.* 1901.

— Mittheilungen des Kaiserl. deutschen archaeologischen Instituts. Athenische Abt. Bd. 25. 1900. H. 4. — Bd. 26. 1901. H. 1.

Augsburg. Zeitschrift des historischen Vereins für Schwaben und Neuburg. Jg. 27. 1900.

Baltimore. American journal of mathematics. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 22 no. 2—4. 1900. — V. 23 no. 1—4. 1901.

— Johns Hopkins University circulars. Vol. 19 no. 144—147. 1900. — V. 20. no. 148—151. 153. 154. 1901.

— Johns Hopkins University studies. Ser. 18 no. 5—12. 1900. Ser 19 no. 1—9. 1901.

Bamberg. Bericht der naturforschenden Gesellschaft. 18. 1901.

Digitized by Google

Barcelona. Boletin de la Real academia de buenos letras de Barcelona. Año 1 núm. 1—3. 1901.

Basel. Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 13. Heft 1. 2. 1901. — Bd. 14. 1901. — Namenverzeichniß und Sachregister der Bände 6—12. 1875—1900.

— Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. Jahresversammlung 82. 1899. — Jahresvers. 83. 1900.

Batavia. Dagh-register gehouden int casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. Uitg. door het Bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschappen. Anno 1637. s'Gravenhage 1899. — A. 1641/42. ib. 1900. — A. 1673. ib. 1901.

— Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 39 afl. 1. 2. 1901.

— Nederlandsch-indisch plakaatboek. Deel 17. 1900.

— Tijdschrift voor indische taal-land- en volkenkunde. Deel 43 afl. 1—6. 1900/1901. — D. 44 afl. 1—6. 1901.

— Observations made at the magnetical and meteorological observatory at Batavia. Vol. 22 p. 1. 2. 1900/1901.

— Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jg. 21. 1899. (1900). Jg. 22. 1900. (1901).

— Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Uitg. door de Koningl. natuurkundige vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 60 (— X, 4) 1901.

Bayreuth. Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken. Hersg. v. d. histor. Verein für Oberfranken. Bd. 21 Heft 2. 1900.

Bergen. Bergens museums aarbog for 1900 h. 2. (1901). — for 1901 h. 1. (1901). — Aarsberetning for 1900 (1901). — for 1901 (1901).

— An account of the Crustacea of Norway with short descriptions and figures of all the species by G. O. Sars. Publ. by the Bergen Museum. Vol. 3. Cumacea, p. 9/10. 1900. — V. 4. Copepoda, p. 1/2. 1901.

— Bergens Museum. Meeresfauna von Bergen redigiert von A. Appellöf. Heft 1, 1901.

Berkeley. University of California Bulletins. New Series, Vol. 2 No. 1—3. 1900. — Chronicle. An official record, vol. 3. 1900. — Library Bulletin 14. Sacramento 1900. — Report of work

Digitized by Google

of the agricult. experiment-stations for the year 1897—1898 (1900). — Bulletin of the department of geology. V. 2 no. 7. 1900.

Berlin. Abhandlungen der K. Akad. d. Wissenschaften. Jg. 1899 u. 1900.

— Sitzungsberichte der Königl. preuß. Akademie der Wissenschaften. Jg. 1900 no. 39—53. — Jg. 1901 no. 1/2—38.

— Acta Borussica. Denkschriften der Preuß. Staatsverwaltung im 18. Jahrh. Hrsg. v. d. Königl. Akad. d. Wissensch. Getreidehandelspolitik Bd. 2. 1901. — Behördenorganisation Bd. 3. 1901. — Bd. 6. 1901.

— Politische Correspondenz Friedrichs des Großen. Bd. 26. 1900.

— Centralbureau der internationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen. Nr. 3. 1901.

— Technische Hochschule. Die Hundertjahrfeier der Königl. technischen Hochschule zu Berlin 18.—21. Oct. 1899. (1900). — F. Wolff, Berlin die Stadt der Hohenzollern. Rede 18/I. 1901.

— Korrespondenzblatt des Gesammtvereins der deutschen Geschichts- und Alterthumsvereine. Jg. 1901.

— Mitteilungen der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte. Jg. 11. 1901.

— Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft. Jg. 2. 1900 No. 17. — Jg. 3. 1901 No. 1—10.

— Veröffentlichung d. K. Preußischen Geodätischen Institutes. N. F. No. 4—6. 1900/1901.

— Mitteilungen des Vereins für die Geschichte Berlins. 18. Jg. 1901. — Schriften des Vereins für die Geschichte Berlins. Heft 38. 1902. — J. von Besser, Preußische Krönungs-Geschichte 1702 (Neudruck) 1901.

— Zeitschrift des Vereins für Volkskunde. Jg. 11. 1901 H. 1—3.

Bern. Jahrbuch für schweizerische Geschichte. Hrsg. auf Veranstaltung der allgem. geschichtsforschenden Gesellschaft der Schweiz. Bd. 26. 1901.

Digitized by Google

Bern. Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern. Jg. 1898 (1899). — Jg. 1899 (1900). — Jg. 1900 (1901).

Bologna. Memorie della R. accademia delle scienze dell'istituto di Bologna. Ser. 5. t. 7. 1897.

Bonn. Jahrbücher des Vereins von Altertumsfreunden im Rheinlande. Heft 106, 107. 1901.

Bordeaux. Annales de la faculté des lettres de Bordeaux: Bulletin italien. Année 23, t. 1. 1901. — Revue des études anciennes. Année 23, t. 3. Paris 1901.

— Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Sér. 5, t. 5 cah. 2. 1901.

— Procès-verbaux des séances de la société des sciences physiques et naturelles. Année 1899/1900. (1900).

— Commission météorologique de la Gironde. Observations pluviométriques et thermométriques 1899/1900. (1900).

Boston. Proceedings of the American academy of arts and sciences. Vol. 36 no. 9—29. 1900/1901.

— Memoirs read before the Boston society of natural history being a new series of the Boston journal of natural history. Vol. 5 no. 6. 7. 1900/1901.

— Proceedings of the Boston society of natural history. Vol. 29 no. 9—14. 1900. — Occasional papers. IV. Vol. 1. part 3. 1900.

Braunsberg. Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde Ermlands. Bd. 13. Heft 2 (= H. 4) 1901.

Braunschweig. Braunschweigisches Magazin. Bd. 6. 1900.

Bremen. Abhandlungen, hrsg. v. naturwissenschaftlichen Verein. Bd. 15 H. 3. 1901 — Bd. 17 H. 1. 1901.

— Beiträge zur nordwestdeutschen Volks- und Landeskunde. Heft 3 (= XV, 3) 1901.

Breslau. Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. 78. 1900. — Erg.-Heft z. Jahresbericht 78. 1901.

— Mittheilungen der Königl. Universitäts-Sternwarte. Bd. 1. 1901.

Brisbane. Proceedings of the R. society of Queensland. Vol. 16. 1901.

Digitized by Google

Brünn. Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereins über die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. 18. 1898 (1900).

— Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Bd. 38. 1899 (1900). [2 Exempl.].

Brüssel. Annuaire de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 67. 1901.

— Bulletin de l'académie royale des sciences etc. Classe des sciences. 1900 no. 12. — 1901 no. 1—10. — Classe des lettres etc. 1900 no. 17. — 1901 no. 1—10.

— Mémoires couronnés et autres mémoires. T. 58. 1899. — T. 59. 1900/1901. — T. 60. 1900/1901. — Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers. T. 57. 1898/1899. — T. 58. 1899/1900.

— Bulletin mensuel du magnétisme terrestre de l'observatoire royal de Belgique. 2. Année 1900 Mars-Novembre.

— Procès-verbaux de la société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie. Année 1898 t. 12 (= Sér. 2 t. 2) fasc. 1—3. 1901. — Année 1900 t. 14 (= Sér. 2 t. 4) fasc. 5. 1901. — Année 1901 t. 15 (= Sér. 2 t. 5) fasc. 2—5. 1901.

— Analecta Bollandiana. T. 19 fasc. 4. 1901. — T. 20. 1901.

— Catalogus codicum hagiographicorum Graecorum Bibliothecae Vaticanae edd. Hagiographi Bollandiani et Pius Franchi de Cavalieri. 1899. — Repertorium hymnologicum: Supplementum 24468—37302.

— Collection de chroniques belges inédites publ. par ordre du gouvernement. Chartes inédites de l'Abbaye d'Orval p. p. Delescluse et K. Hanquet. 1900. — Chartres du chapitre de Sainte Waudru de Mons p. p. Devillers. T. 1. 1899. — Inventaire des cartulaires belges cons. à l'étranger. 1899. — Inventaire des obituaires (Collégiales et maisons religieuses). 1899. — Le soulèvement de la Flandre maritime de 1323—1328 p. p. Pirenne. 1900. — La chronique liégeoise de 1402 p. p. Bacha. 1900.

Budapest. Acta Reg. scient. universitatis Ung. Ann. 1899—1900, fasc. II. 1900. — Ann. 1900—1901, fasc. I. 1900.

Digitized by Google

Budapest. Magyar tudományos akadémiai almanach polgári és csillagászati naptárral. 1901.
— Értekezések a magyar tudomán. akadém. nyelv.- és széptudományi osztálya köreböl. Kötet 17 szam 6. 1900. sz. 7/8. 1901.
— Értekezések a társadalmi tudományok köreböl. Kiadja a magyar tudományos akadémia. Kötet 12. sz. 5—7. 1901.
— Értekezések a történelmi tudományok köreböl. Kiadja a magyar tudományos akadémia. Kötet 19. sz. 1—3. 1900. 4/5. 1901.
— Archaiologiai értesitö. A magyar tudom. akad. arch. bizottságának és az orsz. régészetti s. emb. társulatnak közlönye, szerkeszti Hampel József. Kötet 20. sz. 3—5. 1900. — Köt. 21. sz. 1. 2. 1901.
— Mathematikai és természettudományi értesitö. Kiadja a magyar tudom. akad. Köt. 18. füz. 3—5. 1900. — Köt. 19. füz. 1. 2. 1901.
— Értesitö az Erdélyi múzeum-egylet orvos-természet-tud. szakosztályából. Évfol. XXVI Kötet XXIII füz. 1. 2. 1901.
— Mathematikai és természettudományi közlemények vonatkozólag a hazai viszonyokra. Kiadja a magyar tudom. akad. Köt. 27 sz. 5. 1901.
— Nyelvtudományi közlemények. Kiadja a magyar tudom. akad. Köt. 30. füz. 3. 4. 1900. — Köt. 31. füz. 1. 2. 1901.
— A Budapesti Királyi magyar tudomány-egyetem tanrende 1900—1901. felére 1. 1900. — fel. 2. 1901.
— Rapport sur les travaux de l'académie hongroise des sciences en 1900 (1901).
— Kuun, Géza Gróf, Ismereteink Tibetröl alkalmi beszréd 1900.

— Publicationen der Kgl. ungarischen geologischen Anstalt. Jahresbericht d. K. ungar. geolog. Anstalt für 1898 (1901).
— Földtani közlöny. Geologische Mitteilungen. Zeitschrift der ungar. geolog. Gesellschaft. Köt. 30. 1900 füz. 8—12. — Köt. 31. 1901 füz. 1—4.

— Landwirtschaftliche Statistik der Länder der Ungarischen Krone. Verf. u. hrsg. von d. Kgl. Ungar. statistischen Central-Amt. Bd. 5. 1900.

Buenos Aires. Anales de la sociedad científica Argentina. T. 50 entr. 5. 6. 1900. — T. 51. 1901. — T. 52 entr. 1—3. 1901.

Digitized by Google

Buenos Aires. Comunicaciones del museo nacional de Buenos Aires. T. 1 no. 9. 1901.

— Veröffentlichungen d. deutschen akad. Vereinigung. Bd. 1. H. 5.

Bukarest. Editiunea academiei române: S. F. Marian, Sĕrbătorile la românĭ Vol. 3. 1901. — Acte şi documente relative la istoria renascerei romaniei publ. de G. Petrescu, D. A. Sturdza si D. C. Sturdza. Vol. 1 part. 2. 1900. — Vol. 6 part. 2. 1896. — Vol. 8. 1900.

— Analele academiei romane: Memoriile secţiunĭ istorice, Ser. II. T. 22. 1899/1900. — T. 23. 1900/1901. — Memoriile secţiunĭ sciinţifice Ser. II. T. 22. 1899—1900 (1900).

— Discursi de recepţiune. t. 23. 1901.

Calcutta. Bibliotheca Indica. A collection of oriental works publ. by the Asiatic society of Bengal. N. S. 971—977 (1900). — 978—982 (1901). — 984—998 (1901). — 1000 (1901).

— Catalogue of printed books and manuscripts in Sanskrit belonging to the oriental library of the Asiatic society of Bengal. Fasc. 3. 1901.

— Memoirs of the geological survey of India. V. 30 p. 2. 1900. — V. 31 p. 1. 1901. — V. 33 p. 1. 1901.

— Palaeontologia Indica. Ser. 15. Vol. 3 p. 2. 1899. — Ser. 9. Vol. 2 p. 2. 1900. — Vol. 3 p. 1. 1901. — New Series, Vol. 1 no. 3. 1901.

— General report on the work carried on by the geological survey of India. 1900/1901 (1901).

Cambridge Brit. Proceedings of the Cambridge philosophical society. Vol. 10 p. 7. 1901. — List of fellows . . . 1901.

Cambridge Mass. Bulletin of the museum of comparative zoology at Harvard college. Vol. 36 no. 5. 6. 1900. — Vol. 37 no. 3. 1901. — Vol. 38 no. 1—4. 1900/1901. — Vol. 39 no. 1. 1901.

— Contributions from the zoological laboratory of the museum of comp. zool. No. 111, vol. 29, no. 13. 1900. — No. 113, vol. 36, no. 11. 1900.

— Memoirs of the museum of comparative zoology at Harvard college. Vol. 25 no. 1. 1901,

— Annual Report of the assistent in charge of the museum of comp. zool. at Harvard college for 1899/1900 (1901).

— Annual Report of the keeper of the museum of comp. zool. for 1900/1901 (1901).

Digitized by Google

Cassel. Mitteilungen an die Mitglieder des Vereins für hessische Geschichte und Landeskunde. Jg. 1899 (1900). — Jg. 1900 (1901).
— Zeitschrift des Vereins f. hessische Geschichte und Landeskunde. N. F. 25 (= 35) 1901.

— Abhandlungen und Berichte des Vereins für Naturkunde. 46. üb. d. Vereinsjahr 1900/1901.

Charkow. Annales de l'université impériale. 1901, 1—4. Beilage: Ja. Danilevsky, Izslědovanija nad fiziologičeskim děstviem električestva na razstojanii. 1901.

Charlottenburg. Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1900 (1901).
— Verzeichniß der Veröffentlichungen aus der physikalisch-technischen Reichsanstalt 1887—1900 (1901).

Chemnitz. Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Beobachtungssystem des Kgr. Sachsen. Jahrb. f. 1898 (= Jahrb. d. sächs. meteorolog. Instituts Jg. 16) Abt. 1. 1900. Abt. 2. 1901.
— Decaden-Monatsberichte (Vorläufige Mittheilung) des Kgl. sächsischen meteorologischen Institutes. 1900 Jg. 3 (1901).
— Das Klima des Königreichs Sachsen. Amtliche Publikation des Königl. sächsischen meteorologischen Institutes. Heft 6. 1901.

— Mittheilungen des Vereins für Chemnitzer Geschichte. 11. Jahrbuch 1900/1901 (1901).

Cherbourg. Mémoires de la société nationale des sciences naturelles et mathématiques. T. 31 (= 4 sér. T. 1) 1897 (Umschl. 1898) (1900).

Chicago. The John Crerar library. Annual report. 6. 1900 (1901). Field Columbian museum. Publication 45. 1901. — 51. 52. 1900. — 53—59. 1901.
— The university of Chicago press: Astrophysical journal. Vol. 12 no. 5. 1900. — V. 13 no. 1—5. 1901. — V. 14 no. 1—4. 1901. — Botanical gazette. Vol. 32 no. 1—5. 1901. — Journal of political economy. Vol. 9 no. 1—4. 1901 — Vol. 10 no. 1 1901. — Journal of geology. Vol. 8 no. 8. 1900. — V. 9 no. 1—7. 1901. — American journal of semitic languages and literatures (continuing „Hebraica"). Vol. 17 no. 2—4. 1901. — American journal of sociology. Vol. 6 no. 4—6. 1901. — Vol. 7 no. 1—3. 1901. — The monist. A quarterly magazine. Vol. 11 no. 2—4. 1900. — V. 12 no. 1. 1901. — The open court. V. 15 no. 1—12. 1901.

Digitized by Google

Chicago. The Bennet college of eclectic medicine and surgery. 34. annual announcement. 1901—1902.

Christiania. Forhandlinger i videnskabs-selskabet. 1900 (1901).

— Skrifter udgivne af videnskabs-selskabet. Math.-naturv. Kl. 1900. no. 5—7. — Histor.-philos. Kl. 1900. no. 6.

Chur. Jahresbericht der historisch-antiquarischen Gesellschaft von Graubünden. Jg. 30. 1900 (1901).

— Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Bd. 44. 1900/1901 (1900).

Columbus. Annual report of the board of trustees of the Ohio state university. 30. report (= Ser. 5, no. 1) part. 1. 2. 1900.

Cordoba. Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba (República Argentina). Buenos Aires. T. 16 entr. 2—4. 1900/1901.

— Resultados del observatorio nacional Argentino. Vol. 18. 1900.

Danzig. Schriften der naturforschenden Gesellschaft. Bd. 10. H. 2. 3. 1901.

Des Moines. Jowa geological survey. Vol. 10. Report 1899 (1900). — Vol. 11. Report 1900 (1901).

Dortmund. Beiträge zur Geschichte Dortmunds und der Grafschaft Mark. 10. 1901.

Dresden. Neues Archiv für sächsische Geschichte und Altertumskunde. Bd. 22. 1901.

— Jahresbericht des Kgl. sächsischen Altertums-Vereins üb. d. Vereinsjahr. 76. 1900/1901.

— Dresdener Geschichtsblätter. Jg. 9. 1900.

— Geschichte der Stadt Dresden. Veröffentlichung des Vereins für Geschichte Dresdens. Th. 1. 1900.

Dublin. Proceedings of the R. irish academy. Ser. 3, vol. 6, no. 3. 1901. — Vol. 7. 1901.

— Transactions of the R. irisch academy. Vol. 31, p. 8—11. 1900.

Dürkheim. Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereines der Rheinpfalz. Bd. 13. 1900. — Bd. 14. 15. 1901. — Festschrift zur 60-jährigen Stiftungsfeier der Pollichia. 1900.

Düsseldorf. Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch d. Geschichts-Vereins. Bd. 15. 1900.

Edinburgh. Proceedings of the mathematical society. Vol. 19. 1900/1901.

Digitized by Google

Edinburgh. Annals of Cape observatory. Vol. 5. 1900.

— Proceedings of the R. physical society. Vol. 14, p. 3. 1899/1900 (1901).

Eichstädt. Sammelblatt des historischen Vereins Eichstädt. Jg. 15. 1900 (1901).

Eisenberg. Mittheilungen des geschichts- und alterthumsforschenden Vereins. Bd. 3, H. 1. (= 16.) 1901.

Elberfeld. Zeitschrift des Bergischen Geschichtsvereins. Bd. 34 (= N. F. 24) 1899 [Ersatzexemplar].

Emden. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Emden. 85. 1899/1900 (1901).

Erfurt. Jahrbücher der Kgl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften. N. F., Heft 27. 1901.

— Mitteilungen des Vereins für die Geschichte und Altertumskunde von Erfurt. Bd. 22. 1901.

Erlangen. Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät. Heft 32. 1900. München 1901.

Florenz. Biblioteca nazionale centrale die Firenze. Bollettino delle pubblicazione italiane ricev. per diritto di stampa. 1900 Indici Bogen 1—10. — 1901 num. 1—10.

— Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. 10. 1900. — Vol. 11. 1901.

Frankfurt a. M. Archiv für Frankfurts Geschichte und Kunst. Hrsg. v. Vereine f. Geschichte u. Altertumskunde. Bd. 7. 1901.

— Jahresbericht des physikalischen Vereins f. 1899/1900 (1901).

Freiburg i. B. Freiburger Diöcesan-Archiv. Organ des kirchlich-historischen Vereins für Geschichte, Alterthumskunde und christliche Kunst. N. F. 1 (= 28.) 1900. — N. F. 2 (= 29.) 1901.

Genf. Bulletin de la société d'histoire et d'archéologie de Genève. T. 2. livr. 4. 1900.

— Compte rendu des travaux de la société helvétique des sciences naturelles. Sess. 82. 1899. — Sess. 83. 1900.

Görlitz. Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 76. 1900. (2 Expl.). — Codex diplomaticus Lusatiae superioris. Bd. 2, H. 1. 1429 u. 1430. 1900 (2 Expl.).

Göteborg. Göteborg högskölas årsskrift. Bd. 6. 1900.

Digitized by Google

Göteborg. Föreläsningar och Öfningar vid Göteborgs Högskola. Höstterminen 1901.

— Kgl. Vetenskaps och Vitterhets Samhälles Handlingar. Fjärde följden (fr. o m. år 1898) h. 3. 1899 m. Bihang . . . År 1899, årg. 17.

Granville. Bulletin of the scientific laboratories of Denison university. 9 (June) 1900. — 10 (Febr.) 1901.

's Gravenhage. Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitg. door het kongl. instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Volgreeks 6, deel 8. 1901. — Deel 9 afl. 1. 2. 1901. — Register op de eerste 50 deelen 1853—1899 (1901). — Naamlijst der leden op. 1. Juni 1901.

Graz. Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark. Jg. 37. 1900 (1901).

Greifswald. Pommersche Jahrbücher. Hrsg. v. Rügisch-Pommerschen Geschichtsverein zu Greifswald u. Stralsund. Bd. 2. 1901. — Ergänzungsband 1. 1901.

— Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern u. Rügen. Jg. 32. 1901.

Guben. Niederlausitzer Mittheilungen. Zeitschrift der Niederlausitzer Gesellschaft f. Anthropologie u. Alterthumskunde. Bd. 6, H. 6—8. 1901.

Guise. Le devoir. Revue des questions sociales. T. 25 = 1901 August-Decembre.

Haarlem. Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles publ. par la société hollandaise des sciences. Sér. 2, t. 4 livr. 2. 3. 1901. — t. 5. 1900. — t. 6. 1901.

— Oeuvres complètes de Christiaan Huygens p. p. la société hollandaise des sciences. T. 9. 1585—1690. (1901).

— Archives du musée Teyler. Sér. 2, vol. 7 p. 3. 4. 1901.

Halifax. Proceedings and transactions of the Nova Scotian institute of natural science. Vol. 10 (= Ser. 2 vol. 3) p. 2. 1900.

Halle. Leopoldina. Amtl. Organ d. Kaiserl. Leopoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Heft 36. 1900 no. 12. — H. 37. 1901.

— Verhandlungen der Kaiserl. Leopoldin.-Carolin. deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. 75. 1899. — Bd. 76. 1900. — Bd. 77. 78. 1901. — A. Graesel, Repertorium zu den Acta und

Digitized by Google

Nova Acta der Akademie der Naturforscher. Bd. 1. 1894. — Bd. 2. 1896/1899.

— Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 55. 1901.

— Berichte aus dem physiologischen Laboratorium und der Versuchsanstalt des landwirthschaftlichen Instituts der Universität Halle. Hrsg. v. J. Kühn. Heft 14. 1900, 15. 1901.

— Mittheilungen des Vereins für Erdkunde. 1901.

— Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturw. Vereins f. Sachsen u. Thüringen hrsg. v. G. Brandes. Stuttgart. Bd. 73, H. 3—6. 1900/1901. — Bd. 74, H. 1/2. 1901.

Hamburg. Mittheilungen der Hamburger Sternwarte. No. 7. 1901.

— Mittheilungen des Vereins für Hamburgische Geschichte. Jg. 20. 1900 (1901).

— Zeitschrift des Vereins für Hamburgische Geschichte. Bd. 11, H. 1. 1901.

— Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 3, H. 10. 1900. — Bd. 4, H. 1. 1901.

— Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, hrsg. v. Naturwissenschaftlichen Verein. Bd. 16, Hälfte 2. 1901.

— Verhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins. Folge 3, Bd. 8. Bd. 8. 1900 (1901).

— Verhandlungen des Vereins für naturwissenschaftliche Unterhaltung. Bd. 11. 1898–1900 (1901).

Hannover. Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover. 48/49. 1897/1898 u. 1898/1899 (1900).

Hanoi. Bulletin de l'école française d'extrême-orient. Année 1. T. 1. no. 1. 2.

Heidelberg. Neue Heidelberger Jahrbücher. Hrsg. v. historisch-philosophischen Verein. Jg. 10. 1900. H. 2.

— Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins. Bd. 6. H. 4—5. 1900/1901.

Digitized by Google

Heidelberg. Veröffentlichungen der Großherzoglichen Sternwarte (Astronomisches Institut). Bd. 1. 1900.

Helsingfors. Acta societatis scientiarum Fennicae. T. 26. 1900. — T. 27. 1900.

Hermannstadt. Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. 29, H. 3. 1900. — Bd. 30, H. 1. 1900.

— Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde f. 1900 (1901).

— Verhandlungen u. Mittheilungen des siebenbürgischen Vereins für Naturwissenschaften. Bd. 50. 1900 (1901).

Hohenleuben. Jahresbericht des Vogtländischen altertumsforschenden Vereins. 70/71 1901.

Jassy. Annales scientifiques de l'université. T. 1 fasc. 3. 4. 1901.

Innsbruck. Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereins. Jg. 26. 1900/1901 (1901).

Ithaca. Journal of physical chemistry, publ. at Cornell university. Vol. 5, no. 1—8 (1901).

Kahla. Mittheilungen des Vereins f. Geschichte und Alterthumskunde zu Kahla u. Roda. Bd. 6, H. 1. 1901.

Karlsruhe. Programm d. technischen Hochschule f. 1901/1902. — 3 kleine Schriften d. technischen Hochschule.

Kasan. Pravoslavnyj sobesědnik, izdanie Kazanskoj duchovnoj akademii. 1901 čast 1. Janvar-Jun. — Priloženie: Protokoly zasědanij sověta Kazanskoj duchovnoj akademii za 1899 g. s. 81—208. —

— Učenyja zapiski imperatorskago Kazanskago universiteta. God 67, no. 11. 12. 1900. — Priloženie zu no. 10—12. — God 68, no. 1—9. 1901. — Godičnyj akt v Imperatorskom Kazanskom universitetě 5. nojabrja 1900 goda. (1901). — N. M. Popov, Sest lekcij o progressivnom paraližě pomčžannych. 1900.

— Bulletin de l'observatoire metéorologique. 1900 Février-Septembre.

— Bulletin de la société physico-mathématique. Sér. 2. T. 10, no. 2—4. 1901.

Kempten. Allgäuer Geschichtsfreund. Zwanglose Mittheilungen, hrsg. v. Allgäuer Alterthums-Verein. Jg. 13, no. 1—8. 1900.

Kiel. Zeitschrift der Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte. Bd. 31. 1901.

Digitized by Google

Kiel. Publication der Sternwarte in Kiel: P. Harzer, Ueber die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen. 1901.

— Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins f. Schleswig-Holstein. Bd. 12, H. 1. 1901.

Kiew. Mémoires de la société des naturalistes. T. 16, no. 2. 1900.

Klagenfurt. Archiv f. vaterländische Geschichte u. Topographie. Jg. 19. 1900.

— Carinthia I. Mittheilungen des Geschichtsvereins für Kärnten. Jg. 90. 1900. — Jg. 91. 1901.

— Jahresbericht des Geschichtsvereins für Kärnten über 1899 u. Voranschlag für 1900. — Jahresbericht über 1900 u. Voranschlag f. 1901.

Köln. Annalen des historischen Vereins f. d. Niederrhein. H. 70. 71. 72. 1901. Beiheft 5. 1901.

Königsberg. Schriften der physikalisch-oekonomischen Gesellschaft. Jg. 41. 1900.

Kolozsvár. Értesitö az Erdélyi Múzeum-egylet orvos-természettudományi szakosztályából. Évolyam 25. kötet 22. Orvosi szak, füzet 1—3. 1900. Természettudományi szak füzet 1—3. 1901. — Évoly. 26 köt. 23 természettudományi szak füz. 1. 1901.

Kopenhagen. Oversigt over det kong. Danske videnskabernes selskabs forhandlingar og dets medlemmers arbejder. 1900 no. 6. — 1901 no. 1—5. — Fortegnelse over det kong. Danske videnskabernes selskabs Forlagsskrifter Jan. 1901 (1901).

— Det kong. Danske videnskab. selskabs skrifter. Naturvidensk. og math. afd., R. 6 Bd. 10, no. 1. 2. 1899/1901. — Bd. 11, no. 1. 1901.

— Regesta diplomatica historiae Danicae cura societatis regiae scientiarum Danicae. Ser. 2. T. 2, no. 5. 1628—1644 (1901).

Krakau. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften. 1900 no. 9. 10. — Mathem.-naturw. Cl. 1901 no. 1—8. — Hist.-philos. Cl. 1901 no. 1—8.

— Biblioteka pisarzów polskich. No. 39. 40. 1901.

— Materialy i prace komisyi językowej akademii umiejętności. T. 1. zesz. 1. 1901.

— Rozprawy akademii umiejętności. Wydz. filolog. Ser. 2, T. 17. 1901. — Wydz. histor.-filoz. Ser. 2, T. 15. 1901.

— Sprawozdania komisyi fizyjograficznej. T. 35. 1901.

— Słownik gwar polskich. T. 2 (F—K) 1901.

— Atlas geologiczny Galicyi. Tekst i. Kart. zesz. 12. 1900.

Digitized by Google

Krakau. Catalogue of the polish scientific literature. T. 1. Rok 1901 zeszyt 1—3. 1901.

— Collectanea ex archivo collegii juridici. T. 7. 1900.

Landshut. Verhandlungen des historischen Vereines für Niederbayern. Bd. 37. 1901.

Lawrence Kans. The Kansas university quarterly. Ser. A (Science a. mathem.) vol. 9. 1900, no. 2–4. — Vol. 10. 1901, no. 1. 2.

Leiden. Handelingen en mededeelingen van de maatschappij der nederlandsche letterkunde. 1900/1901 (1901).

— Tijdschrift voor nederlandsche taal- en letterkunde uitg. vanwege de maatschappij der nederl. letterkunde. Deel 19 (= 11) afl. 3. 4. 1900. — Deel 20 (= 12) afl. 1. 2. 1901.

— Flora Batava. Afbeelding en beschrijving van nederlandsche gewassen. Aangevangen door Jan Kops, voortgezet d. E. W. van Eeden. Afl. 331—336. 1900/1901.

Leipzig. Abhandlungen der philolog.-histor. Classe d. Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. 20, no. 1—3. 1900/1901. — Bd. 21, no. 1. 1901. — Abhandlungen d. math.-physik. Cl. Bd. 26. 1900/1901.

— Berichte über die Verhandlungen der Kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften. Philolog.-histor. Cl. Bd. 53, Heft 1. 1901. — Mathem.-physik. Cl.: Mathem. Theil, Bd. 52, H. 6. 7. 1900. — Bd. 53, H. 1—3. 1901.

— Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. März 1901.

— Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft. Jahrg. 26/27. 1899/1900 (1901).

— Abhandlungen des Kgl. Sächsischen meteorologischen Institutes Heft 5. 6. 1901.

Lemberg. Lud. Organ towarzystwa ludoznawczego. T. 7. 1901. — G. L. Gomme, Folklor. Przetłom. z angielsk. Wojciech Szukiewicz. Opatrzył przedmową i wydał Dr. St. Eliasz-Radzikowski. Kraków 1901.

Lincoln. Bulletin of the agricultural experiment station of Nebraska. Vol. 12, no. 60. 64.

— Annual report of the U. S. agricultural experiment station of Nebraska. Presendet to the governor. Report 13. 1900.

Linz. Jahres-Bericht des Museums Francisco-Carolinum. 59. 1901.

Liverpool. Proceedings of the literary and philosophical society. Sess. 89. 1899/1900 no. 54. 1900.

Digitized by Google

London. Proceedings of the Royal society of London. Vol. 67. 1900, no. 440—453.

— Philosophical transactions of the R. society. Vol. 195. 196 A. 1901. — Fellows of the R. soc. 1900 (1901).

— R. society. Reports to the Malaria Committee. 3. Ser. 1900. — 4. Ser. 1901. — 5. Ser. 1901.

— Yearbook of the R. society. No. 5. 1901.

— Monthly notices of the R. astronomical society, containing papers, abstracts of papers and reports of the proceedings of the society. Vol. 61, no. 2—9. 1900. — Appendix no. 1—3. 1900. — Vol. 62, no. 1. 1901.

— The journal of the Linnean society. Botany: Vol. 35, no. 242. 243. — Zoology: Vol. 28, no. 181—183.

— Proceedings of the Linnean society. Sess. from Nov. 1900 to June 1901 (o. J.).

— List of the Linnean society. 1900/1901 (1900). — 1901/1902 (1901).

— Transactions of the Linnean society. Botany: Vol. 5, part 13—15. 1900/1901. Vol. 6, part 1. 1901. — Zoology: Vol. 8, part. 1—4. 1900/1901.

— Proceedings of the mathematical society. Vol. 32, no. 731—737. — Vol. 33, no. 738—766.

— Journal of the R. microscopical society for 1901, part 1—6.

— Proceedings of the general meeting for scientific business of the zoological society. 1900 p. 4 (1901). — 1901 Vol. 1 p. 1. 2. 1901. — Vol. 2 p. 1. 1901.

— Transactions of the zoological society. Vol. 15 p. 5—7. 1900/1901.

— Report of H. M.'s astronomer at the Cape of Good Hope to the secretary of the admirality. Independent day numbers for the year 1900 (1901).

Lüttich. Annales de la société géologique de Belgique. T. 25 bis 1899 livr. 1. 1900. — T. 27 livr. 4. 1901. — T. 28 livr. 1—3. 1901.

Lund. Acta universitatis Lundensis. Lunds universitets årsskrift. T. 35, no. 1. 2. 1899.

Luxemburg. Publications de l'institut grand-ducal de Luxembourg, section des sciences naturelles et mathématiques. Société des sciences naturelles du grand-duché de Luxembourg. T. 26. 1901.

Digitized by Google

Luzern. Der Geschichtsfreund. Mittheilungen des historischen Vereins der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden und Zug. Bd. 56. 1901. — Register zu Bd. 41—50 (4. Registerbd.) 1901.

Lyon. Annales de l' université de Lyon. Fasc. 17. 18. 19. 1895. — Fasc. 20. 1896. — Fasc. 21. 1895. — Fasc. 22. 23. 24. 25. 1896. — Fasc. 26. 1895/1896. — Fasc. 27. 28. 1896. — Fasc. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 1897. — Fasc. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 1898. — Nouvelle Série, droit, lettres: fasc. 4. 5. 6. 1901. — Sciences, médecine: fasc. 4. 1901.

— Bulletin historique du diocèse de Lyon paraissant tous les deux mois sous le patronage des facultés catholiques de Lyon. 2. année 1901 no. 1—6.

Madison. Transactions of the Wisconsin academy of sciences, arts and letters. Vol. 12 p. 2. 1899 (1900). — V. 13 p. 1. 1900 (1901).

— Wisconsin geological and natural history survey. Bulletin no. 7 (= Economic ser. no. 4.) 1901.

Madras. Madras government museum. Vol. 3, no. 3. 1901. — Vol. 4, no. 1. 1901. — R. B. Foote, Catalogue of the prehistoric antiquities. 1901.

Madrid. Boletin de la Real academia de la historia. T. 37, no. 6. 1900. — T. 38. 39. 1901.

— Memorias de la R. academia de ciencias exactas y naturales. T. 19, fasc. 1. 1893 (1900).

Mailand. Memorie dell R. istituto Lombardo di scienze e lettere. Cl. di lett. e sc. mor. e stor., Vol. 21 (Ser. 3, 12) fasc. 3. — Cl. di sc. mat. e nat., Vol. 18, fasc. 11. — Vol. 19. 1900, fasc. 1—4.

— R. istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Vol. 33. 1900.

Manchester. Memoirs and proceedings of the literary and philosophical society. Ser. 4, vol. 45 p. 1—4. 1900/1901. — Vol. 46 p. 1. 1901/1902.

Mannheim. Mannheimer Geschichtsblätter. Monatsschrift f. d. Geschichte, Altertums- und Volkskunde Mannheims u. d. Pfalz. Hrsg. v. Altertumsverein. Jg. 1. 1900 Tit. u. Reg. — Jg. 2. 1901 no. 1—12. — Jg. 3. 1902 no. 1. — Satzungen des Mannheimer Altertumsvereins. 1901.

Marseille. Annales de la faculté des sciences de Marseille publ. sous les auspices de la municipalité. T. 11. 1901.

Digitized by Google

Meiningen. Schriften des Vereins für Meiningische Geschichte und Landeskunde. Heft 37—39. 1901. — Tit. zu Jg. 1899 (= Hft. 33. 34), Tit. zu Jg. 1900 (= Hft. 35. 36).

Meissen. Mittheilungen des Vereins f. d. Geschichte der Stadt. Bd. 5, Heft 3. 1900.

Melbourne. Annual report of the secretary for mines to minister of mines of Victoria. 1900.

— Proceedings of the R. society of Victoria. Vol. 13 p. 1. 2. 1900/1901. — Vol. 14 p. 1. 1901.

Metz. Jahrbuch der Gesellschaft für lothringische Geschichte u. Alterthumskunde. Jg. 12. 1900.

Mexico. Boletin mensual del observatorio meteorologico central. 1900, Junio-Dic. — 1901, Enero-Junio.

— Boletin del instituto geologico de Mexico. Num. 14. 1900.

Mölln i. Lbg. Vaterländisches Archiv für das Herzogtum Lauenburg. N. F., Bd. 9 (= Archiv d. Vereins f. d. Geschichte d. Herzogt. Lauenburg, Bd. 6) Heft 3. 1901.

Montevideo. Anales del museo nacional de Montevideo. T. 2 fas. 17. 1901. — T. 3 f. 18. 20. 21. 1901. — T. 4 f. 19. 1901.

Montpellier. Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires Sér. 2.

Section de médicine. T. 1 no. 4. 1900.
Sect. des sciences. T. 2 no. 6. 7. 1901.
Sect. des lettres. T. 3 no. 2. 1900. — T. 4 no. 1. 1900.

Moskau. Matematičeskij sbornik. Recueil mathématique publ. p. la société mathématique. T. 21 no. 3. 4. 1900/1901. — T. 22 no. 1. 1901.

— Bulletin de la société impériale des naturalistes. Année 1900. Année 1901 no. 1/2.

— Observations faites à l'observatoire météorologique de l'université impériale. 1899 Sept.—Dec. — 1900 Janv.—Dec. — 1901 Janv.—Févr.

— Bogoslovskij věstnik izdavaemyj moskovskoju duchovnoju akademieju. God 10. — 1901. — Žurnaly sobranij sověta moskovskoj duchovnoj akademii za god 1900 pag. 1—144.

München. Abhandlungen der Kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Histor. Cl. Bd. 22 Abt. 1. 1901. — Philos.-philol. Cl. Bd. 21 Abt. 3. 1901. — Math.-physik. Cl. Bd. 21 Abt. 2. 1901.

Digitized by Google

München. Almanach der Kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften f. d. J. 1901. — Auswahl aus dem Verlagskatalog der K. bayer. Akademie d. Wissenschaften. 1900.

— Sitzungsberichte d. Kgl. bayer. Akademie d. Wissenschaften. Philos.-philol. u. hist. Cl. Jg. 1900, H. 4. 5. (1901). — Jg. 1901, H. 1—4. — Inhaltsverzeichniß zu Jg. 1886—1899 (1900). — Mathem.-physik. Cl. Jg. 1900, H. 3. — Jg. 1901, H. 1—3. — Inhaltsverzeichniß zu Jg. 1886—1899 (1900).

— Lipps, Th.: Psychologie, Wissenschaft und Leben. 1901.

— Riggauer, Hans: Ueber die Entwicklung der Numismatik und der numismatischen Sammlungen im 19. Jahrh. 1901.

— Zittel, Karl A. v.: Ziele und Aufgaben der Akademien im 20. Jahrhundert. 1901.

— Altbayerische Monatsschrift, hrsg. v. d. histor. Verein f. Oberbayern. Jg. 2. 1900, H. 4—6. — Jg. 3. 1901, H. 1/2.

Neapel. Atti della R. accademia delle scienze morali e politiche. Vol. 32. 33. 1901. — Atti d. R. accademia delle scienze fisiche e matematiche. Vol. 10. 1901.

— Rendiconto dell' accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della società reale di Napoli) Ser. 3, vol. 6. 1900 f. 8—12. — Vol. 7. 1901 f. 1—11. — Rendiconto delle tornate e dei lavori dell accademia di scienze morali e politiche. Anno 39. 1901.

Neisse. Bericht der wissenschaftlichen Gesellschaft Philomathie. 30. Bericht 1898/1900.

Neuburg. Neuburger Kollectaneen-Blatt für die Geschichte Bayerns, insbesondere des ehemaligen Herzogtums Neuburg, hrsg. v. d. historischen Verein. Jg. 63. 1899.

New Haven. Journal of the american oriental society. Vol. 21 p. 2. 1901. — Vol. 22 p. 1. 1901.

— Transactions of the Connecticut academy of arts and sciences. Vol. 10 p. 2. 1900.

New York. Journal of the american geographical society of New York. Vol. 32 no. 5. Tit. and cont. 1900. — Vol. 33, no. 1—4. 1901.

— Bulletin of the american mathematical society. Vol. 7, no. 3—10. 1900/1901. — Vol. 8, no. 1. 2. 1901. — Annual register. Jan. 1901.

— Transactions of the american mathematical society. Vol. 1, no. 4. 1900. — Vol. 2, no. 1. 1901.

Digitized by Google

New York. The museum of the Brooklyn institute of arts and sciences. Vol. 1, no 1. 1901.

— Columbia university bulletins of information. Published by Columbia university in the City of New York. 1. Ser. no. 1. President's (11.) annual report 1900. — Nr. 2. Catalogue 1900/1901 (1901).

— Columbia university quarterly. Published by the Columbia university press. Vol. 3, no. 1. 1900. — Vol. 4, no. 1. 1901.

— The greater light. Vol. 2, no. 4—12. 1901. — Vol. 3, no 1—3. 1901.

Nürnberg. Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft. Säkularfeier. 1801—1901. 1901.

— Anzeiger und Mittheilungen aus dem germanischen Nationalmuseum. Jg. 1900, H. 1—4.

— Jahresbericht des Vereins f. d. Geschichte der Stadt. 22. 1899 (1900). — 23. 1900 (1901).

— Mittheilungen des Vereins f. d. Geschichte der Stadt. Heft 14. 1901.

Odessa. Mémoires de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. 23. vyp. 1. 1899, vyp. 2. 1900.

Osnabrück. Mittheilungen des Vereins für Geschichte und Landeskunde von Osnabrück. Bd. 25. 1900 (1901).

Ottawa. Geological survey of Canada. No. 692. 1900.

— Annual report. 11. 1898 (1901) and maps.

Padua. Annuario della R. università degli studi. Per l'anno accad. 1900/1901 (1901).

Palermo. Rendiconti del circolo matematico. T. 14. 1900 fasc. 6. — T. 15. 1901. — Estratto dal t. 14 (1900): Prospetto dei conti consuntivi degli esercizii 1884—1899 (1901).

— Archivio storico Siciliano pubbl. period. della società Siciliana per la storia patria. N. S. Anno 25 fasc. 3. 4. 1901. — Anno 26 fasc. 1. 2. 1901.

Paris. Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1900.

— Annales du musée Guimet. T. 27. 1896. — Bibliothèque d'études T. 9. 1901.

— Annales du musée Guimet. Revue de l'histoire des religions publ. sous la direction de J. Réville. Année 19 t. 41, no. 3. 1899. — T. 42. 1900. — T. 43, no. 1. 2. 1901.

Digitized by Google

Paris. Bulletin de la société mathématique de France. T. 29. 1901 fasc. 1—3.

— Journal de l'école polytechnique publ. p. le conseil d'instruction de cet établissement. Sér. 2. Cah. 5. 1900, cah. 6. 1901.

Philadelphia. Annals of the american academy of political and social science. Vol. 17 u. Suppl. 1901. — Vol. 18, no. 1. 2. 3. 1901.

— Proceedings of the academy of natural sciences. 1900 p. 2. 3. (1901). — Vol. 53 p. 1. 1901.

— Alumni report, publ. by the alumni association of the Philadelphia college of pharmacy. Vol. 36. 1900, no. 12. — Vol. 37. 1901.

— Proceedings of the american philosophical society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. Vol. 39. 1900, no. 163. 164. — Vol. 40. 1901, no. 165. 166.

— University of Pennsylvania. Bulletins. New ser. no. 1. University of Pennsylvania catalogue 1900—1901 (1900). — No. 2. The provosts report for the year end. august 31, 1900.

— Publications of the university of Pennsylvania. Series in philosophy. No. 4. 1900. — Proceedings of commencement. 1. Ser. no. 1 p. 1. 1901. — Proceedings of „University Day". N. S. 1901, no. 9.

Pisa. Annali della R. scuola normale superiore. Filosofia e filologia, vol. 14. 1900.

— Annuario della R. università per l'anno accademico 1900—1901. (1901).

— Atti della società toscana di scienze naturali residente in Pisa. Processi verbali. Vol. 12 p. 137—167. 1901.

Plauen. Mitteilungen des Altertumsvereins. Hrsg. v. J. Vogel. Jahresschrift 14. 1900 (1901).

Porto. Annuario da academia polytechnica. Anno 23. 1899—1900. Coimbra 1900.

Posen. Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jg. 1. 1900, no. 8—12. — Jg. 2. 1901, no. 1—3.

— Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Hrsg. v. R. Prümers. Jg. 15. 1900.

Potsdam. Verhandlungen der allgem. Conferenz der internationalen Erdmessung, 25. Sept.—6. Okt. 1900 in Paris. Berlin 1901.

Digitized by Google

Prag. Jahresbericht der Kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1900 (1901).

— Sitzungsberichte der Kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Cl. f. Philos., Gesch. u. Philologie Jg. 1900 (1901). — Mathem.-naturw. Cl. Jg. 1900 (1901).

— Magnetische und meteorologische Beobachtungen a. d. k. k. Sternwarte. Jg. 61. 1900 (1901). — Astronomische Beobachtungen i. d. J. 1892—1899 (1901).

— Mittheilung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen. No. 13. 14. 1901.

— Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens auf d. Gebiete der Wissenschaft, Kunst und Litteratur. Hrsg. v. d. Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft in Böhmen. Während des Decenniums 1891—1901. — A. Krug, Die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Bd. 1. 1901.

— Beiträge zur Kenntniß der Wirbelthierfauna der böhmischen Braunkohlenformation. Bd. 1. 1901. — Bd. 2. 1901.

— Rechenschaftsbericht, erstattet vom Vorstande der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst u. Litt. in Böhmen, 13. März 1901.

— Sitzungsberichte des Deutschen naturw.-medicin. Vereines „Lotos". Jg. 1898 N. F. Bd. 18 (= g. R. Bd. 46). — Jg. 1900 N. F. 20 (= g. R. Bd. 48).

— Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jg. 39, no. 1—4. 1900/1901.

— Spisův poctěných jubilejní cenou král. české společnosti nauk. Čislo 11. Němec, Bohumil: Studie o dráždivosti rostlinné plasmy. 1900.

Pressburg. Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde. N. F. Heft 12. 1900 (1901).

Regensburg. Verhandlungen des historischen Vereins von Oberpfalz und Regensburg. 52. (N. F. 44) 1900.

Rennes. Bulletin de la société scientifique et médicale de l'ouest. T. 1. 1892. — T. 2, no. 1. 3. 4. 1893. — T. 3. 1894. — T. 4. 1895. — T. 5. 1896. — T. 6. 1897. — T. 8. 1899. — T. 9. 1900. — T. 10, no. 1. 2. 1901.

Digitized by Google

Rom. Atti della R. accademia dei Lincei. Cl. di sc. fisiche, matem. e naturali. Memorie. (Anno 291) 1894. Vol. 1. — (A. 292) 1895. V. 2. — (A. 296) 1899. V. 3. — Rendiconti delle sedute solenni. Vol. 1. 1892—1901 (1901). — Rendiconti Cl. di sc. morali, storiche e filol., Ser. 5 1900, vol. 9 fasc. 7—12. Vol. 10 fasc. 1—8. 1901.

— Atti della R. accad. dei lincei. Cl. di sc. morali, storiche e filol., Memorie Ser. 5 (Anno 296) Vol. 7. 1901 — parte 2. Notizie degli scavi. (Anno 296) 1900, vol. 8. settemb.—dic. — 1900, vol. 9 genn.—agosto 1901.

— Atti della R. accad. dei lincei. Cl. di sc. fisiche, matematiche e naturali. Ser. 5, vol. 9. 1900, 2. sem. fasc. 12. — Vol. 10. 1901, 1. sem. fasc. 1—12. — 2. sem. fasc. 1—10.

— Rendiconto dell' adunanza del 2 giugno 1901.

Rostock. Beiträge zur Geschichte der Stadt Rostock. Hrsg. im Auftrag d. Vereins für Rostocks Alterthümer v. K. Koppmann. Bd. 3, Heft 2. 1901.

Sacramento. Publications of the Lick observatory of the university of California. 1901, no. 2—11.

Salzwedel. Jahresbericht des Altmärkischen Vereins für vaterländische Geschichte und Industrie. Abt. f. Gesch., hrsg. v. Th. Fr. Zechlin. Jg. 28. Magdeburg, Salzwedel 1901.

San Francisco. Occasional papers of the California academy of sciences. 7. 1900.

— Proceedings of the California academy of sciences. Ser. 3. Botany: Vol. 1, no 10. 1900. — Vol. 2, no 1. 2. 1900. — Zoology: Vol. 2, no. 1—6. 1899/1900. — Geology: Vol. 1, no. 7—9. 1900. — Math.-phys.: Vol. 1, no. 5—7. 1899/1900.

Santiago (Chile). Anales de la universidad. 1900 mayo—diciembre. — 1901 énero—mayo.

— Actes de la société scientifique du Chile. Tom. 10. 1900 livr. 2. — T. 11. 1900 livr. 1.

St. Gallen. Neujahrsblatt des histor. Vereins von St. Gallen, 4. Folge. 1901.

St. Louis. The transactions of the academy of science. Vol. 9, no. 6—9. 1899/1900. — Vol. 10, no. 1—8. 1900.

St. Petersburg. Annuaire du musée zoologique. T. 5. 1900, no. 4. — T. 6. 1901, no. 1.

— Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Sér. 5. T. 12, no. 2—5. 1900. — T. 13, no. 1—3. 1900.

Digitized by Google

St. Petersburg. Mémoires de l'académie impériale des sciences. Cl. phys.-mathém. T. 10, no. 3—9. 1900. — Cl. histor.-philol. Vol. 4. 1899, no. 8.

— Procès-verbaux des séances de l'académie impériale des sciences depuis sa fondation jusqu'à 1803. Tom. 1. 1725—1743 (1897). — T. 2. 1744—1770 (1899). — T. 3. 1771—1785 (1900).

— *Βυζαντινὰ χρονικά.* T. 7. 1900, no. 3. 4.

— Izvěstija imperatorskago russkago geografičeskago obščestva. Tom. 36. 1900 vyp. 3—6. — T. 37. 1901 vyp. 1—3.

— Otčet imperatorskago russkago geografičeskago obščestva 1900 (1901).

— Strannik, duchovnyj žurnal sovremennoj žisni, nauki i literatury. God 42. 1901. T. 1, no. 1—6. — T. 2. 1901, no. 7—11. — Priloženie: Obščedostupnaja bogoslovskaja biblioteka. Vypusk 5. 6. 8. (T. 6 = Lopuchin, A. P.: Istorija christianskoi cerkvi v XIX věkě T. 1. 1900. — T. 5. 8. = Pravoslavnaja bogoslovskaja enciklopedija. Izdanie pod redakciej prof. A. P. Lopuchina T. 1. 2. 1900/1901.)

— Cerkovnyj věstnik, izdav. pri S.-Peterburgskoi duchovn. akademii. Eženedělnyj žurnal z ežeměsjačnymi knižkami pribavlenij. God 27. 1901, no. 1—51/52. — Priloženie: Christianskoe čtenie. God 81. 1901. vyp. 1—12. — Žurnaly zasědanij sověta S.-Peterb. akad. za učebnyj god 1900—1901, s. 1—112.

— Trudy geologičeskago komiteta (Mémoires du comité géol.) Tom. 1. 1883/85. — T. 2. 1885/87. — T. 3. 1885/89. — T. 4. 1887/93. — T. 5. 1888/90. — T. 6, no. 1. 2. 1888. — T. 7. 1888/99. — T. 8. 1888/98. — T. 9. 1889/99. — T. 10 1890/95. — T. 11, no. 1. 2. 1889/91. — T. 12, no. 2. 3. 1892/99. — T. 13, no. 1. 2. 1892/94. — T. 14. 1895/96. — T. 15, no. 2. 3. 1896/99. — T. 16, no. 1. 1898.

— Izvěstija geologičeskago komiteta (Supplement des Bulletins du comité géologique). T. 1. 1885 (1886). za god 1886—1896 (1887—1897).

— Russkaja geologičeskaja biblioteka (Bibliothèque géologique de la Russie). za god 1897 (1901).

Schaffhausen. Neujahrsblatt des historisch-antiquarischen Vereins und des Kunstvereins. 11. 1901.

— Festschrift der Stadt Schaffhausen zur Bundesfeier 1901.

Schmalkalden. Zeitschrift des Vereins für Hennebergische Geschichte und Landeskunde. Heft 14. 1901.

Siena. R. Università degli studi di Siena. Annuario accademico. 1900—1901 (1901).

Digitized by Google

Siena. Bullettino Senese di storia patria. Anno 7 fasc. 3. 1900. — Anno 8 fasc. 1. 2. 1901.

Stavanger. Stavanger museums aarshefte. 11. aarg. f. 1900 (1901).

Stockholm. Öfversigt af Kongl. vetenskaps-akademiens förhandlingar. Årg. 57. 1900 (1901).

— Kongliga svenska vetenskaps-akademiens handlingar. Ny följd. Bd. 34. 1901. — Bihang. Bd. 26, no. 1—4. 1900.

— Meteorologiska jakttagelser i Sverige, utg. af K. svenska vetenskaps-akademien anställda . . . under inseende af meteorologiska Central-Anstalten. Bd. 37. 1895. — Bd. 38. 1896.

— Lefnadsteckningar öfver K. svenska vetenskaps akademiens efter år 1854 aflidna ledamöter. Bd. 4, H. 1. 2. 1899/1901.

— K. vitterhets och antiquitets akademiens månadsblad. Årg. 25. 1896. — Årg. 29. 1900.

Stuttgart. Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte, hrsg. von der Württemberg. Kommission f. Landesgeschichte. Jg. 10. 1. 2. 1901.

— Veröffentlichung der K. Württemb. Kommission für die Internationale Erdmessung. Heft 4. 1901.

Sydney. Journal and proceedings of the R. society of New South Wales. Vol. 34. 1900. — Abstract of proceedings 1899, Sept. 6, Oct. 4, Nov. 1, Dec. 6. — 1900 Mai 2, June 6.

— Geolog. Survey of New South Wales. Geolog. Ser. no. 2. 1901. — Mineral resources. Pittman, Edw. F.: The mineral resources of New South Wales. 1901.

Throndhjem. Det Kgl. norske videnskabers selskabs skrifter. 1900 (1901).

Tokio. Imperial University of Japan. The Calendar. 2560—2561 (= 1900—1901) Kyōto 1901.

— The journal of the college of science. Imperial university of Japan. Vol. 13 part 4. 1901. — Vol. 14 part 1—3. 1901.

— Mittheilungen aus der medizinischen Fakultät der kaiserlich-japanischen Universität. Bd. 5, No. 1. 1901.

— Publications of the earthquake investigation committee in foreign languages. No. 3—6 1900/1901.

— Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Bd. 8, Th. 1. 2. 1899/1900.

Torgau. Veröffentlichungen des Altertums-Vereins. 13/14. 1901.

Digitized by Google

Toronto. University of Toronto studies. Psychological series no. 4. 1900. — Anatomical series no. 1. 1900. — Geological series no. 1. 1900.

— Proceedings of the Canadian institute. New. ser. Vol. 2 p. 4. 1901.
— Transactions of the Canadian institute. Vol. 7 p. 1. 1901.

Toulouse. Annales de la faculté des sciences pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Sér. 2, Tom. 2 fasc. 2—4. 1900. — T. 3 f. 1. 1901.

Tromsø. Tromsø museums aarsberetning. 1899 (1900). — 1900 (1901).
— Tromsø museums aarshefter. 21 u. 22 1. afd. 1898—99 (1899). — 23. 1900 (1901).

Turin. Atti della R. accademia delle scienze di Torino. Vol. 36. 1900/1901.
— Memorie della R. accademia delle scienze. T. 50. 1901.
— Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1900 all' osservatorio della R. università. 1901.

— Annuario della R. università degli studi. 1900—1901 (1900).

Urbana Ill. Bulletin of the Illinois state laboratory of natural history. Vol. 5, Art. 12. 1901.

Upsala. Bulletin of geological institution of the university. Vol. 5 p. 1. (No. 9) 1901.
— Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique de l'université. Vol. 32. 1900 (1900/1901).

— Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. 3, vol. 19. 1901.

— Urkunder rörande Stockholms historia. Bd. 1: Stockholms stads privilegiebref 1423—1700. Häftet 1. 2. 1900/1901.

Washington. Annals of the astrophysical observatory of the Smithsonian institution. Vol. 1. 1900.
— Annual report of the board of regents of the Smithsonian institution. Report of the national museum for the year ending June 1897 p. 2. (1901). — 1898 (1900). — 1899 (1901).
— Bulletin of the United States national museum. No. 47 part. 2. 3. 4. 1900. — Special bulletin: American hydroits. Part 1. 1900.

— Philosophical society of Washington. Bulletin. Vol. 13. 1900. — Vol. 14 pag. 1—166. 1900/1901. — Putnam, G. R., Results of a transcontinental series of gravity measurements, and Gilbert, G. K., Notes on the gravity determinations reported by Mr. G. R. Putnam.

Digitized by Google

Washington. Astronomical, magnetic and meteorological observavations made at the U. S. naval observatory. 1891. 1892. (1899).

— Publications of the U. S. naval observatory. Ser. 2, vol. 1. 1900.

— United States coast and geodetic survey. Bulletin no. 40. 2. edit. 1900.

— Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey showing the progress. Year 1898/1899 (1900).

— Monographs of the U. S. geological survey. Vol. 35. 1898. — Vol. 39. 40. 1900.

— Annual report of the U. S. geological survey to the secretary of the interior. 20. 1898—99 p. 7. 1900. — 21. 1899—1900 p. 1. 1900, p. 6. 1901, p. 6 (contin.) 1901.

— Bulletin of the U. S. geological survey. No. 163—176. 1900. — Preliminary report on the cape nome gold region Alaska. 1900.

— Mineral resources of the U. S. geological atlas pl. 59—71. 1899—1901.

— Treasury department. Special publication no. 1—4. 1898/1900.

Wien. Kaiserliche Akademie der Wissenschaften. Süd-arabische Expedition. Bd. 1. Die Somalisprache von Leo Reinisch. Bd. 2. Wien 1902.

— Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Jg. 49. 1899. — Jg. 50. 1900.

— Archiv f. österreichische Geschichte. Hrsg. v. der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission d. Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 87. 1899. — Bd. 88. 1900. — Bd. 89. 1. Hälfte 1900.

— Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 46. 1900. — Mathem.-naturw. Cl. Bd. 66, Th. 3. 1900. — Bd. 68. 1900.

— Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichtsquellen. Hrsg. v. der Histor. Commiss. d. K. Akad. Bd. 48, Th. 2. 1896. — Bd. 49. 1899. — Bd. 50. 1898. — Bd. 51. 1901.

— Mittheilungen der prähistorischen Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 1, no. 5. 1901. — Der römische Limes in Oesterreich. H. 2. 1901.

Digitized by Google

Wien. Sitzungsberichte der Kais. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 141. 1899. — Bd. 142. 1900. — Register zu Bd. 131—140. 1900. — Mathem.-naturw. Cl. Abth. I. Bd. 108. 1899. — Bd. 109, H. 1—7. 1900. — Abth. II, 2a. Bd. 108. 1899. — Bd. 109, H. 1—9. 1900. — Abth. II, 2b. Bd. 108. 1899. — Bd. 109, H. 1—10. 1900. — Abth. II, 3. Bd. 108. 1899. — Bd. 109, H. 1—7. 1900.

— Schriften der Balkancommission. Linguistische Abtheilung. I. Südslavische Dialektstudien. H. 1. 1900.

— Sonderschriften des österreichischen archäologischen Institutes in Wien. Bd. 1. 1901.

— Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Jg. 1898. N. F. Bd. 35 (= 43. Band), Th. 2. 1900. — Jg. 1899. N. F. 36 (= 44. Bd.), Th. 1. 1900.

— Meteorologische Zeitschrift. Hrsg. von der österreich. Gesellschaft f. Meteorologie u. d. deutschen meteorolog. Gesellschaft. Bd. 17. 1900, H. 12. — Bd. 18. 1901, H. 1—11.

— Verhandlungen der K. K. zoologisch.-botanischen Gesellschaft. Bd. 50. 1900, H. 10. — Bd. 51. 1901, H. 1—8.

— Jahrbuch der K. K. geologischen Reichsanstalt. Bd. 50. 1900, H. 2—4.

— Verhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Jg. 1900, no. 13—18. — Jg. 1901, no. 1—14.

— Blätter des Vereins für Landeskunde von Niederösterreich. N. F. 34. 1900.

— Topographie von Niederösterreich. Hrsg. v. d. Verein f. Landeskunde von Niederösterreich. Bd. 5, H. 10—12. 1900.

— Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse. Bd. 41. 1900/1901 (1901).

Wiesbaden. Annalen des Vereins für Nassauische Altertumskunde u. Geschichtsforschung. Bd. 31. 1900/1901.

— Mitteilungen des Vereins für Nassauische Altertumskunde u. Geschichtsforschung an seine Mitglieder. Jg. 1900/1901 (1901).

— Jahrbücher des nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jg. 54. 1901.

Digitized by Google

Würzburg. Archiv des historischen Vereins von Unterfranken u. Aschaffenburg. Jg. 42. 1900. — Jahresbericht d. histor. Vereines 1899 (1900).

— Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Gesellschaft. Jg. 1900, no. 2—4.

— Verhandlungen der physik.-mediz. Gesellschaft. N. F. Bd. 34, no. 2—6. 1901.

Zürich. Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde nebst Mitteilungen aus dem Verbande der Schweizerischen Altertumssammlungen. N. F. Bd. 2, no. 3. 4. 1901. — Bd. 3, no. 1. 2. 3. 1901. — J. R. Rahn, Zur Statistik schweizerischer Kunstdenkmäler: Kunst- und Architekturdenkmäler Unterwaldens... beschr. v. R. Durrer, Bog. 9—12.

— Mittheilungen d. antiquarischen Gesellschaft. Bd. 25, H. 2. 1901.

— Jahrbuch für schweizerische Geschichte, hrsg. v. d. allgem. geschichtsforschenden Gesellschaft der Schweiz. Bd. 26. 1901.

— Astronomische Mittheilungen v. R. Wolf. No. 92. 1901.

— Neujahrsblatt, hrsg. von der naturforschenden Gesellschaft auf das Jahr 1901, 103. Stück (1901).

— Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jg. 45, H. 3. 4. 1901. — Jg. 46, H. 1. 2. 1901.

— Schweizerisches Landesmuseum. Jahresbericht 9. 1900 (1901).

B. Anderweitig eingegangene Schriften.

Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler. Bd. 24, Heft 3. 4. 1900/1901.

Abafi-Aigner, L., A lepkészet története Magyarországon. Budapest 1898.

Alcaeus, Songs. Memoir and text with literal and verse translations and notes by James S. Easby-Smith. Washington 1901.

Annals of Cape observatory vol. 5. Edingburgh 1900.

Archer de Lima, Humanité. Vérité. Justice. Pour la paix et pour l'humanité. Lisboa 1898.

Bortolotti, E., Sulla determinazione dell' ordine di infinito. Modena 1901. (Estr. d. Atti della società dei naturalisti e matematici di Modena.)

Digitized by Google

Boussinesq, J., Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. T. 1. Paris 1901.

Brioschi, F., Opere matematiche. Pubbl. p. cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. T. 1. Milano 1901.

Cauchy, F., Oeuvres complètes d' Augustin Cauchy publ. sous la direction de l'acad. d. sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'instruction publique. Serie I. Tom. 12. 1900.

Cesàro, E., Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisirte deutsche Ausgabe von G. Kowalewski. Leipzig 1901.

Χατζιδάκις, Γ. Ν., Γλωσσολογικαὶ μελέται. Τὸμ. Α': Ἐν Ἀθήναις. 1901.

Congrès, V., international des physiologistes. Turin 1901.

Creţu, G., Lexicon slavo-românesc şi tîlcuirea numelor din 1649. Bucuresci 1900.

Dadai, J., A magyarországi kagylósrákok magánrajza. Ostracoda Hungariae. Budapest 1900.

Deichmüller, Erste Bestimmung der Rotationszeit des Planeten Eros. (Sep.-Abdr. a. d. Sitzungsberichten d. niederrhein. Gesellschaft f. Natur- u. Heilkunde zu Bonn. 1901).

Denkschrift zur Feier des fünfundsiebenzigjährigen Jubiläums der Firma Sieler & Vogel in Leipzig. Leipzig 1900.

Le Devoir, Revue des questions sociales. Tom. 25. Paris 1901.

Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften. Hrsg. von H. Burkhardt u. W. F. Meyer. Th. 1, Bd. 1, H. 6. Leipzig 1901. — Bd. 2, H. 4. Ebd. 1900. — Th. 4, Bd. 1, H. 1. Ebd. 1901. — Bd. 2, H. 1. Ebd. 1901. (2 Exempl.)

Encyclopédie Musulmane par plusieurs orientalistes. Redacteur M. Th. Houstma. Leide 1899 (Specimen).

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen der Landesstationen in Bosnien-Hercegovina im Jahre 1898. Wien 1901.

Fabre, A., Les sky scratchers. Nimes 1896.

Die **Fortschritte** der Pendelexpedition. (Sonderabdr. a. d. Mittheilungen aus den deutschen Schutzgebieten, Bd. 13. 1900, H. 1.)

Fricke, R., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen von Robert Fricke und Felix Klein. Bd. 1. 1897. — Bd. 2, Lief. 1. 1901.

Fritsche, H., Die Elemente des Erdmagnetismus. St. Petersburg. 1900.

Gide, Ch., Les prophéties de Fourier. 2. édit. Nimes 1894.

Godin (J. B. André), Mutualité sociale. Paris 1880.

Digitized by Google

Goppelsroeder, F., Capillaranalyse. Basel 1901. (Separatabdr. a. d. Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 14.)

Grave, C., The Oyster reefs of North Carolina: a geological and economic study. (From the Johns Hopkins University circulars, No. 151, April 1901.)

Grulich, O., Geschichte der Bibliothek u. Naturaliensammlung der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1894.

Héjas, E., A zivatarok Magyarországon az 1871 — töl 1895 — ig terjedö megfigyelések alapján. Budapest 1898.

Henle, J., Grundriß der Anatomie des Menschen neu bearb. von Fr. Merkel. 4. Aufl. Text u. Atlas. Braunschweig 1901.

Hinojosa, R. de, Felipe II y el conclave de 1559. Madrid 1889.

— Los despachos de la diplomacia pontifica en España. Tom. 1. Madrid 1896.

— La jurisdiccion apostolica en España y el proceso de D. Antonio de Covarrubias. (Estratto del homenaje á Menéndez y Pelayo en el año vicesimo su professorado. Estudios de erudición española). Madrid 1899.

Hippauf, H., Die Rectification und Quadratur des Kreises. 1901.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. Bd. 30, H. 1. 2. 1901.

Jamshedji, Edalji, Reciprocally related figures. Part 2. Ahmedabad 1901.

Jeffrey, E. C., The morphology of the central cylinder in the angliosperms. (Reprint. from the Transactions of the Canadian Institute Vol. 6, 1899.)

Inaugurazione del monumento a Francesco Brioschi nel R. istituto tecn. sup. di Milano. Milano 1901.

Joseph, P., Der Pfennigfund von Kerzenheim. Frankfurt a. M. 1901.

Kalecsinsky, A. v., Ueber die ungarischen warmen und heissen Kochsalzseen, als natürliche Wärme-Accumulatoren, sowie über die Herstellung von warmen Salzseen und Wärme-Accumulatoren. Budapest 1901.

Karácsonyi, J., A magyar nemzetségek a XIV. század közepéig. Budapest. Kötet 1. 1900.

Kehr, P., Due documenti pontifici illustr. la storia di Roma negli ultimi anni del secolo XI. Roma 1900. (Estr. d. Archivio d. R. soc. Romana di stor. patr. vol. XXIII.)

Koelliker, A., Die medulla oblongata und die Vierhügelgegend Ornithorhynchus und Echidna. Leipzig 1901.

Digitized by Google

Kossel, A., Ueber die Stickstoffausscheidung nach Leberexstirpation. Straßburg 1901. (Separatabdr. aus Zeitschrift für physiol. Chemie Bd. XXXII, H. 3 u. 4.)

Laske, F., Bericht über die Pariser Welt-Ausstellung 1900 in Verfolg. d. Erl. d. Min. d. geistl. u. s. w. Angelegenh. Potsdam 1900.

Leo, F., Die griechisch-römische Biographie nach ihrer litterarischen Form. Leipzig 1901.

Levi, U., I monumenti più antichi del dialetto di Chioggia. Venezia 1901.

Levi-Civita, T., Sulla integrazione del equazione $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$. Torino 1898. (Estr. dagli Atti della R. accad. delle science di Torino.)

—, Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione $\Delta_2 \Delta_2 = 0$. Venezia 1898. (Estr. dagli Atti del R. istituto veneto di science, lettere ed arti. T. IX, Ser. 7. 1897/98.)

Official Publication of the **Maryland** commissioners Pan-American Exposition **Maryland** and its natural resources prepared by the Maryland geological survey Wm. Bullock Clark, State geologist. Baltimore 1901.

Matiegka, H., Bericht über die Untersuchung der Gebeine Tycho Brahe's. Prag 1901.

Meyer, L., Handbuch der griechischen Etymologie. Bd. 1. 2. 3. Leipzig 1901.

Milloué, L. de, Petit guide illustré au musée Guimet. Paris 1899.

Munkácsi, B., Árja és Kaukázusi elemek a finn-magyar nyelvekben. Budapest. Kötet 1. 1901.

Nature, illustr. journal of science. Vol. 63, no. 1627. — vol. 64, no. 1676.

Neupert, K., Mechanik des Himmels und der Moleküle. Bamberg o. J.

Notice sur la société du familistère. Saint Etienne 1900.

Pingré, A. G., Annales célestes du dix-septième siècle. (Ouvrage publ. sous les auspices de l'académie des sciences.) Paris 1901.

Rapports présentés au congrès international de physique réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la société française de physique publ. p. Ch. Ed. Guillaume et L. Poincaré. Tome 1—3. Paris 1900.

Die **Regierung** der Süd-Afrikanischen Republik und das Unterrichtswesen. Ausg. v. „Het Algemeen Nederlandsch Verbond." 1900.

Reuter, O., The difficulties of obtaining justice. 1900.

Riecke, E., Experimental-Physik. Ins Japanische übersetzt von **Shunkici Kimura.** Tokio 1901.

Digitized by Google

Riemann, B., Die partiellen Differential-Gleichungen d. math. Physik. 4. Aufl. neu bearb. v. H. Weber. Bd. 2. Braunschweig 1901.

Rochas, A. de, Les frontières de la physique. (Lecture faite 1898.) Nîmes [1898].

Ronna, A., L'agriculture de l'avenir. Paris 1900. (Extr. de Bulletin de la société d'encouragement pour l'industrie nationale.)

Rowland, H. A., A preliminary table of solar spectrum wavelengths. Part 1. Chicago 1896. — Part 2. ib. 1898. (Repr. from the Astrophysical Journal, Vol. 1, no. 1. 1895 to vol. 5, no. 3. 1897 and vol. 6, no. 5. 1897.)

— On a table of standard wave-lengths of the spectral lines. (Memoirs of the American academy of arts and sciences. Vol. 12, no. 2. Cambridge 1896.)

Savva, V., Moskovskie Cari vizantijskie vasilevsy. K voprosu o vlijanii Vizantii na obrazovanie idei carskoj vlasti moskovskich gosudarej. Charkov 1901.

Scarpini, G., Tavole numeriche di topografia. Torino 1901.

R. **Societas** scientiarum Danica. Tychonis Brahe Dani (die XXIV octobris a. d. MDCI defuncti operum primitias) de nova stella denuo edidit . . . Havniae MDCCCI.

Socolow, S., Corrélations régulières supplémentaires du système planétaire. Supplément à l'ouvrage intitulé: „Corrélations régulières du système planétaire avec l'indication des orbites des planètes inconnues jusqu' ici." Moscou 1901 (3 Expl.).

Sousa-Brandão, V. de, Sur l'orientation cristallographique des sections des minéraux des roches en plaques minces. Lisbonne 1901. (Extr. d. Communicações da direcção dos serviços geologicos. Tom. 4 fasc. 1.)

Struever, G., Azione chimica tra la hauerite e alcuni metalli a temperatura ordinaria e a secco. Nota preliminare. (R. Accademia dei Lincei. Estratto d. Rendiconti Cl. di scienze fis., matem. e natur. vol. 10, 1° sem., ser. 5a, fasc. 5.) Roma 1901.

— Azione chimica dei solfuri di ferro e dal solfo nativo sul rame e sull' argento a temperatura ordinaria e a secco. (R. Accademia dei Lincei. Estr. d. vol. 10, 1° sem., ser. 5a, fasc. 7.) Roma 1901.

— I giacimenti minerali di Saulera e della Rocca Nera alla Mussa in Val d' Ala. (Rendiconti d. R. Accad. d. Lincei classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Estr. d. vol. 8, 1° sem., ser. 5a, fasc. 9.) Roma 1899.

Digitized by Google

Studnička, F. J., Bericht über die astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe. Weitere Beiträge zur bevorstehenden Säcularfeier der Erinnerung an sein vor 300 Jahren erfolgtes Ableben. Prag 1901.

Thesaurus linguae Latinae ed. Academ. quinque German. Vol. 1 fasc. 2. 3. Leipz. 1901. — Vol. 2. fasc. 1. 2. ib. 1901.

Ule, W., Geschichte d. Kais. Leopoldin.-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher während der Jahre 1852—1887. Halle 1889.

Vogel, H. C., Ueber die Bewegung von α Persei in Gesichtslinie. (Sonderabdr. a. Sitzungsberichte d. K. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin.) 1901.

— Der spectroskopische Doppelstern Mizar. (Separatabdr. a. Sitzungsberichte d. K. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1901, XXIV.)

— Ueber das Spectrum der Nova Persei (Separatabdr. a. Sitzungsberichte d. K. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1901, XVI.)

Weinek, L., Die Tychonischen Instrumente auf der Prager Sternwarte. Prag 1901.

Wolfer, A., Sur l'existence, la distribution et le mouvement de principaux centres présumés de l'activité solaire. (Extr. d. Memorie della società degli spettroscopisti italiani. Vol. XXIX. 1901).

Zimmermann, F., Zur siebenbürgisch-deutschen Geschichtsschreibung besonders über die Besiedelungsfrage. Innsbruck 1901. (Sonderabdr. a. d. Mittheilungen d. Instituts f. österr. Geschichtsforschung. Ergzgsbd. 6.)

Digitized by Google

Berichtigungen:

S. 41 Z. 3 v. u. lies: Nils Nordenskiöld statt Gustaf N.
S. 44 Z. 1 v. o. lies: Mosander statt Solander.

Digitized by Google

Bericht

...entliche Sitzung am 15. November 1902.

...chaft hielt am 15. November die in den Statu-
...öffentliche Sitzung zur Erinnerung an ihren
... II. von England, ab.

...e sprach über „Neuere Anschauungen der
...lehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der
...electricität".

Die zu dieser Rede gehörenden wissenschaftlichen Beilagen werden in den Nachrichten der mathematisch-physikalischen Classe von 1903 veröffentlicht werden.

Digitized by Google

Wedekindsche Preisstiftung für deutsche Geschichte.

In dem Geschäftsjahre $19^{01}/_{02}$ hat der Verwaltungsrath der Stiftung seine verfügbaren Mittel zur Unterstützung von zwei größern Unternehmungen verwendet, nachdem seine Beschlüsse vom 21. Mai die Genehmigung des Herrn Universitätscurators unterm 29. Mai erhalten hatten.

1) Auf Antrag des Herrn Max Lehmann ist Herrn Dr. Paul Wittichen, der hier 1899 mit einer Dissertation: „Die polnische Politik Preußens 1788—1790" promoviert hat, eine Reiseunterstützung bis zur Höhe von 3000 Mk. zum Zweck der Herstellung einer Lebensbeschreibung von Friedrich Gentz eventuell einer Ausgabe der Schriften von Gentz bewilligt worden. Der Verwaltungsrath hat damit die Bedingung verbunden, daß Dr. Wittichen über die Ergebnisse seiner Nachforschungen regelmäßig an die Wedekindstiftung zu Händen des Herrn Lehmann berichte und daß die aus diesen Forschungen hervorgehenden Publicationen als mit Unterstützung der Wedekindstiftung veröffentlicht bezeichnet werden.

In dem verflossenen Jahre hat Dr. Wittichen eine Reihe solcher Berichte eingesandt, von denen zwei in der Anlage abgedruckt sind. Der erste ist die Eingabe vom 7. Februar 1901, in der Dr. Wittichen das Bedürfniß einer neuen historisch-biographischen Arbeit über Gentz dargelegt hat. Der zweite Bericht enthält eine Uebersicht über die schriftstellerische Thätigkeit von Gentz nach drei Perioden, unter welche dann die bisher ausgeführten Arbeiten subsumirt sind. Hier ist über den Abschluß des Berichtsjahres hinausgreifend auch schon über die nach Schweden ausgeführte Reise referirt.

Dr. Wittichen hat seine Arbeit in Berlin mit der Benutzung des Geheimen Staatsarchivs und der Königlichen Bibliothek, die

Digitized by Google

den Nachlaß Varnhagens aufbewahrt, begonnen und sich dann im Juli zum zehnwöchentlichen Aufenthalt nach London begeben, wo er außer dem Public Record Office und den Handschriften des British Museum eine Reihe wichtiger Privatsammlungen durchforscht hat. Im November und December hat er sich fünf Wochen in Wien aufgehalten, nachher seine Untersuchungen in deutschen und schwedischen Archiven und Bibliotheken fortgesetzt. Die letzte auswärtige Station hat Lund gebildet, wo der Briefwechsel Gentzens mit Karl Gustav von Brinkmann, schwedischen Gesandten in Berlin, aufbewahrt wird. Die durch die Reise nach England unterbrochenen archivalischen Arbeiten in Berlin sind nachher wieder aufgenommen worden.

2) Die zweite Unternehmung ist die auf Antrag des Herrn Kehr ins Leben gerufene Germania pontificia: die Herstellung eines geographisch-historischen Repertoriums der Papsturkunden bis 1198, die an deutsche Empfänger gerichtet sind. Die Bearbeitung ist Herrn Dr. Albert Brackmann unter Leitung von Herrn Kehr übertragen und für die erforderlichen Reisen eine Summe bis zu 3000 Mk. im Ganzen, auf vier Jahre von dem Verwaltungsrathe bewilligt worden.

Dr. Brackmann hat zuerst die Archive des östlichen Deutschlands in Angriff genommen. Ueber die Ergebnisse liegt sein ausführlicher Bericht in den Nachrichten, phil.-histor. Classe 1902 Heft 2 S. 193—223 vor. Dr. Brackmann hat dann weiter die Archive Westfalens, das königliche Staatsarchiv zu Düsseldorf; Dr. Wiederholt Wolfenbüttel, Wernigerode, Goslar besucht. Ueber die Resultate ertheilt der in der Anlage abgedruckte Bericht vom 1. Mai 1902 die nähere Auskunft.

Von den für die beiden Unternehmungen bewilligten Summen sind im Berichtsjahr 2400 Mk. für die erste, 850 Mk. für die zweite verwendet worden.

3) Oberlehrer P. Kühnel am Gildemeisterschen Institut in Hannover hat dem Verwaltungsrathe eine Abhandlung: Die slavischen Orts- und Flurnamen im Lüneburgischen, Thl. 1 (Hannover 1902), Abdruck aus der Zeitschrift des Historischen Vereins für Niedersachsen Jg. 1901, eingesandt. Die günstigen Gutachten der Herren Brückner in Berlin, Leskien in Leipzig und Hey in Döbeln sowie die Prüfung unsers Mitglieds, des Herrn W. Schulze haben den Verwaltungsrath bestimmt, Herrn Kühnel zur Förderung seiner Studien über slavische Ortsnamen die Summe von 300 Mk. zu gewähren: ein Beschluß vom 10. März, der die Genehmigung des Herrn Universitätskurators unterm 17. März erhalten hat.

Digitized by Google

I. Berichte des Dr. P. Wittichen.

1.

Die Staatsmänner Europas, die der französischen Revolution und ihrem nicht minder gefährlichen Ueberwinder im Kampef gegenübertraten, haben größtenteils ebenso wie die Feldherren in Biographien oder durch umfassende Veröffentlichung ihrer Staatsschriften oder Memoiren die ihnen gebührende Beachtung erfahren. Die ersten im Range, Pitt, Stein, Metternich nicht weniger als Hardenberg, Humboldt, Castlereagh und viele andere sind, wenn auch oft keineswegs genügend, so doch mit dem Eifer behandelt worden, den der Gegenstand erweckt. Auch dem Engländer, der mehr als Schriftsteller denn als aktiver Staatsmann dem Kampf gegen die Revolution den Stempel seines Geistes aufdrückte, Burke, ist, freilich nicht nur wegen dieser Thätigkeit seiner letzten Jahre, große Aufmerksamkeit zu Teil geworden. Um so mehr zu bedauern ist, daß die ähnliche Thätigkeit eines Deutschen, der bei Burkes Tode erst im Anfang seiner Laufbahn stand, der an Fülle und Kraft der politischen Gesichtspunkte Burke vergleichbar, an Kenntnis der realen Verhältnisse, namentlich der auswärtigen Politik, überlegen war, daß Gentz bisher so sehr vernächlässigt worden ist. Zwar die minderwertige Litteratur über ihn ist groß; von beachtenswerter Seite aber sind ihm bis jetzt nur kurze Charakteristiken oder Essais zu Teil geworden (Haym, v. Mohl, Fournier, Mendelssohn-Bartholdy), deren Standpunkt meist als überwunden gelten darf. Die Ursache der Vernachlässigung ist im Allgemeinen die mit der Bewegung der 48er Jahre beginnende Wiederanknüpfung an die Revolution und auf deutscher bezw. preußischer Seite die unversöhnliche Gegnerschaft gegen Oesterreich, der durch den Krieg von 1866 zwar die Spitze abgebrochen, die aber nicht so rasch beseitigt wurde. Dazu mochte seitens mancher Beurteiler die angeblich bis zu geistiger Effeminierung führende Sittenlosigkeit Gentz' kommen. Gegenüber diesem Vorwurf möge an das Wort Ranke's erinnert werden: „Mir hat er immer den Eindruck des Ernstes, der Tiefe, der vollkommenen Hingebung an seinen Beruf und seine Pflicht gemacht". Heutzutage, wo der Einfluß Frankreichs auf die innere Politik der übrigen Mächte fast völlig vernichtet, wo die Interessen Oesterreichs schon so lange an die unseren gekettet sind, ist es an der Zeit, die Anstrengungen Gentz' um die Erhaltung der europäischen

Digitized by Google

Staatenrepublik und seine hervorragende Thätigkeit im österreichischen Staatsdienst unbefangen zu würdigen.

Zwar sind eine Anzahl seiner publizistischen Schriften neu gesammelt, ein kleiner Teil seiner Staatsschriften und Privatbriefe, seine Tagebücher veröffentlicht worden, aber in so sporadischer und zum Teil ganz unzuverlässiger Weise, daß auf diesem Material eine Biographie nicht aufgebaut werden könnte. Die wichtigsten seiner Denkschriften, die nach London, dem Mittelpunkt aller antifranzösischen Interessen, gerichtet waren, sind unbekannt. Seine Beziehungen zu England, die seine Thätigkeit aufs stärkste beeinflußten, sind noch gänzlich unaufgeklärt. Eine Durchforschung der englischen Staatsarchive, so wie verschiedener Privatarchive, die unzweifelhaft Gentzsche Papiere enthalten, ist daher unumgänglich. Ebenso notwendig ist eine genaue Inspizierung österreichischer Staats- und Privatarchive, wobei es vor allem darauf ankommen würde, den Verbleib des Gentz'schen Nachlasses ausfindig zu machen, von dem sich nur ein kleiner Teil auf der Königl. Bibliothek zu Berlin befindet. Ein Aufenthalt in Wien wäre auch schon wegen der zerstreuten österreichischen Litteratur notwendig, bei der man selbst von der Berliner Bibliothek im Stiche gelassen wird. Von deutschen Archiven kämen außer den preussischen (für die Zeit von Gentz' preußischem Staatsdienst) auch das Münchner, Dresdner und eventuell einige andere in Betracht. Je nach dem Ausfall der archivalischen Forschungen würde der Verfasser sich vorbehalten, auch eine neue Ausgabe der litterarischen Werke Gentz' zu veranstalten, die im höchsten Grad wünschenswert ist.

Göttingen, 7. Febr. 1901.

2.

Die Ergebnisse meiner Archivstudien sind im Folgenden nach sachlichen Gesichtspunkten zusammengefaßt.

Für die erste bis zum J. 1802 reichende, vorwiegend publizistische Periode von Gentz' Leben kommen die staatlichen Archive nur in geringem Maße in Betracht. Immerhin konnte ich dem Berliner Geh. Staatsarchiv wichtige Mitteilungen über Gentz und sein Verhältnis zur Regierung und deren Politik entnehmen. Dem Londoner Record Office verdanke ich eine für die Geschichte des preußischen Kabinets wie der modernen Parteibildung wichtige Gentz'sche Denkschrift aus d. J. 1800, die inzwischen in der „Historischen Zeitschrift" zur Veröffentlichung gekommen ist [1]).

1) Histor. Ztschr. Bd. 89 (N. F. LIII) S. 239—273.

Digitized by Google

Bedeutendere Aufschlüsse über Gentz' litterarische Thätigkeit, seine Stellung in der Berliner Gesellschaft und sein Verhältnis zu den geistigen Strömungen der Zeit waren nur aus privaten Archiven oder Nachlässsen zu entnehmen. Der außerordentlichen Liberalität des Grafen Anton Prokesch von Osten verdanke ich das druckfertige Manuskript eines bisher unbekannten Gentz'schen Werkes: einer in Form eines Tagebuchs gehaltenen, sehr eingehenden und dokumentierten Geschichte der französischen Revolution vom Bastillensturm bis zum Tode Mirabeaus, die, ursprünglich zur Veröffentlichung bestimmt, von Gentz nur für seine Aufsätze im historischen Journal (1799—1800) verwertet wurde. Bruchstücke daraus werden später zur Veröffentlichung gelangen. Von besonderem Werte zur Beurteilung Gentz' ist seine Korrespondenz mit dem schwedischen Diplomaten K. G. von Brinkmann, deren Benutzung mir der Besitzer, Graf Trolle-Wachtmeister auf Trolle-Ljungby (Schweden) gütigst gewährte. Demselben Privatarchiv verdanke ich auch die Kenntnisnahme von sehr bedeutenden Briefen Gentz' an A. Müller über seine Reise nach England u. a. m. Auch der Nachlaß Varnhagens auf der Königlichen Bibliothek zu Berlin, sowie Gentz' Korrespondenz mit C. A. Böttticher auf der Königlichen Bibliothek zu Dresden bot wichtige Aufklärungen.

Für die zweite Periode von Gentz' Thätigkeit, in der der Publizist hinter den politischen Agitator und Diplomaten zurücktritt, glückte es mir, mehrere wertvolle Quellen zu eröffnen. An erster Stelle nenne ich die Korrespondenz Gentz' mit dem englischen Diplomaten Sir Arthur Paget, deren Benutzung ich der Güte der Lady W. Paget verdanke. Sie ist nicht nur für den Biographen von hohem Wert, sondern bietet auch für die allgemeine Geschichte manches Neue. Umfassende an Paget gerichtete Denkschriften kritisieren die finanziellen, ökonomischen und administrativen Zustände Oesterreichs, andere treten den Angriffen der jungen radikalen Partei in England auf Pitt entgegen. Von noch größerer Bedeutung für die Biographie ist wegen seiner Intimität der Briefwechsel Gentz' mit K. G. von Brinkmann, der politische und litterarische Gegenstände gleichermaßen umfaßt. Dem Archiv des Grafen Trolle-Wachtmeister verdanke ich auch die Kenntnis von Denkschriften, die Gentz nach London gerichtet hat.

Dies letztere Resultat hatte auch die Benutzung der Akten des englischen auswärtigen Amts im Londoner Record Office, sowie anderer dort aufbewahrter Papiere. Eine Denkschrift vom Oct. 1804 habe ich inzwischen in den „Mitteilungen des Instituts

Digitized by Google

für österreichische Geschichtsforschung" veröffentlicht [1]). Ueber das Verhältnis Gentz' zu den verschiedenen englischen Ministerien und die Allianzverhandlungen Englands mit Oesterreich und Preußen konnte ich dort wertvolle Nachrichten sammeln. Viele Aufschlüsse über diese Seite von Gentz' Wirksamkeit verdanke ich auch den Staatsarchiven zu Berlin und Hannover.

Die Akten des Wiener Haus-, Hof- und Staatsarchivs, sowie des dortigen Ministeriums des Innern trugen an manchen Punkten, obwohl nicht in dem erwarteten Maßstabe, zur Erweiterung meiner Kenntnisse von Gentz' Beziehungen zu den österreichischen Ministern, sowie seiner Beurteilung der politischen Ereignisse während der napoleonischen Kriege bei. Leider war die Familie Stadion nicht zur Eröffnung ihrer Archive zu bewegen, und ebensowenig erlangte ich es, das Familienarchiv des Fürsten Metternich einsehen zu dürfen.

Dagegen konnte ich für die dritte Periode, in der Gentz als publizistischer Verfechter, Berater und zeitweise höchst einflußreicher Teilnehmer an der Metternich'schen Politik erscheint, dem Wiener Haus-, Hof- und Staatsarchiv zahlreiche Korrespondenzen Gentz' mit dem Fürsten Metternich, sowie andern österreichischen Staatsmännern, und viele Denkschriften über Gegenstände der inneren und äußeren Politik entnehmen. Weiteres wichtiges Material ward mir durch die Güte des Grafen Prokesch von Osten zu teil. Lord Stanhope auf Chevening gewährte mir die Benutzung des Briefwechsels Gentz' mit seinem Großvater aus d. J. 1827—29, und auch das Archiv des Grafen Trolle-Wachtmeister lieferte Beiträge zur Erkenntnis dieser Periode.

Frankfurt a. M., 14. Aug. 1902.

II. Bericht des Dr. Brackmann.

Ostern 1901 wurde mit den Vorarbeiten für die Sammlung älterer Papsturkunden begonnen. Während in der ersten Hälfte des Jahres die umfangreiche ältere und neuere Litteratur durchgesehen wurde, konnte vom Oktober ab mit der eigentlichen Archivarbeit angefangen werden. Die ersten Archive, die in Angriff genommen wurden, waren die Archive des östlichen Deutschlands. Ueber die Resultate dieser Arbeiten ist in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ausführlicher Bericht erstattet (oben S. 2).

1) Bd. XXIII S. 461—480.

Digitized by Google

Außer den Archiven des östlichen Deutschlands sind dann folgende Archive bearbeitet worden. Zunächst die meisten Archive Westfalens: 1) Münster. a) Königl. Staatsarchiv mit den Orig. urkunden der Stifter und Klöster: Abdinghof, Bussdorf, Cappenberg, Corvey, Herford, Kemnade, Liesborn, Marienfeld, Marienmünster, Minden, Neuenheerse, Paderborn, Scheda, Weddinghausen, Willebadessen und zahlreichen Copiaren sowie den Nachlässen von Kindlinger, Niesert, Wilkens u. a. Die Finke'schen Angaben („Papsturkunden der Provinz Westfalen") konnten mehrfach berichtigt und ergänzt werden. b) Die Bibliothek des Vereins für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens mit einem alten Wildeshauser Copiar und modernen Urkundenabschriften. c) Die Königl. Paulinische Bibliothek mit modernen Urkundenabschriften.

2) Paderborn. a) Das Archiv des Generalvikariats. b) Die Bibliothek des Gymnasii Theodoriani mit den inhaltsreichen Libri variorum und anderen modernen Urkundenabschriften. c) Die Bibliothek des Vereins für Geschichte und Alterthumskunde.

3) Clarholz. Pfarrarchiv mit dem Orig. von Eugen III (J.-L. 8923).

Ferner das Königliche Staatsarchiv zu Düsseldorf, das größte bisher besuchte Urkundenarchiv, mit den Orig.urkunden des Erzstifts Köln, der Kölner Stifter und Klöster, der Stifter und Klöster: Aachen, Altenberg, Bonn, Brauweiler, Camp, Deutz, Dietkirchen, Dünnwald, Essen, Füssenich, Heinaberg, Heisterbach, Herrenstrunden, Hoven, Knechtsteden, Meer, Rees, Siegburg, Stablo-Malmedy, Vilich, Werden, sowie den Chartularen dieser Stifter und Klöster und zahlreichen Handschriften, unter ihnen ein Teil der v. Redinghoven'schen Manuskriptensammlung und die Sammlung des Freiherrn von Knapp, ferner die Handschriften der Königl. Landesbibliothek.

Unbekannt waren: ein Eugen III. für das St. Cassius-Stift in Bonn, überliefert in einem Chartular des Stiftes, und die Orig.-urkunden von Gregor VIII., Clemens III. und Celestin III. für Deutz.

Von Herrn Dr. Wiederholt wurden folgende Archive besucht:

1) Wolfenbüttel. a) Das Herzogl. Hauptlandesarchiv mit den Orig.urkunden der Klöster: Amelunxborn, S. Egidii Braunschweig, Gandersheim, Helmstedt, Königslutter, Marienthal, Riddagshausen, Schöningen, Walkenried, und den betr. Chartularen. b) Die Herzogl. Landesbibliothek mit vielen Handschriften und einigen Chartularen. Unbekannt waren: ein Celestin II. für

Digitized by Google

Amelunxborn, überliefert in einem Copialbuch des Klosters; ferner eine Fälschung Leo's IX. für S. Blasii in Northeim.

2) Wernigerode. a) Das Fürstlich Stolbergische Archiv mit einer Originalurkunde für Ilsenburg und einem Chartular dieses Klosters. b) Die Bibliothek mit dem sog. Codex Viennensis.

3) Goslar, Stadtarchiv mit den Orig.urkunden des Klosters SS. Simeon und Judä in Goslar.

Die Arbeit wurde sehr wesentlich dadurch unterstützt, daß die meisten Archive in dankenswertester Weise die Originalurkunden und wichtigsten Copiare zur Bearbeitung nach Göttingen übersandten. Wir haben Urkunden und Copialbücher zugeschickt erhalten von den Königlichen Staatsarchiven zu Berlin, Düsseldorf, Hannover, Magdeburg, Marburg, Münster, den Königlichen Bibliotheken zu Berlin, Dresden und Halle, dem Herzoglichen Haus- und Staatsarchiv zu Zerbst.

Aber auch in den genannten Archiven und Bibliotheken selbst fand unsere Arbeit die weitgehendste Unterstützung; in fast allen Orten wurde dem Verfasser dieses Berichtes eine besonders große Arbeitszeit zugestanden und Rat und Hülfe jeder Art zu teil. Zu Dank verpflichtet sind wir namentlich den Herren Archivdirektoren Ausfeld, Döbner, Friedensburg, Ilgen, Könnecke, Philippi, Zimmermann, den Herren Archivaren Heinemann in Stettin, Klinkenborg in Berlin, Knipping in Düsseldorf, Krumbholz in Münster, Rosenfeld in Magdeburg, den Herren Oberregierungsrath Dr. Posse in Dresden, Archivrath Professor Dr. Wäschke in Zerbst, Archivrath Dr. Jacobs in Wernigerode; den Herren Geheimen Hofrath Professor Dr. v. Heinemann und Milchsack in Wolfenbüttel, Herrn Bibliothekar Dr. Günther in Leipzig, Herrn Realschuldirektor Loose in Meißen, den Herren Generalvikar Schmitz, Gymnasialdirektor Hense und Oberpostsekretär Stolte in Paderborn, dem Herrn Pfarrer Symann in Clarholz.

Die Resultate der bisherigen Arbeit übertrafen die gehegten Erwartungen; eine Reihe unbekannter und interessanter Urkunden und manche alte Ueberlieferung ist gefunden worden: hoffentlich wird der Fortgang dem Anfang entsprechen.

Die Archive Nord- und Mitteldeutschlands sind somit in diesem Jahre größtenteils bereist; es fehlen noch Thüringen und einige kleinere Archive, die in dem nächsten Jahre zur Bearbeitung kommen sollen. Bereits ist mit den litterarischen Vorarbeiten für Süddeutschland, Belgien und Holland begonnen, so daß die Aussicht vorhanden ist, daß auch die Archive jener Gegenden bald in Angriff genommen werden können.

Hannover, den 1. Mai 1902.

Digitized by Google

Die K. Gesellschaft überreichte der Universität Oxford am 9. Oktober zur Dreihundertjahrfeier der Bibliotheca Bodleiana durch ihren Vertreter folgende Adresse:

Wenn es einen Ort auf Erden giebt, dem die Gelehrten aller Welt mit Ehrfurcht nahen, so ist es das alte und ewig junge Oxford, das Oxford der Roger Bacon und Locke, der Boyle und Gibbon, so ist es das Herz Oxfords, die Bibliotheca Bodleiana. Als der unvergessliche Fellow von Merton College seine Bibliothek ausstattete, sagte er ihr voraus, dass sie werden solle 'the most absolute and sufficient for the furthering of students in all kinds of knowledge of good literature that was ever yet in being, in any public place of study'. Nie ist eine Prophezeiung glänzender in Erfüllung gegangen.

Die Gelehrten und die gelehrten Anstalten aller Länder bringen der Bodleiana mit ihren Glückwünschen den Zoll von Dank und Bewunderung. Sie hat es um Alle verdient, die sich an sie gewendet haben, um von ihrer Fülle zu geniessen. In ihren ersten Jahren schon war die Bodleiana von Italienern, Franzosen, Deutschen, Dänen, Polen und Schweden besucht; der Strom der Fremden ist immer stärker geworden, der Liber Admissorum der Bibliothek ist ein leuchtendes Document ihres Reichthums wie ihrer Gastlichkeit.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften schätzt sich glücklich, einem Institut, das nunmehr drei Jahrhunderte hindurch in einziger Weise und mit stets steigendem Erfolge der wissenschaftlichen Lehre und Forschung gedient hat, ihre herzlichen und feierlichen Wünsche darzubringen. Die dreihundert Jahre der Bodleiana bedeuten Kraft und Jugend; so möge sie dauern und die Worte des Philosophen bekräftigen, dessen reiner Text zu ihren eignen besten Schätzen gehört, *σοφίαν καὶ ἐπιστήμην πάντων κράτιστον εἶναι τῶν ἀνθρωπείων πραγμάτων.*

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIV. OF MICH.
MAR 17 1903

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mittheilungen.

1902. Heft 2.

Inhalt.

Bericht über die öffentliche Sitzung am 15. November 1902 . . . . . S. 125
Bericht über die Wedekindstiftung . . . . . „ 126
Adresse der Kgl. Gesellschaft an die Universität Oxford . . . . . „ 134

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1902.

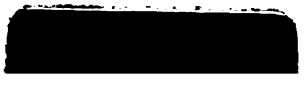
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BOUND IN LIBRARY.
JUN 30 1904



Digitized by Google

Digitized by Google